Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
Getty Research Institute

https://archive.org/details/memoriedelliristo8iris

MEMORIE

DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

MEMORIE

DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

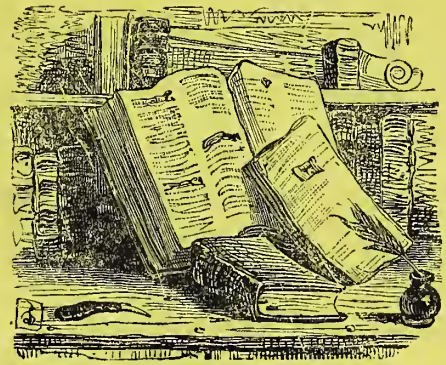
VOLUME OTTAVO

VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL' I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1859. 160

AVVERTIMENTO

In esecuzione dell' articolo 134 degli statuti interni si dichiara che ogni autore è particolarmente risponsabile delle opinioni e dei fatti esposti ne' proprii scritti.

VENEZIA, NEL PRIV. STAB. DI GIUSEPPE ANTONELLI.



TEORIA DINAMICA DEL CALORICO

MEMORIA

DEL MEMBRO EFF. DOMENICO TURAZZA

Una nuova teoria del calorico venne, non è molto, introdotta nella scienza, e attentamente studiata in tutte le sue parti per opera principalmente di Joule, di Thomson, di Rankine, di Clausius e di altri, i quali facendo ingegnosamente concorrere le esperienze e il ragionamento in uno scopo comune giunsero a dare alla teoria medesima il suggello di tutte le prove che valgono a collocarla fra i fatti i più probabilmente avverati. In un'epoca in cui del calorico ci gioviamo al compimento di molteplici e maravigliosi lavori non può non destare la comune attenzione una teoria la quale sola conducendo ad un ragionato uso di questa potentissima fra le naturali forze, può regolarne l'impiego così da crescerne a dismisura il profitto, e da procacciare forse con ciò nuove sorgenti di economia. S'aggiunga la spiegazione e la valutazione di fatti finora oscuri ed incerti, l'allettamento che viene dal poter abbracciare sotto un solo punto di vista svariati e molteplici fenomeni, svariate ed utilissime applicazioni. Se ciò è, spero di non aver fatto opera del tutto inutile avendo cercato di recare fra noi questa teoria, per quanto più chiaramente io abbia saputo e potuto fare, sperando appunto che l'utilità dell'argomento mi valga a scemare la taccia d'ardire soverchio. Forse oltre l'ordine e il modo della esposizione, oltre la dimostrazione dei teoremi fondamentali null'altro di nuovo si troverà nella memoria ch'io sottopongo in oggi, spettabili colleghi, al vostro giudizio; ma se questa esposizione, se le dimostrazioni recate in campo valgono a mettere in maggior luce ed a convalidare la teoria medesima, ancora io crederò di non avere sprecata la mia fatica, e che voi, cortesi, vorrete sapermi grado dell'opera da me posta, forse fra i primi in

Italia, in queste ricerche. Per ora io vi presento soltanto la parte comprendente la teoria generale: spero ben presto di assoggettare al vostro esame anche le sue applicazioni, specialmente in ciò tutto che si riporta all' uso del calorico nelle macchine termo-dinamiche, nel che principalmente la nuova teoria differisce in tutto da quanto si è usato di fare fin qui, e per le quali appunto è massima la sua pratica importanza. Vogliate intanto accettare in bene questa mia prima memoria; egli è solo nel vostro compatimento ch' io potrò trovare l' appoggio che mi abbisogna a progredire nell' opera intrapresa.

14 novembre 1858.

N. B. Le memorie delle quali principalmente mi valsi nello stendere questo scritto sono:

a) *On the Geometrical Representation of the Expansive Action of Heat, and the Theory of Thermo-Dynamic Engines.* — By William John Macquorn Rankine ec. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the yiar 1854.

b) *Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze welche sich darauf für Wärmelehre selbst ableiten lassen.* — Von R. Clausius, Annalen von Poggendorff, 1850 — Band 79.

c) *Ueber eine veränderte form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.* — Von R. Clausius — id. Band 93. — 1854.

d) *Ueber die Anwendung der Mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine.* — Von R. Clausius. — id. Band 97. — 1856.

Le altre memorie delle quali pure mi sono servito si troveranno notate ai luoghi opportuni.

CAPITOLO I.

Nozioni e principii fondamentali.

1. Senza voler disconoscere gl' immensi vantaggi recati alla scienza dalla vecchia e più comune teoria del calorico, egli è però attualmente impossibile il non andare convinti della necessità di dover porre alla scienza del calorico una base essenzialmente differente, e di dover quindi mutarne del tutto la teoria. La materialità del calorico, che potè sussistere colla teoria finora usata, ed anche colle idee espresse in primo luogo dal Carnot (*Reflexion sur la puissance motrice du feu, et sur les Machines propres a developper cette puissance.* — Paris 1824), è ora costretta a cedere il campo; e con essa dovrebbe pure scomparire anche la sua nomenclatura, la quale è essenzialmente connessa con quella idea fondamentale. Se non che una nuova nomenclatura richiede una nuova ipotesi completa alla quale legandosi possa presentare un' esatta idea dei varii fatti che le nuove denominazioni devono richiamare alla mente. Una tale ipotesi io non credo che sia stata ancora esibita, e quindi nello stato attuale io reputo più conveniente di attenermi alla vecchia nomenclatura, cercando solo di legare alle parole di cui la stessa fa uso le idee che sono più consentanee al nuovo punto di vista sotto del quale noi prendiamo a considerare gli effetti di questa forza meccanica.

2. In faccia al fatto che sfregando ghiaccio con ghiaccio si produce calorico, già Sir Humphry Davy fu condotto a conchiudere che il calorico non esiste; e prima ancora il Loke aveva detto: « il calorico altro non essere che un vivace movimento delle particelle insensibili dei corpi che produce in noi quella sensazione per cui diciamo quei corpi caldi; cosicchè in quanto si riporta alle nostre sensazioni esso è calore, e in quanto si riporta ai corpi altro non è che movimento. »

Ora si considera come assolutamente dimostrato il calorico altro non essere che una *forza viva*, un *lavoro disponibile;* ed è nella trasformazione del calorico in lavoro, e inversamente del lavoro in calorico che sta riposta l' idea fondamentale della nuova teoria.

Se, per esempio, in un cilindro chiuso, impervio al calorico, entro cui scorra un embolo a tenuta d' aria, siavi racchiusa una certa quantità di aria, e

l' aria stessa si riscaldi fino a data temperatura e poi si lasci espandere, essa caccierà avanti a sè l' embolo vincendo una corrispondente pressione esercitata sull' embolo stesso, e compiendo con ciò un determinato lavoro dinamico; contemporaneamente la sua temperatura si sbasserà perchè la forza viva calorifica, che si manifestava come tale nella proprietà calefacente mostrata dalla così detta temperatura, si va tramutando in lavoro dinamico e passa dallo stato di forza viva in quello di lavoro. Ciò fatto se un' esterna pressione applicata all' embolo ricacci l' embolo così da spendere lo stesso lavoro dinamico sviluppato prima dallo espandersi dell' aria, allora l' aria così compressa si riscalderà riprendendo la temperatura di prima, per essersi il lavoro riconvertito in calore ossia in forza viva calefacente.

Dunque egli è il fatto comune della meccanica, cioè della trasformazione della forza viva in lavoro, e del lavoro in forza viva che, riportato al calorico, costituisce la base della presente teoria. È noto in meccanica che la quantità $\frac{1}{2}.\frac{p.v^2}{g}$, o la metà di quello che si dice la forza viva posseduta dal corpo, può essere considerata come l' espressione del lavoro dinamico che può produrre un corpo di massa $\frac{p}{g}$ e dottato di velocità v prima di arrestarsi agendo sopra altri punti materiali per l' effetto della velocità acquistata e fino a che questa velocità sia estinta; e perciò appunto la si dice anche lavoro disponibile racchiuso nel corpo, ed è precisamente perchè in addietro alcuni autori chiamarono *forza* il *lavoro* che alla quantità stessa diedero il nome di *forza viva,* ch' è quanto dire *lavoro disponibile.*

3. Ammesso che il calorico altro non sia che una forma dinamica del lavoro, ne discende che fra lavoro e calorico deve esistere un rapporto come fra causa ed effetto. Sembra che il Mayer nella sua memoria *Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur,* pubblicata nel maggio del 1842 negli annali di Wöhler e Liebig sia stato il primo ad accennare un tale rapporto. In seguito numerose esperienze, sulle quali avremo già occasione di ritornare in appresso, misero fuor di dubbio il fatto che la trasformazione del calorico in lavoro, e inversamente del lavoro in calorico avviene sempre con un rapporto costante: quella quantità di calorico ch' è idonea a portare da zero gradi ad un grado centigrado un chilogramma di acqua, convenientemente usata, è idonea a produrre un lavoro dinamico di 424 chilogrammetri; e inversamente un lavoro dinamico di 424 chilogrammetri, opportunamente speso, è atto ad innalzare da

zero gradi ad un grado centigrado un chilogramma di acqua, od a produrre un equivalente effetto termico.

Il calorico non è lavoro, nè il lavoro è calorico, come la forza viva non è lavoro, nè il lavoro è forza viva, ma fra una quantità e l'altra vi ha però sempre questa dipendenza che con una determinata quantità di quella forza viva che ci si manifesta per la proprietà calefacente possiamo compiere un determinato lavoro dinamico, e inversamente che spendendo un assegnato lavoro dinamico siamo in grado di sviluppare una quantità di forza viva calefacente pure assegnata. Fra queste due quantità vi ha sempre un costante rapporto, per cui se diciamo Q una certa quantità di forza viva calefacente ed esprimiamo con W la quantità di lavoro dinamico che può essere compiuto colla medesima sarà:

$$\frac{Q}{W} = A$$

essendo A una costante.

La quantità $\frac{1}{A}$ è ciò che si dice l' *equivalente calorifero.*

4. A precisare nettamente il senso e il valore di A osserveremo che, per quanto si è detto precedentemente, il calorico può essere valutato tanto per mezzo di un lavoro dinamico, quanto per mezzo di un determinato effetto calorifico.

Se valutiamo il calorico in lavoro dinamico l' unità di misura sarà il chilogrammetro; se per un effetto calorifico bisognerà fissare esattamente questo effetto, e le circostanze tutte sotto la cui influenza il detto effetto succede. Parrebbe che l' effetto calorifero il più proprio fosse quello della fusione del ghiaccio, e allora si dovrebbe prendere per unità la quantità di forza viva calefacente che conviene comunicare ad un chilogramma di ghiaccio preso a zero gradi per ridurlo tutto in acqua pure a zero gradi; questo infatti dispenserebbe dal bisogno di considerare la temperatura e di discutere i mezzi con cui si stima la stessa. Siccome però nella stima degli effetti calorifici è invalsa quella particolare unità che si dice *caloria,* così noi pure seguiremo l' uso comune, e prenderemo per unità di forza viva calefacente la quantità di detta forza che bisogna comunicare ad un chilogramma di acqua distillata presa alla temperatura zero e sotto la normale pressione atmosferica, corrispondente a 760 millimetri di mercurio, per portarla alla temperatura di un grado centigrado, misurata col mezzo di un perfetto termometro ad aria atmosferica.

Allora se diciamo W il valore di una data quantità di forza viva calefa-

cente valutata in unità di lavoro, sarà $A.W$ il valore della stessa quantità di calorico valutata invece in calorie; e inversamente se è Q il valore di una data quantità di calorico valutato in calorie, sarà $\frac{1}{A}Q$ il valore della stessa quantità valutata in unità di lavoro.

Fra W ed $A.W$ fra $\frac{1}{A}Q$ e Q, vi ha però la stessa differenza che vi ha fra lavoro e forza viva. La prima delle dette quantità è un lavoro dinamico compiuto, la seconda un lavoro dinamico disponibile; la prima è un lavoro, la seconda una forza viva; però colla prima si può sempre produrre la seconda e inversamente; sono quantità equivalenti che si trasformano esattamente l' una nell'altra.

5. La presenza del calorico in un corpo sotto la sua forma originaria di forza viva calefacente ci è manifestata da una particolare sensazione cui diamo il nome di *temperatura* del corpo, la quale temperatura è anche precisata abbastanza bene da alcuni fenomeni esterni nettamente definiti. Ora è legge costante che nella trasmissione di questa particolar forza viva da un corpo ad un altro essa tende costantemente all' eguaglianza delle temperature, e che la trasmissione cessa allora che le due temperature sono eguali; di modo ch' egli non è possibile far passare da un corpo ad un altro questa particolare energia sotto la sua forma originaria di forza viva calefacente, di calorico, se non quando siavi una differenza di temperatura fra i due corpi, ossia, come comunemente si dice, se non quando uno dei due corpi sia *caldo* in confronto dell'altro, che, raffrontato col primo, dicesi *freddo*.

Ciò premesso tutte le volte che avremo occasione di considerare i varii effetti che nascono comunicando ad una sostanza qualunque questa particolare energia sotto la sua forma originaria di forza viva calefacente, cui per semplicità indicheremo anche solo col nome di calorico, diremo *sorgente calorifica*, od anche solo *sorgente* un corpo più caldo della sostanza che si considera, il quale posto in presenza della sostanza medesima, più comunemente in contatto della sostanza, trasmette alla sostanza stessa, o meglio sviluppa nella sostanza questa forza viva; e diremo *scaricatore* un corpo più freddo della sostanza che posto in presenza o in contatto della sostanza serve a sminuire nella sostanza stessa la detta forza comunicandosi al corpo, il quale perciò, con idea abbastanza netta, serve appunto a scaricare la sostanza stessa della forza viva calefacente, del calorico, di cui si trova esser dotata.

Tanto le sorgenti quanto gli scaricatori possono essere alimentate o scari-

cati da altre sorgenti, da altri scaricatori così da ricevere tanto calorico quanto ne trasmettono e inversamente, e mantenersi con ciò in istato permanente; come possono invece variare col tempo. Possono anche considerarsi così estesi che le quantità di forza viva calefacente che emettono o che ricevono non vi arrechi mutamento sensibile, o no. Li diremo *permanenti* nei primi casi, *variabili* negli altri.

6. Comunicando ad una sostanza qualunque una certa quantità di forza viva calefacente, generalmente parlando, si presenta il doppio effetto di un aumento di volume, e di un accrescimento di temperatura. In ciò è necessario distinguere le trasformazioni seguenti:

a) all'aumento di volume di un corpo opponendosi generalmente degli ostacoli esterni, è mestieri spostare questi ostacoli perchè quell'aumento abbia luogo; è quindi necessario spendere una certa quantità di lavoro dinamico che viene trasmesso agli ostacoli stessi. Una parte dunque del calorico comunicato si trasforma in lavoro, e questa parte è, pel corpo che si considera, consumata e perduta: diremo questo lavoro *lavoro esterno*. La parte stessa potrà però essere rimessa nel corpo comunicando o trasmettendo nello stesso, con un mezzo a ciò idoneo, il lavoro dispendiato;

b) per l'aumentato volume le particelle del corpo si sono reciprocamente discostate le une dalle altre; nel che fare una certa quantità di forza viva calefacente si è trasformata nel lavoro dinamico necessario a vincere la reciproca attrazione delle molecole, e a spostarle di quanto si sono effettivamente allontanate le une dalle altre, nonchè nel lavoro necessario per muovere tutta la massa delle molecole così da far prendere al corpo il nuovo volume. Questa parte di forza viva comunicata al corpo resta imprigionata nel corpo stesso nel nuovo suo stato, però non più sotto la sua forma originaria, ma invece sotto la forma di un lavoro dinamico. Egli è questo quel lavoro che diremo *lavoro interno*. Anche questa parte potrà trasformarsi in calorico riducendo il corpo, mediante il dispendio di un eguale lavoro esterno, al suo volume di prima;

c) finalmente una parte del calorico comunicato non ha potuto trasformarsi in lavoro, e questa resta nel corpo sotto la sua forma originaria, serve ad aumentare la temperatura del corpo, e ci si palesa per l'effetto dell'aumentata sensazione del calore. Questa parte resta pure imprigionata nel corpo sotto la forma di forza viva pronta a trasformarsi in lavoro quando le circostanze sieno per permetterglielo: è un lavoro disponibile, come potressimo dire l'altra un calorico disponibile.

Un' idea abbastanza simile di tali trasformazioni si potrebbe avere nel fatto seguente. Si supponga un corpo di data massa e con un mezzo qualunque venga esso slanciato verticalmente dal basso in alto così da imprimere originariamente al medesimo una certa velocità. Durante il suo moto ascensionale la sua velocità va gradatamente diminuendo, e con essa la forza viva attuale posseduta dal corpo. Una parte della forza viva impressa va trasformandosi successivamente nel lavoro esterno impiegato e speso per allontanare l' aria circostante, e questa è la parte di forza viva impressa trasformata in lavoro esterno e intieramente perduta pel corpo. Una seconda parte della detta forza viva è pure trasformata in lavoro posto in serbo sotto questa forma nel corpo a mano a mano ch' egli si va innalzando, e che verrebbe integralmente restituito dallo stesso discendendo poi dai varii punti di altezza a cui successivamente perviene. Finalmente una terza parte resta sotto forma di forza viva attuale, la quale si manifesta nella velocità che il corpo possiede effettivamente nei varii istanti; è un lavoro disponibile, del quale ci potressimo giovare per muovere altri corpi.

7. Ogni corpo dunque in qualunque suo stato può essere considerato, se così mi è lecito lo esprimermi, come un magazzino tanto di forza viva calefacente quanto di lavoro, da cui otterremo la prima comprimendolo, il secondo sbassandone la temperatura; è un magazzino di una particolare energia che possiamo cavare a volontà sia sotto la forma di lavoro, sia sotto quella di calore. Non altrimenti noi diciamo un volante essere un magazzino di forza viva, essere un magazzino di lavoro un corpo sollevato ad una certa altezza, ecc.

Considerando un corpo qualunque in circostanze pienamente determinate, diremo *calorico attuale totale* del corpo la quantità di forza viva calefacente ch'è racchiusa sotto questa forma nel corpo stesso; e *lavoro interno totale* la quantità di lavoro dinamico che bisognerebbe spendere per portarlo a quella condizione di volume ch' egli ha effettivamente. *Calorico attuale* e *lavoro interno* semplicemente saranno le dette quantità corrispondenti all'unità di massa del corpo.

Come in tutto qui pure noi non possiamo avere che idee relative, e quindi nella considerazione delle predette quantità noi partiremo da uno stato particolare del corpo che si considera, stato che sarà intieramente al nostro arbitrio purchè nettamente definito, e valuteremo le quantità stesse a partire da questo stato particolare; stimando, cioè, l' eccesso del calorico attuale e del lavoro interno sopra il calorico attuale e il lavoro interno che quel corpo possiede nello stato che prendiamo come punto di partenza.

8. Supponiamo di avere una sorgente calorifica permanente, e di porla in contatto con un corpo finito di temperatura minore, il quale possa espandersi liberamente senza che a questo suo espandersi si opponga alcun ostacolo esterno. A cagione della differenza delle temperature si comunicherà forza viva calefacente dalla sorgente al corpo, dove si convertirà parte in lavoro interno per l'aumentato volume, e parte andrà in aumento del suo calorico attuale, e quindi della sua temperatura, spartendosi fra questi due effetti tutta la forza viva comunicata. Così continueranno le cose fino a che sarà passata dalla sorgente nel corpo tanta forza viva che quella che resta nel corpo sotto forma originaria di calorico avrà elevata la temperatura del corpo e fattala eguale a quella della sorgente, e d'allora in poi non vi sarà più alcuna trasmissione di calorico dalla sorgente nel corpo. Nel complessivo fenomeno sarà stata comunicata una certa quantità di forza viva, la quale si sarà spartita nel calorico attuale e nel lavoro interno, e quest'ultima, che si è convertita in lavoro, avrà condotto il corpo ad un nuovo volume nel quale si arresterà, e da cui non potrà allontanarsi che mediante l'applicazione di un lavoro esterno, o per l'introduzione di una nuova forza viva calefacente, o calorico attuale.

Il lavoro interno può essere grandissimo in alcuni corpi in causa della forte attrazione reciproca delle loro minime particelle, può essere piccolissimo in altri: nei primi l'aumento del volume si arresterà ben presto, non si potrà arrestare che ad una grandissima distanza dalla sua condizione originaria nei secondi.

Quando una causa esterna impedisca ad un corpo di accomodarsi a quel particolare volume che gli compete in causa della quantità di forza viva calefacente racchiusa nel corpo stesso, allora il corpo esercita uno sforzo sull'ostacolo che si oppone a ciò, ed è questo sforzo che si dice *tensione* o *forza elastica* del corpo. Egli è appunto mediante un tale sforzo che i corpi si rendono idonei a far lavorare il calorico, e che vengono adoperati come organi operatori, come strumenti dell'azione calorifica.

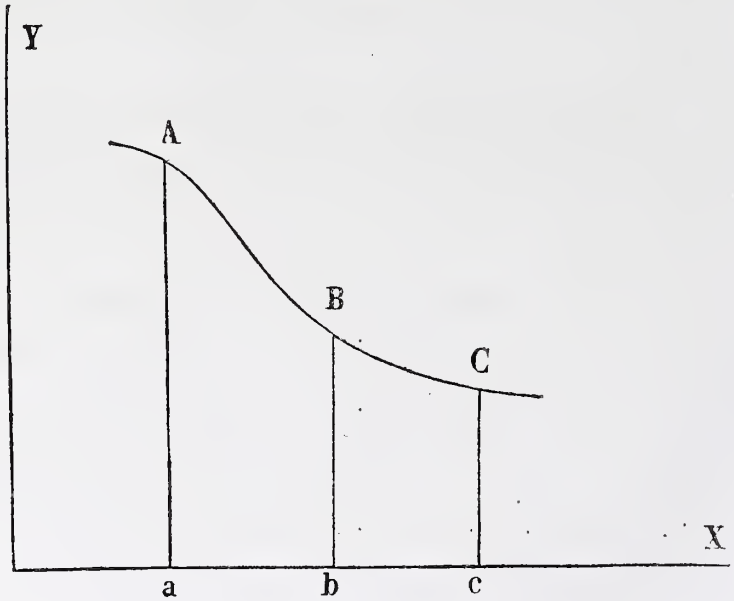
I solidi e i liquidi, fino a che si conservano in questo stato, appartengono alla prima classe dei corpi sopra accennati; i così detti fluidi elastici, compresivi i vapori, appartengono alla seconda classe, e perciò appunto sono gli unici usati allo scopo di operare la conversione del calorico in lavoro, potendosi col loro mezzo avere un movimento abbastanza esteso.

9. Se ad un corpo qualunque venga comunicato un dato lavoro dinamico,

parte del lavoro stesso per l'intermezzo di quel corpo viene trasmesso ad altri corpi, e se si trasmette integralmente nessuna variazione succede nel corpo trasmettitore; ma se il lavoro comunicato non è tutto trasmesso ad altri corpi, allora il corpo trasmettitore subisce generalmente una variazione di volume ed una variazione di temperatura; cioè quella porzione del lavoro comunicato che, non essendo trasmessa, resta nel corpo, parte si converte in calorico, e parte, modificando l'interno lavoro, serve a operare l'aumento del volume stesso, se il volume si aumenta, o a convertire in calorico la diminuzione del lavoro interno, quando il volume del corpo invece diminuisca. Per esempio il lavoro consumato dall'attrito delle varie parti di una macchina serve a riscaldare le parti stesse; un lavoro speso nell'agitare una massa d'acqua la scalda, e così via. Egli è già da grandissimo tempo che l'attrito è collocato fra le sorgenti di calore; fu il primo mezzo adoperato dagli uomini a procacciarsi quell'altra sorgente calorifica ch'è la combustione, e forse Rumford pel primo sospettò un costante rapporto numerico fra questi due fatti.

10. Supponiamo che una particolare sostanza qualunque venga usata come strumento della conversione del calorico in lavoro, e supponiamo che mentre opera la sostanza stessa si conoscano le variazioni che subisce il suo volume e la sua forza elastica o tensione; egli è evidente che potremo rappresentare geometricamente le predette variazioni mediante una curva riferita, p. e., a due assi ortogonali delle x e delle y, assumendo le ascisse x a rappresentare i volumi, e le y a rappresentare le corrispondenti tensioni. Una curva così definita sarà da noi denominata *curva dell'energia*; così, per e. (fig. 1.ª), se *ABC* è una data curva d'energia, le ordinate *aA; bB; cC* rappresentano le tensioni della sostanza operante quando i suoi volumi sono rispettivamente *Oa; Ob; Oc*, ec. Tale è la curva tracciata dall'indicatore di

fig. 1.ª



Watt, notissimo strumento ordinato a dare le effettive tensioni del vapore durante un' intera corsa dell' embolo nelle ordinarie macchine a vapore.

La forza elastica o tensione di una sostanza qualunque non dipendendo unicamente dal suo volume, ma ancora dalla sua massa e dal suo calorico attuale, e la curva dell' energia non stabilendo che una relazione fra la tensione e il volume, la stessa curva d' energia può competere a quella qualunque sostanza che più ci piaccia di scegliere, purchè possa assumere i medesimi volumi, ed è per conseguenza indipendente dalla natura della sostanza operante: un medesimo diagramma può aversi da un indicatore sia che operi il vapore dell'acqua, sia che lavori l' aria riscaldata od altro.

11. Se l' ostacolo esterno contro cui si esercita la tensione di una sostanza qualunque può cedere all' azione di detta forza, allora si effettuerà un certo lavoro dinamico, e per l' intermezzo della sostanza una parte del calorico o comunicato alla sostanza o posseduto dalla sostanza stessa si convertirà in lavoro esterno. Per fissar meglio le idee noi supporremo che l' ostacolo esterno sia una pressione uniformemente distribuita sopra tutta la superficie della sostanza operante, ed eguale in ogni suo punto ed in ogni istante alla tensione della sostanza stessa: se allora diciamo p la pressione esterna vinta dalla sostanza operante, o la tensione della sostanza stessa, quando il suo volume è v, e se immaginiamo che la sostanza passi dal volume v_0 al volume v_1 sarà:

$$\int_{v_0}^{v_1} p\,dv$$

il lavoro dinamico esterno compiuto dalla sostanza durante questo passaggio dal volume v_0 al volume v_1; e per la fatta supposizione, se è $Oa = v_0$; $Oc = v_1$ (fig. 1.ª) e se ABC rappresenta la curva dell' energia, che nel nostro caso rappresenta anche la legge con cui varia l' esterna pressione al variar del volume, un tale lavoro sarà rappresentato geometricamente dall' area $aACc$ compresa fra la curva dell' energia, l' asse x, e le due ordinate corrispondenti ai volumi originario e finale della sostanza.

L' area $aACc$ che in tal caso rappresenta il lavoro esterno, moltiplicata per A (§ 3), rappresenta pure la quantità di forza viva calefacente che per l' intermezzo della sostanza stessa si è convertita in lavoro esterno, e gli è per conseguenza proporzionale.

Nel caso ora supposto la curva dell' energia è anche la curva del lavoro esterno, o la curva della conversione della forza viva calefacente in esterno lavoro.

12. Potrebbe succedere che lo sforzo che gli ostacoli esterni oppongono al dilatarsi della sostanza operante fosse minore della tensione o forza elastica della sostanza stessa; allora non tutto il lavoro rappresentato dalla predetta area della curva dell' energia è il lavoro esterno effettivamente compiuto; una parte rappresenta invece il lavoro esterno disponibile, il quale o resta negli ostacoli esterni sotto forma di forza viva ordinaria, od anche nella stessa sostanza operante e sotto la stessa forma di forza viva ordinaria nella velocità che acquistano le varie molecole della sostanza medesima. Quest' ultima parte, nell' estinguersi della velocità delle molecole pel reciproco attrito, viene poi riconvertita in calorico e restituita sotto questa forma nella stessa sostanza; così, per esempio, se si pongano in comunicazione due vasi l' uno vuoto l' altro ripieno d' aria a data temperatura e tensione, e si lasci precipitare liberamente l' aria da questo nel primo tutto il calorico speso nell' imprimere alle molecole d' aria la forza viva di cui sono dottate durante il loro movimento viene restituito per l' attrito nell' estinguersi della detta forza viva; motivo per cui la temperatura finale non riesce infine sbassata se non di quella minima parte che corrisponde all' interno lavoro, che in questo caso è pressochè insensibile, come infatti è comprovato dall' esperienza. (Veggasi Joule = *On the changes of Temperature produced by the Rarefaction and Condensation of Air.* — Philosophical Magazine — third Series — Vol. 26, N.° 174.)

13. Se una sostanza qualunque in un suo determinato stato di volume, di calorico attuale e di tensione venga sottratta da ogni comunicazione con altri corpi dai quali possa ricevere o verso cui possa emettere calorico, e che perciò i lavori esterno ed interno sviluppati per la sua dilatazione sieno unicamente dovuti alla trasformazione del suo calorico attuale in lavoro, e venga contrapposta sempre una pressione esterna eguale in ogni istante alla sua forza elastica, allora la corrispondente curva dell' energia, ossia la curva che rappresenta la legge che in tal condizione lega il volume alla tensione sarà da noi chiamata *curva di nessuna trasmissione.*

Se invece la detta sostanza sia posta in comunicazione con un' idonea sorgente calorifica, e si lasci espandere contrapponendovi sempre una pressione eguale alla sua forza elastica, e riceva dalla sorgente unicamente tanto calorico quanto viene convertito nel lavoro interno e nel lavoro esterno, cosicchè il suo calorico attuale rimanga costante, allora la curva che lega la forza elastica della sostanza al corrispondente volume, ossia la curva dell' energia corrispondente a

questo caso sarà da noi distinta colla denominazione di *curva di egual calorico attuale,* od anche *curva isotermica.*

Per le condizioni poste è facile lo scorgere che tanto le curve di nessuna trasmissione quanto le curve isotermiche dipendono dalla natura della sostanza, e che possono variare non solo nelle costanti, ma anche di natura col variare della sostanza medesima.

14. Pel § 8 e per quanto ci insegna l' esperienza la tensione di una sostanza qualunque diminuisce successivamente a mano a mano che aumenta il suo volume senza che muti il calorico attuale così da diventare piccolissima e insensibile per un corrispondente volume, ch' è grande per alcuni corpi e piccolo per altri. Discende da ciò che le curve di egual calorico attuale si stringono tutte all' asse delle x come ad assintoto col quale convergono più o meno rapidamente secondo la varia natura della sostanza.

Anche le curve di nessuna trasmissione si stringono assintoticamente all' asse delle x. Infatti a mano a mano che aumenta il volume, il lavoro interno ed il lavoro esterno vanno insieme crescendo, e quindi va successivamente diminuendo la quantità di calorico attuale contenuto nella sostanza, il quale sarà ormai diventato piccolissimo per x abbastanza grande; e siccome al diminuire del calorico attuale diminuisce la tensione della sostanza, la quale diminuisce ancora per l' aumentare del volume, così essa si farà piccolissima per x grande e convergerà verso zero all' aumentare indefinito della x.

È anche facile lo scorgere che le curve di nessuna trasmissione devono convergere verso l' asse delle x assai più celeremente delle curve isotermiche.

15. Sotto l' aspetto dell' uso che si può fare delle varie sostanze a trasmettere l' azione del calorico, o meglio a convertire il calorico in lavoro, le sostanze devonsi distinguere in *omogenee* ed in *eterogenee:* si devono considerare *omogenee* le sostanze quando tutte le minime parti in cui possono essere suddivise hanno tutte egual peso specifico, eguali capacità calorifiche, ossia quando sieno tutte tali che agendo sopra ciascuna un' eguale quantità di calorico produca eguali effetti. Tali sarebbero un qualunque gas, il perfetto miscuglio di due o più gas come l' aria atmosferica; un miscuglio d' aria e vapore d' acqua; di vapore d'acqua e di minime goccie d' acqua liquida purchè queste sieno egualmente disseminate per tutta la massa del vapore, ecc., ecc. Sono da considerarsi come *eterogenee* le sostanze quando risultano dall' unione di varii ingredienti ognuno dei quali occupa uno spazio di sensibile grandezza, e per ognuno dei quali è differente il

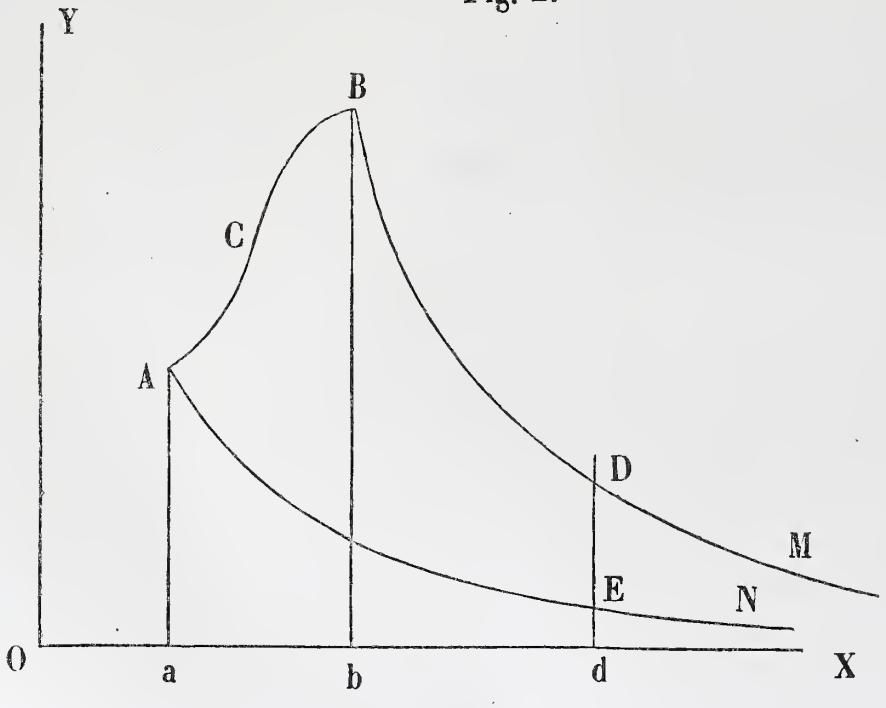
peso specifico, la capacità calorifica, ecc., tale sarebbe il caso, p. e., di acqua e vapore di acqua come si trovano nelle caldaje di una macchina a vapore, ecc.

CAPITOLO II.

Teoremi fondamentali relativi alle sostanze omogenee.

16. *Teorema I.* Se una sostanza omogenea qualunque mediante l' azione di una certa quantità di calorico passa da una data condizione di volume e forza elastica, ad un' altra condizione pur data, il calorico assorbito della sostanza è proporzionale all' area compresa fra la corrispondente curva dell' energia e le curve di nessuna trasmissione passanti pei punti estremi della curva dell'energia ed estese all' infinito.

Fig. 2.ª



Sia *ACB* (fig. 2.ª) la curva dell' energia mentre la sostanza passa dalla sua condizione corrispondente al punto *A* a quella che corrisponde al punto *B* mediante l' assorbimento di calorico da una sorgente variabile con cui venga posta in comunicazione, e sieno *AEN*, *BDM* le due linee di nessuna trasmissione passanti pei punti estremi *A* e *B* della curva dell'energia. La quantità di calorico assorbita

dalla sostanza, pel principio fondamentale, sarà proporzionale al lavoro esterno compiuto durante il suo passaggio dalla sua condizione originaria alla finale, più al lavoro interno, a cui poi si dovrà aggiungere quella parte di calorico che serve ad aumento del calorico attuale della sostanza, o sottrarvi quella che corrisponde alla diminuzione del suo calorico attuale, secondo che questa quantità riesce aumentata o diminuita. Si immagini che la sostanza passi pel ciclo delle operazioni seguenti: essendo *Oa* il suo volume originario ed *Aa* la sua originaria tensione, pongasi in comunicazione colla sorgente calorifica dalla quale assorbendo la necessaria quantità di calorico passi, pei varii stadii di volumi e tensioni segnati dalla curva dell'energia *ACB*, alla condizione corrispondente al punto *B*. Pervenuta al volume *Ob* ed alla tensione *Bb* si supponga tolta la sorgente calorifica e si lasci espandere la sostanza, contrapponendovi sempre una corrispondente pressione esterna, fino a che il suo volume è diventato p. e. *Od*; allora la sostanza si espanderà secondo la linea di nessuna trasmissione *BD* passante per *B*, e non si avrà che trasformazione del calorico attuale in lavoro. Pervenuta la sostanza nella condizione corrispondente al punto *D*, mantenendo costante il volume, si ponga in comunicazione con uno scaricatore fino a che acquisti la tensione *dE* che corrisponde al punto *E* della curva di nessuna trasmissione passante per *A*, durante il quale ultimo stadio vi sarà sottrazione di calorico dalla sostanza. Ciò fatto si tolga la sostanza all'azione dello scaricatore e mediante un esterno lavoro si comprima fino a che il suo volume sia diventato il volume originario *Oa*, essa percorrerà la successione di volumi e tensioni corrispondenti alla curva di nessuna trasmissione *EA* passante per *A*, e giunta al volume *Oa* riprenderà la tensione primitiva *aA*, e siccome tutto è ricondotto nella condizione originaria, così avrà anche ripreso il calorico attuale che aveva all'origine, e si sarà annullato tutto il lavoro interno. Compiuto il precedente ciclo di operazioni, non essendo variato il calorico attuale ed essendosi annullato l'interno lavoro, tutto il calorico assorbito diminuito di quello che si è dovuto sottrarre per ridurre la tensione della sostanza operante dal valore *dD* al valore *dE* si sarà convertito soltanto in lavoro esterno, cioè nel lavoro esterno dovuto alla espansione meno quello speso nella compressione, il quale è rappresentato dalla differenza delle due aree *aACBDd* e *dEAa*, cioè dall'area

ACBDEA

la quale perciò sarà proporzionale alla differenza fra le due quantità di calorico

assorbito e scaricato nell' accennato ciclo di operazioni. Ora quanto più lontano si prenda il punto *D* e tanto più vicini saranno i punti *D* ed *E*, e quindi sarà tanto più piccola la quantità di calorico che dev' essere sottratta per passare dall' una all' altra delle due curve di nessuna trasmissione passanti per *B* e per *A*; se prenderemo quindi il punto *D* a distanza infinita, le due curve coincidendo, la quantità di calorico sottratta sarà nulla, e il calorico assorbito dalla sostanza sarà proporzionale all' area

NACBM

infinitamente prolungata, come si era proposto.

Se la sostanza fosse stata originariamente nella condizione corrispondente al punto *B* e, postala in comunicazione con uno scaricatore variabile, venisse mediante un lavoro esterno condotta, secondo il ciclo di volumi e tensioni corrispondenti alla curva dell' energia *BCA*, alla condizione ch' è rappresentata dal punto *A*, allora durante questo passaggio la sostanza scaricherebbe una quantità di calorico proporzionale egualmente all' area *NACBM*, e la dimostrazione si potrà condurre nella stessa maniera precedente.

L' area *NACBM* infinitamente prolungata, come proporzionale alla quantità di calorico assorbita o scaricata dalla sostanza nel suo passaggio pei varii stadii di volumi e tensioni corrispondenti alla curva d' energia *ACB*, potrà servire a rappresentare la quantità stessa, e per semplicità noi la diremo l' *equivalente* della quantità corrispondente di calorico, come l' area *aABb* è l' *equivalente* del lavoro esterno sviluppato.

17. *Corollario.* La differenza fra l' equivalente del calorico assorbito o scaricato da una sostanza durante il suo passaggio da una data condizione ad un' altra pur data e l' equivalente del lavoro esterno sviluppato dalla sostanza, o speso durante il passaggio medesimo è indipendente dalla natura della curva dell' energia, cioè dalla natura del processo seguito, e dipende solo dalle condizioni ai limiti e dalla natura delle curve di nessuna trasmissione spettanti alla sostanza operante.

Infatti l' equivalente del calorico assorbito essendo l' area *NACBM*, e quello del lavoro esterno l' area *aABb*, la detta differenza sarà

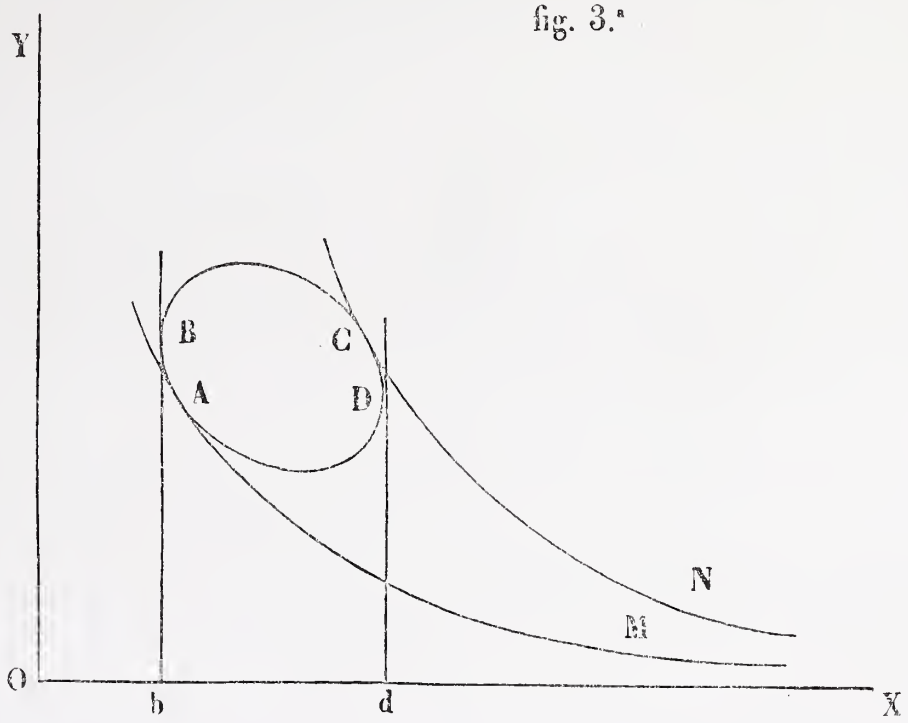
$$NACBM - aABb = bBM - aAN$$

la quale ultima espressione è indipendente dalla curva *ACB* e dipende solo dai due punti *A* e *B* e dalle due linee *AEN*, *BDM*.

18. *Teorema II.* Se una sostanza qualunque, mediante l'assorbimento di una certa quantità di calorico da una sorgente, e la successiva emissione di un'altra quantità di calorico in uno scaricatore, passa per varie condizioni così da riprendere al termine del processo lo stato di prima, l'equivalente del calorico effettivamente scomparso, ossia della differenza fra il calorico assorbito e il calorico scaricato, eguaglia l'equivalente del lavoro esterno compiuto; è indipendente dalla natura della sostanza; e dipende solo dalla natura della relativa curva dell'energia.

Questo teorema è un'immediata conseguenza del principio generale assunto, dappoichè tornando la sostanza operante nello stato originario, il suo calorico attuale torna quello di prima, e, a processo compiuto, è nullo l'interno lavoro. Può anche facilmente dedursi dal teorema precedente così:

fig. 3.ª



Sia *ABCD* la curva dell'energia; si conducano le due ordinate *bB* e *dD* tangenti alla curva stessa, oppure corrispondenti ai punti di massimo e minimo volume, e le due curve di nessuna trasmissione *AM*, *CN* tangenti esse pure alla

stessa curva, oppure la più bassa e la più alta fra tutte le dette curve corrispondenti ai varii punti della curva dell' energia. Nel passaggio dal volume *ob* al volume *od* secondo la curva dell' energia *BCD*, l' esterno lavoro sviluppato dalla sostanza sarà rappresentato dall' area *bBCDd*, e nella compressione da *d* in *b* secondo la curva *DAB* il lavoro esterno speso lo sarà dall' area *bBADd;* quindi il lavoro risultante sarà rappresentato dall' area *ABCD* racchiusa dall' intera curva dell' energia. D' altra parte durante il passaggio pel ramo *ABC* la sostanza assorbe dalla sorgente una quantità di calorico proporzionale all' area *MABCN* infinitamente estesa, e nel passaggio pel ramo *CDAB* versa nello scaricatore una quantità di calorico proporzionale all' area *MADCN* essa pure infinitamente estesa; il calorico dunque effettivamente scomparso sarà proporzionale alla differenza di queste due aree, ch'è appunto l' area *ABCD*, la quale rappresenta anche il lavoro esterno. Ora quest' area non dipende menomamente dalle due curve *AM*, *CN* di nessuna trasmissione, ma solo dalla curva dell' energia, la quale è indipendente (§ 10) dalla natura della sostanza operante, e dipende solo dalla legge che lega le tensioni della sostanza ai successivi volumi, legge che, come abbiamo veduto, può rendersi eguale per qualunque sostanza compartendo opportunamente alla sostanza stessa le necessarie quantità di calorico.

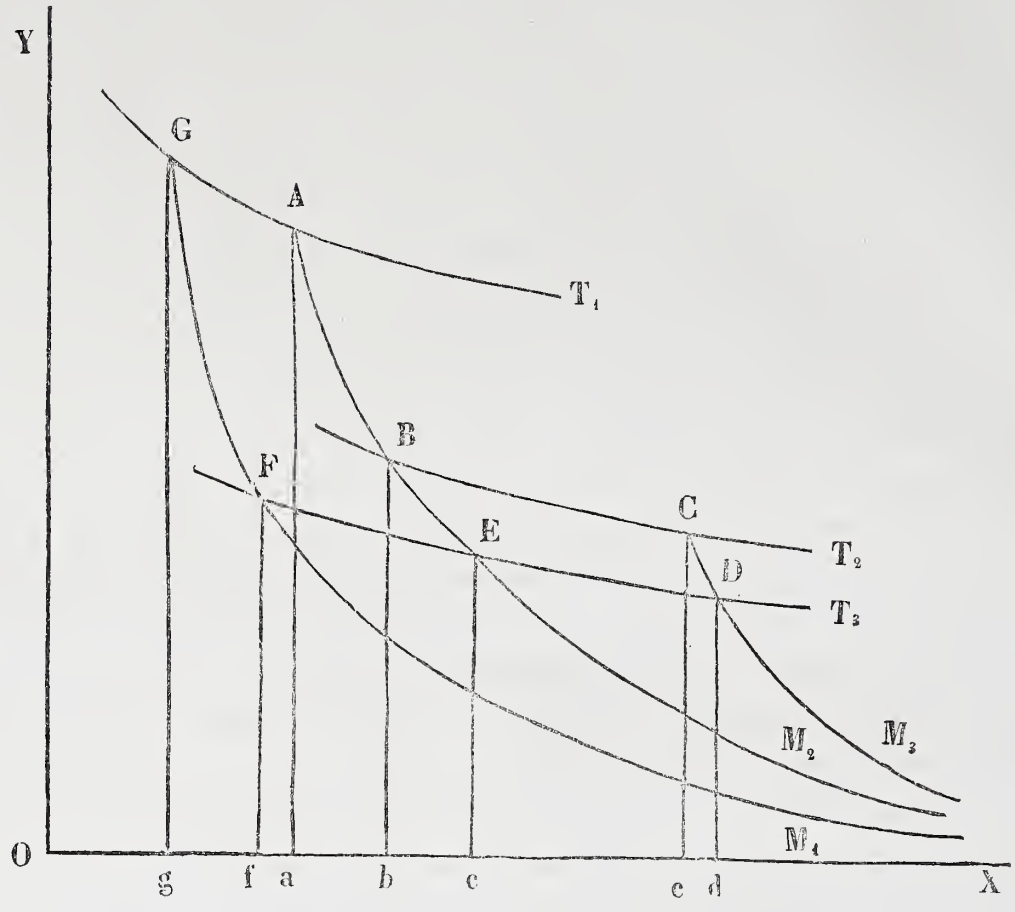
19. *Scolio.* Spesso la curva dell' energia è costituita da una linea spezzata formata da varii rami di linee di egual calorico attuale e di nessuna trasmissione, le quali tutte dipendendo dalla natura della sostanza operante potrebbe sorgere il dubbio che allora la natura della sostanza operante avesse un' influenza sulla quantità di calorico effettivamente scomparso, e convertito in lavoro esterno: ogni dubbio però scomparirà riflettendo solo che per un' altra sostanza quelle linee non saranno più linee di egual calorico attuale e di nessuna trasmissione, ma che nulla osta che anche la seconda sostanza passi per la stessa serie di tensioni e volumi corrispondenti alla data linea spezzata, ponendola successivamente in comunicazione con idonee sorgenti ed opportuni scaricatori.

20. Suppongasi che l' assorbimento del calorico da una sorgente durante l' espansione della sostanza operante, e l' emissione di calorico in uno scaricatore durante la compressione si facciano in modo che in ciascuna delle dette operazioni il calorico attuale della sostanza rimanga costante, locchè è realizzabile sempre portando ogni volta in contatto colla sostanza un' opportuna sorgente ed uno scaricatore ambedue di quelli che abbiamo detto permanenti: suppongasi che il passaggio da un calorico attuale ad un altro avvenga lasciando dilatare o

comprimendo la sostanza lungi da ogni esterna influenza termica, e quindi secondo linee di nessuna trasmissione: suppongasi finalmente di seguire un ciclo perfetto, cosicchè a operazione compiuta la sostanza operante riprenda la sua condizione originaria. In ciò fare la sostanza avrà dalle varie sorgenti assorbito delle quantità di calorico in particolari condizioni di calorico attuale della sostanza stessa, ed avrà scaricato negli scaricatori delle altre quantità di calorico in differenti condizioni del suo calorico attuale; sicchè a operazione compiuta vi sarà del calorico convertito in lavoro esterno sotto all' influenza di determinati calorici attuali della sostanza operante, e del calorico trasmesso dalle sorgenti per l' intermezzo della sostanza negli scaricatori pure sotto all' influenza di assegnati calorici attuali della sostanza medesima. Ora fra i calorici convertiti in lavoro esterno e i calorici trasmessi esistono sempre determinate relazioni, le quali dipendono unicamente dai calorici attuali sotto la cui influenza avvengono le dette trasformazioni e trasmissioni, dipendenze che per maggiore e più facile intelligenza noi ci proponiamo di rintracciare successivamente nei seguenti paragrafi.

21. Allo scopo di isolare completamente il calorico convertito in lavoro esterno del calorico trasmesso supponiamo che la conversione del calorico in lavoro esterno avvenga sotto l' influenza della continua presenza nella sostanza di un calorico attuale T_1, e che la trasmissione del calorico si debba fare da una sorgente atta a mantenere nella sostanza il calorico attuale T_2 in uno scaricatore che, posto in contatto colla sostanza, conservi ad essa il calorico attuale T_3. Sia oa fig. 4.ª il volume originario della sostanza operante, ed aA la sua tensione. La detta conversione si potrà ottenere direttamente nel modo il più semplice col processo seguente.

Fig. 4.ª



Sieno T_1, T_2, T_3 fig. 4.ª le linee isotermiche della sostanza operante corrispondenti ai calorici attuali T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3 linee di nessuna trasmissione della stessa sostanza. Tolta la sostanza all'azione di qualunque influenza termica esterna si lasci espandere fino a che il suo calorico attuale passi da T_1 a T_2 durante il quale passaggio la relazione fra la tensione e il volume della sostanza sarà data dall'arco *AB* della linea di nessuna trasmissione M_2 passante per *A*. Pervenuta la sostanza nella condizione corrispondente al punto *B* si ponga in comunicazione colla sorgente atta a mantenere costante il suo calorico attuale T_2 e si lasci espandere fino a che ha assorbito dalla sorgente stessa la quantità di calorico Q_2, essa si espanderà secondo la legge rappresentata dalla linea di egual calorico attuale T_2; suppongasi che per assorbire la detta quantità di calorico Q_2 si dilati fino ad acquistare il volume *Oc*. Pervenuta nella condizione corrispondente a *C* si torni a sottrarre all'azione di qualunque influenza termica

esterna, e si lasci espandere fino a che il suo calorico attuale diventa T_3, dilatandosi con ciò secondo la legge rappresentata dalla linea di nessuna trasmissione M_3 che passa per C fino al punto d corrispondente al punto D d'incontro delle due linee M_3 e T_3. Quando la sostanza ha raggiunto il volume Od e la corrispondente tensione dD si ponga in comunicazione collo scaricatore idoneo a mantenere nella sostanza stessa il calorico attuale T_3, e mediante un'azione esterna si comprima fino a che si scarica dalla sostanza nello scaricatore la quantità di calorico Q_2 ch'era stata prima assorbita: la sostanza si comprimerà secondo la legge rappresentata dalla linea T_3 e perverrà ad acquistare un volume Of minore di Oe, essendo E il punto d'incontro di T_3 con M_2, perchè per ipotesi, e pel teorema I, dev'essere M_2BCM_3 eguale a M_1FDM_3. Giunta la sostanza nella condizione corrispondente al punto F si tolga dall'azione di qualunque influenza termica esterna, e si continui a comprimere fino a che il suo calorico attuale diventi T_1, la legge rappresentante la relazione fra i corrispondenti volumi e tensioni sarà quella data dalla curva M_1 di nessuna trasmissione passante per F e la sostanza acquisterà il volume Og e la tensione gG corrispondenti al punto d'incontro delle due linee M_1 e T_1. Finalmente si ponga la sostanza operante in comunicazione colla sorgente atta a mantenergli invariato il calorico attuale T_1 e si lasci espandere fino a raggiungere la condizione iniziale in A; in quest'ultimo stadio assorbirà dalla sorgente una quantità di calorico Q_1 la quale sarà tutta convertita in lavoro esterno, perchè durante l'intero processo la sostanza ha assorbita la quantità di calorico Q_1+Q_2 ed ha scaricata la quantità Q_2.

22. Il processo precedentemente analizzato dimostra che, quando T_1, T_2 e T_3 sieno determinati, ad un dato valore Q_2 del calorico trasmesso corrisponde di necessità un determinato valore del calorico Q_1 convertito in lavoro esterno; imperocchè essendo assegnato Q_2 sarà determinata l'area M_2BCM_3, e quindi i punti C e D; e siccome D è dato e dev'essere l'area M_1FDM_3 eguale all'area M_2BCM_3, così, togliendo la parte comune M_2EDM_3, sarà l'area M_1FEM_2 eguale all'area $BCDE$, dal che riesce pienamente determinato il punto F, quindi la linea GFM_1, quindi il punto G e finalmente l'area M_1GAM_2, cioè la quantità di calorico Q_1 convertita in lavoro esterno. Un identico ragionamento mostrerà che quando sia dato Q_1 la quantità Q_2 sarà essa pure pienamente determinata.

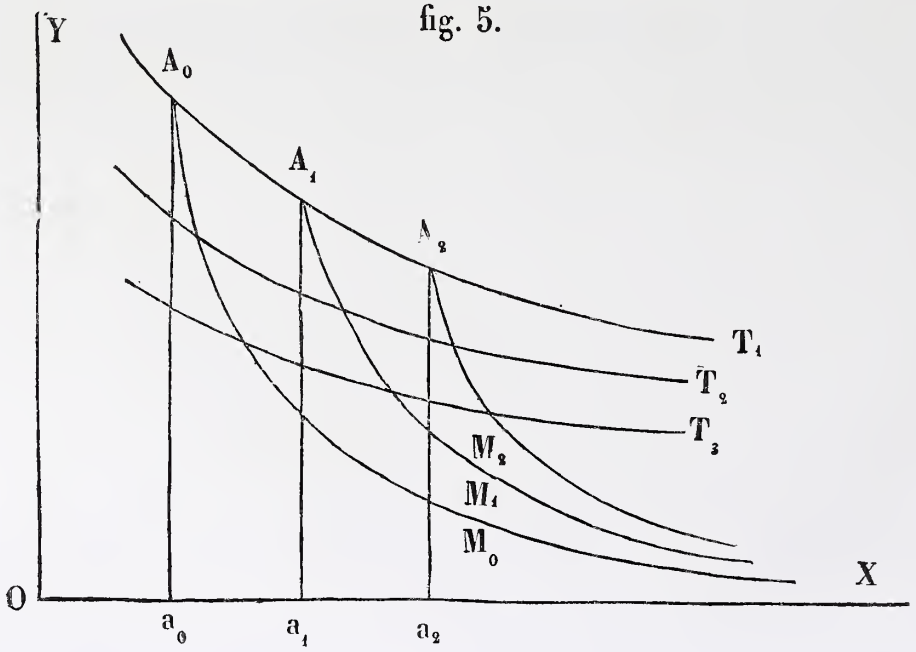
Egli è poi evidente che seguendo lo stesso processo in ordine inverso spenderemo un lavoro esterno equivalente alla quantità di calorico Q_1, che rimetteremo sotto questa forma nella sorgente calorifica cui corrisponde il calorico

attuale T_1, e faremo passare per l'intermezzo della sostanza una quantità di calorico Q_2 dallo scaricatore al calorico attuale T_3 nella sorgente calorifica che conserva nella sostanza il calorico attuale T_2.

23. Rimanendo i medesimi T_1, T_2, T_3 qualunque sia il processo che seguiremo, purchè la conversione avvenga a costante calorico attuale T_1 e la trasmissione sotto l'influenza della continua presenza di un calorico attuale T_2 durante l'ammissione, e di un calorico attuale T_3 durante lo scarico, sempre per convertire in lavoro esterno la quantità di calorico attuale Q_1, sarà mestieri trasmettere la quantità di calorico Q_2. Infatti siavi, se è possibile, un processo per cui convertendo in lavoro esterno la quantità di calorico Q_1 si trasmetta invece una quantità di calorico Q_3 maggiore per es. di Q_2; se ciò fosse, applicando prima questo processo in ordine diretto avremo convertito in lavoro esterno la quantità di calorico Q_1 e portato dalla seconda sorgente nello scaricatore la quantità di calorico Q_3; ciò fatto, se applicheremo il processo del paragrafo 21 in ordine inverso rimetteremo nella prima sorgente la quantità di calorico Q_1 spendendo per ciò il lavoro esterno dapprima ottenuto, e trasporteremo dallo scaricatore nella sorgente una quantità di calorico Q_2 minore di Q_3. Così continuando ad alternare i due processi potremo far passare dalla sorgente nello scaricatore, e inversamente se fosse $Q_3 < Q_2$, quanto calorico si vorrà senza nulla spendere, ottenendo un effetto senza causa locchè è assurdo.

È anche facile vedere che ciò ha luogo qualunque sia il volume originario da cui parte la sostanza per eseguire le dette trasformazioni.

fig. 5.



Infatti sieno, fig. 5.ª, T_1, T_2, T_3 le linee isotermiche della sostanza operante corrispondenti ai calorici attuali T_1, T_2, T_3 e sieno M_0, M_1, M_3 ec. linee di nessuna trasmissione tali che le aree $M_0A_0A_1M_1$, $M_1A_1A_2M_2$ ec., infinitamente estese sieno eguali fra loro. Sia Q_1 la quantità di calorico che la sostanza assorbe dalla sorgente espandendosi a calorico attuale T_1 da A_0 in A_1, e quindi da A_1 in A_2 ec., e sia oa_0 il volume originario della sostanza stessa. Facendo espandere la sostanza da A_0 in A_1 e poi seguendo il solito processo convertiremo in lavoro esterno la quantità di calorico Q_1 e ne trasmetteremo la quantità Q_2; e così pure sarà se il volume originario è invece oa_1 e si lasci espandere la sostanza da A_1 in A_2, imperocchè se in tal caso trasmettesse una quantità di calorico differente, applicandovi invece il processo del paragrafo 21, nel qual caso la conversione del calorico in lavoro esterno si effettuerebbe durante l'espansione da A_0 in A_1, in ordine inverso si cadrebbe nella stessa conseguenza d'un effetto senza causa. Egualmente si proverebbe pel volume oa_2 ec.

24. A primo aspetto potrebbe parere che nei precedenti processi sulla quantità di calorico Q_2 dovesse avere un'influenza anche la natura della sostanza operante, pure a dimostrare che ciò non ha luogo basterà osservare che restando i medesimi i calorici attuali T_1, T_2 e T_3 possiamo usare delle stesse sorgenti e del medesimo scaricatore a mantenere costanti i detti calorici in qualunque sostanza, e allora se usando di una certa sostanza mediante un processo diretto di conversione si trasporta dalla seconda sorgente nello scaricatore una quantità di calorico Q_2, e se usando invece di un'altra sostanza se ne trasportasse una quantità Q_3 maggiore o minore di Q_2, applicando i detti processi in ordine inverso alternativamente sopra le due sostanze, potressimo trasportare indefinitamente calorico dalla sorgente nello scaricatore o inversamente senza nulla spendere locchè è assurdo. Dunque ec.

Da quanto abbiamo minutamente discusso nei numeri precedenti risulta il *Teorema III.* In un ciclo completo di conversione qualunque nel quale l'espansione e la compressione avvengono secondo linee di egual calorico attuale e di nessuna trasmissione, per convertire in lavoro esterno una data quantità di calorico Q_1 sotto all'influenza della continua presenza nella sostanza operante di un calorico attuale T_1, facendo per l'intermezzo della sostanza stessa passare il calorico da una sorgente in uno scaricatore sotto all'influenza della continua presenza di un calorico attuale T_2 durante l'ammissione, e T_3 durante lo scarico, è necessario far sempre passare una quantità di calorico determinata, la quale

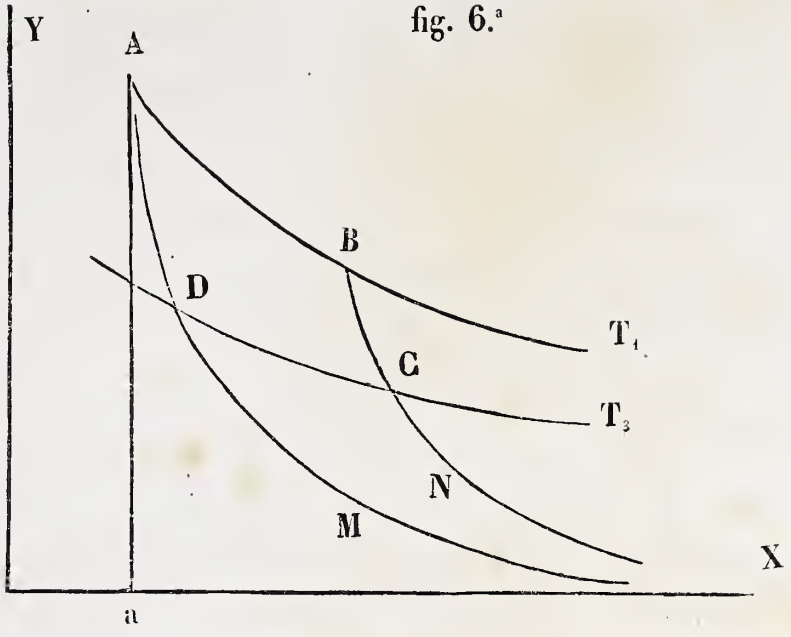
dipende unicamente dalla quantità di calorico Q_1 convertita in lavoro esterno, e dai calorici attuali T_1, T_2 e T_3 sotto della cui influenza avvengono la conversione del calorico in lavoro, e la trasmissione del calorico dalla sorgente nello scaricatore.

25. *Teorema IV.* Applicando il processo del precedente teorema, quando i calorici attuali T_1, T_2 e T_3 non mutino, Q_2 ha con Q_1 un rapporto costante, rapporto che dipende unicamente dai valori di T_1, T_2 e T_3.

Supponiamo infatti, se è possibile, che siavi un processo, o un'altra sostanza, per cui convertendo in lavoro esterno la quantità di calorico $2Q_1$ si trasmetta una quantità di calorico Q_3 maggiore o minore di $2Q_2$. Applicando in maniera diretta il processo per cui si converte in lavoro esterno la quantità di calorico Q_1 trasmettendo la quantità Q_2 due volte avremo ottenuto un lavoro esterno $2Q_1$ e portato dalla sorgente nello scaricatore una quantità di calorico $2Q_2$: ciò fatto si applichi in maniera inversa il secondo processo, allora spenderemo il lavoro $2Q_1$ ottenuto dalla replicata applicazione del primo processo, e trasporteremo dallo scaricatore nella sorgente la quantità di calorico Q_3. Se dunque non è Q_3 eguale a $2Q_2$ o resterà nel recipiente del calorico portatovi nel primo processo, o ne avremo rimesso nella sorgente di più di quello che vi abbiamo prima sottratto, e quindi continuando indefinitamente l'applicazione dei due processi alternativamente, potremo senza nulla spendere portare quanto calorico si voglia o dallo scaricatore nella sorgente, o da questa in quello locchè è assurdo. Dunque ec.

26. *Corollario I.* Il rapporto fra il calorico assorbito e il calorico trasmesso da una sostanza qualunque, quando l'espansione e la compressione avvengano a calorico attuale costante e per linee di nessuna trasmissione, dipende unicamente dal valore dei calorici attuali sotto la cui presenza avvengono l'espansione e la compressione.

fig. 6.ª



Sieno fig. 6.ª oa, aA il volume e la tensione della sostanza operante; T_1 e T_3 le linee di egual calorico attuale corrispondenti all' espansione ed alla contrazione della detta sostanza; M ed N le due linee di nessuna trasmissione passanti per A e per B. Posta la sostanza in presenza di un'opportuna sorgente si lasci espandere a calorico attuale T_1 da A in B, e assorba in ciò fare dalla sorgente stessa una quantità di calorico Q_1+Q_2. Giunta in B si tolga all' azione di qualunque influenza termica esterna, e si lasci espandere fino a che il suo calorico attuale diventa T_3, locchè avverrà secondo la legge rappresentata dalla linea di nessuna trasmissione BN. Pervenuta nella condizione corrispondente al punto C si ponga in presenza di un idoneo scaricatore e si comprima a costante calorico attuale T_3 fino in D in cui la curva T_3 incontra la M, e durante la compressione si scarichi dalla sostanza nello scaricatore la quantità di calorico Q_2. Finalmente pervenuta nella condizione corrispondente a D si sottragga da qualunque azione termica esterna e si continui a comprimere fino a che riprenda in A la condizione di prima.

La sostanza operante avrà assorbita la quantità di calorico Q_1+Q_2 e avrà trasmessa la quantità Q_2; ora pel teorema è

$$Q_1 = K.Q_2$$

essendo K una funzione soltanto di T_1 e T_3, e quindi sarà pure

$$Q_1 + Q_2 = (K+1)\, Q_2$$

donde

$$\frac{Q_1+Q_2}{Q_2} = K+1 \ ;$$

ma K è solo funzione di T_1 e T_3 e tale sarà pure $K+1$, dunque ec.

Corollario II. Essendo f ed F due funzioni differenti sarà

$$Q_1 = Q_2 . f(T_1) . F(T_2, T_3).$$

Infatti pel teorema dimostrato è

$$Q_1 = Q_2 \varphi (T_1, T_2, T_3)$$

e immaginando che Q_2, T_2 e T_3 restino i medesimi, e che Q_1 e T_1 diventino Q'_1 e T'_1 sarà

$$Q'_1 = Q_2 \varphi (T'_1, T_2, T_3)$$

e quindi

$$\frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{\varphi (T_1, T_2, T_3)}{\varphi (T'_1, T_2, T_3)}$$

e siccome Q_1 e Q'_1 rappresentano le quantità di calorico assorbite dalla sostanza espandendosi a calorico attuale costante fra le stesse due linee di nessuna trasmissione, così pel corollario precedente il loro rapporto non può essere che funzione di T_1 e T'_1, quindi nel secondo membro dell'equazione superiore devono sparire le quantità T_2 e T_3, pel che è necessario che sia

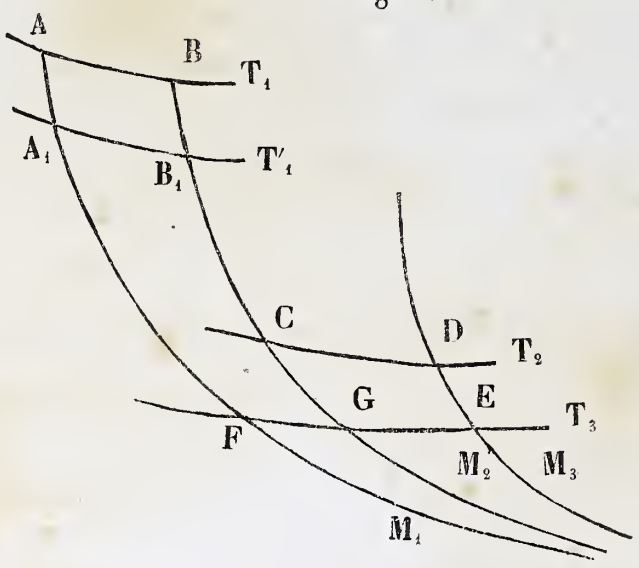
$$\varphi (T_1, T_2, T_3) = f(T_1) . F(T_2, T_3)$$

donde

$$Q_1 = Q_2 . f(T_1) . F(T_2, T_3).$$

27. *Problema I.* Assegnare la relazione che esiste fra le funzioni f ed F.

fig. 7.ª



Sieno M_1, M_2, M_3 fig. 7.ª tre linee di nessuna trasmissione; T_1, T'_1, T_2, T_3 linee di egual calorico attuale di una sostanza qualunque, e sia l'area M_1FGM_2 infinitamente prolungata eguale all'area $CDEG$: sieno di più Q_1, Q'_1 e Q_2 le quantità di calorico assorbite dalla sostanza operante espandendosi sotto la presenza dei calorici attuali T_1, T'_1, T_2 da A in B, da A_1 in B_1 e da C in

D; per semplicità di linguaggio indicheremo le espansioni e le contrazioni lungo le rispettive linee per indicare le condizioni sotto alle quali esse si eseguiscono. Lasciando espandere la sostanza da A in B, da B in C, da C in D e da D in E, e poi comprimendola da E in F e da F in A convertiremo in lavoro esterno una quantità di calorico Q_1 preso dalla sorgente T_1 e trasporteremo una quantità di calorico Q_2 dalla sorgente T_2 nello scaricatore T_3. Ciò fatto se lasciamo espandere la sostanza da A in F e da F in E, e quindi la comprimiamo da E in D, da D in C, da C in B_1, da B_1 in A_1 e da A_1 in A, metteremo nella sorgente T'_1 una quantità di calorico Q'_1 e leveremo dallo scaricatore T_3 la quantità di calorico Q_2 messavi col primo processo rimettendola nella sorgente T_2. In ultima analisi avremo una quantità di calorico Q_1 cavata dalla sorgente T_1 ed una quantità di calorico Q'_1 versata nella sorgente T'_1 con un avanzo di lavoro esterno corrispondente alla differenza $Q_1 - Q'_1$; sarà dunque il medesimo come se si fosse lasciata espandere la sostanza da A in B, da B in B_1 e poi si fosse compressa da B_1 in A_1, e da A_1 in A. Ora per quanto si è dimostrato precedentemente sarà:

$$Q_1 = Q_2 f(T_1) . F(T_2, T_3)$$

$$Q'_1 = Q_2 f(T'_1) . F(T_2, T_3)$$

$$Q_1 - Q'_1 = Q'_1 f(T_1) . F(T_1, T'_1)$$

delle quali equazioni si ha tosto

$$F(T_2, T_3) \{ f(T_1) - f(T'_1) \} = f(T_1) . f(T'_1) F(T_1, T'_1) . F(T_2, T_3)$$

donde

$$F(T_1, T'_1) = \frac{f(T_1) - f(T'_1)}{f(T_1) f(T'_1)} .$$

28. *Corollario.* Per la precedente si ha tosto

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f(T_1) \{ f(T_2) - f(T_3) \}}{f(T_2) f(T_3)} .$$

Se di più si suppone che il calorico attuale della compressione sia eguale a quello della espansione, e diciamo Q_1 il calorico totale assorbito dalla sostanza quando essa si espande fra due date linee di nessuna trasmissione sotto l'influenza della continua presenza di un calorico attuale T_1, e Q_2, la quantità di calorico che assorbe espandendosi fra le stesse due linee di nessuna trasmissione ma sotto l'influenza della continua presenza del calorico attuale T_2, sarà

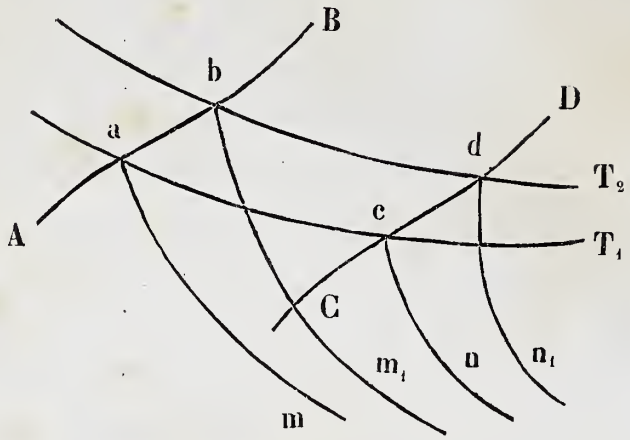
$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{f(T_1) - f(T_2)}{f(T_2)}$$

da cui

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f(T_1)}{f(T_2)}.$$

29. Due linee AB, CD, fig. 8.ª, tali che la sostanza operante passando da una linea di egual calorico attuale T_1 qualunque ad un' altra pure di egual calorico attuale T_2 infinitamente vicina lungo le curve stesse assorba o scarichi eguali quantità di calorico si dicono *linee di egual trasmissione*. Se dunque nei punti a e b, c e d in cui le dette linee sono tagliate dalle due linee isotermiche T_1 e T_2 infinitamente vicine si conducano le rispettive curve di nessuna trasmissione m, m_1; n, n_1 le due aree $mabm_1$, $ncdn_1$ infinitamente prolungate saranno eguali fra loro.

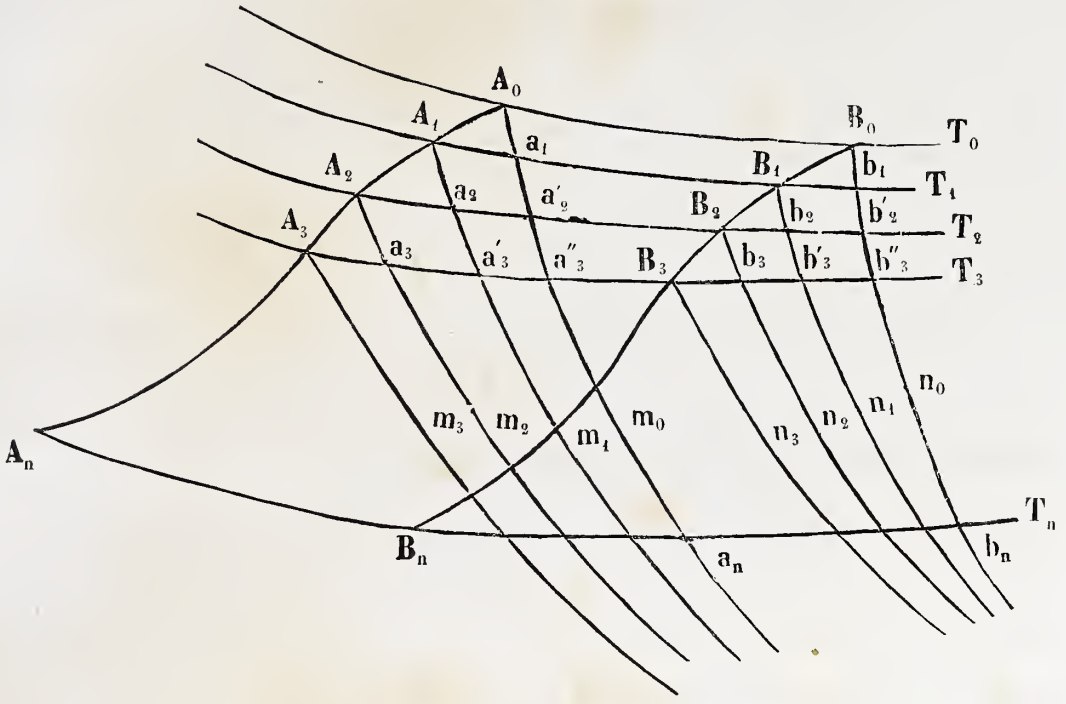
fig. 8.ª



Ciò premesso

Teorema V. Se si abbiano due linee di egual trasmissione e due linee di nessuna trasmissione passanti per due eguali punti di una linea isotermica qualunque, e le dette linee si taglino con una seconda linea isotermica qualunque, le quantità di calorico assorbite o scaricate dalla sostanza, espandendosi o contraendosi a quel calorico attuale costante che corrisponde alla linea isotermica secante fra le due curve di nessuna trasmissione e fra le due di egual trasmissione, sono eguali fra loro.

fig. 9.ª



Infatti sieno, fig. 9.ª, $A_o A_n \quad B_o B_n$ due linee di egual trasmissione, e $A_o m_o$, $B_o n_o$ due linee di nessuna trasmissione passanti pei punti A_o e B_o della linea isotermica T_o; si conducano le linee isotermiche T_1, T_2, T_3 ec. infinitamente vicine, e sia T_n la secante generica; finalmente pei punti in cui le dette linee tagliano le date linee di egual trasmissione si guidino le corrispondenti linee di nessuna trasmissione m_o, m_1, m_2, ec.; n_0, n_1, n_2 ec. Per quanto abbiam detto sarà:

$$\text{area } m_1 A_1 A_0 m_0 = \text{area } n_1 B_1 B_0 n_0$$

e, per essere infinitesime di second'ordine le aree $A_1 a_1 A_0$; $B_1 b_1 B_0$, anche

$$\text{area } m_1 A_1 a_1 m_0 = \text{area } n_1 B_1 b_1 n_0$$

a cui aggiungendo la parte comune $m_0 a_1 B_1 n_1$ sarà

$$\text{area } m_1 A_1 B_1 n_1 = \text{area } m_0 a_1 b_1 n_0.$$

Così pure si dimostrerà

$$\text{area } m_2 A_2 B_2 n_2 = \text{area } m_1 a_2 b_2 n_1$$

ma pel § 18 è

$$\frac{\text{area } m_1 A_1 B_1 n_1}{\text{area } m_1 a_2 b_2 n_1} = \frac{f(T_1)}{f(T_2)} \quad \text{e} \quad \frac{\text{area } m_0 a_1 b_1 n_0}{\text{area } m_1 a'_2 b'_2 n_0} = \frac{f(T_1)}{f(T_2)};$$

dunque i detti due rapporti sono eguali, ed essendo eguali i numeratori, tali saranno anche i denominatori, e quindi sarà

$$\text{area } m_2 A_2 B_2 n_2 = \text{area } m_0 a'_2 b'_2 n_0$$

ecc.

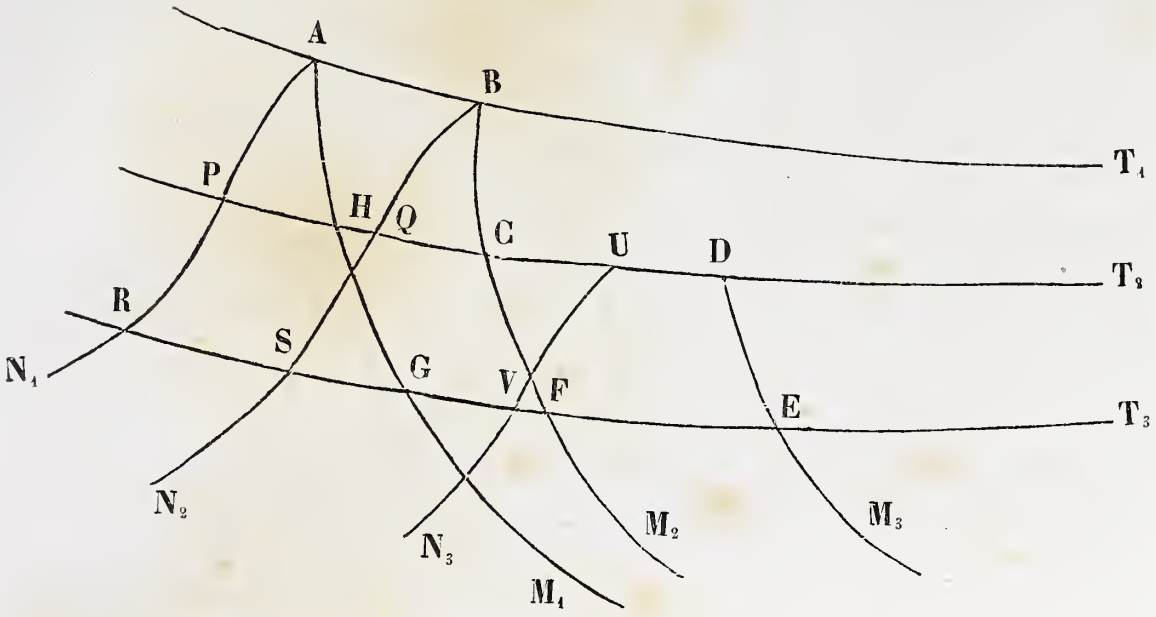
Risulta dunque che le quantità di calorico che la sostanza assorbe o scarica passando da A_1 in B_1 e da a_1 in b_1 sono eguali, e così quelle che assorbe o scarica passando da A_2 in B_2 e da a'_2 in b'_2; da A_3 in B_3 e da a''_3 in b''_3 ec. rispettivamente; quindi rispettivamente anche eguali le aree

$$A_0 B_0 B_1 A_1 \text{ e } A_0 B_0 b_1 a_1; \quad A_1 B_1 B_2 A_2 \text{ e } a_1 b_1 b'_2 a'_2; \quad A_2 B_2 B_3 A_3 \text{ e } a'_2 b'_2 b''_3 a''_3 \text{ ec.}$$

che rappresentano il lavoro esterno sviluppato dalla sostanza mediante il processo rappresentato graficamente dalle aree medesime, attesochè se nel passaggio per le curve di nessuna trasmissione la sostanza non assorbe nè scarica calorico, nel passaggio per le curve di egual trasmissione tanto ne scarica quanto ne assorbe. Finalmente l'area $A_o B_o B_n A_n$ eguaglierà l'area $A_o B_o b_n a_n$ perchè ambedue risultanti da un egual numero di aree rispettivamente eguali; quindi tanto calorico assorbirà o scaricherà la sostanza passando da A_n in B_n quanto ne assorbe o ne scarica passando da a_n in b_n; dunque ec.

30. *Corollario.* Quanto si è dimostrato aver luogo quando per passare da un calorico attuale ad un altro si lascia espandere o si comprime la sostanza secondo linee di nessuna trasmissione, ha luogo ancora quando per operare questo passaggio si fa espandere o si comprime la sostanza secondo linee di egual trasmissione.

fig. 10.ª



Infatti rappresenti (fig. 10) *ABCDEFGA* il processo seguìto per convertire in lavoro esterno la quantità di calorico Q_1 assorbita dalla sostanza operante nel passaggio da *A* in *B* avendo trasmessa la quantità di calorico Q_2 assorbita nel passaggio da *C* in *D* e scaricata nel passaggio da *E* in *G*, essendosi operato il passaggio da un calorico attuale ad un altro secondo le linee di nessuna trasmissione M_1, M_2, M_3; e sieno N_1, N_2, N_3 tre linee di egual trasmissione passanti per *A* e *B*, e pel punto *U* così determinato che il calorico assorbito nell' espansione da *Q* in *U* sia eguale a quello assorbito durante l'espansione da *C* in *D*. Per quanto si è dimostrato superiormente sarà

$$\text{area } APQB = \text{area } ABHC$$

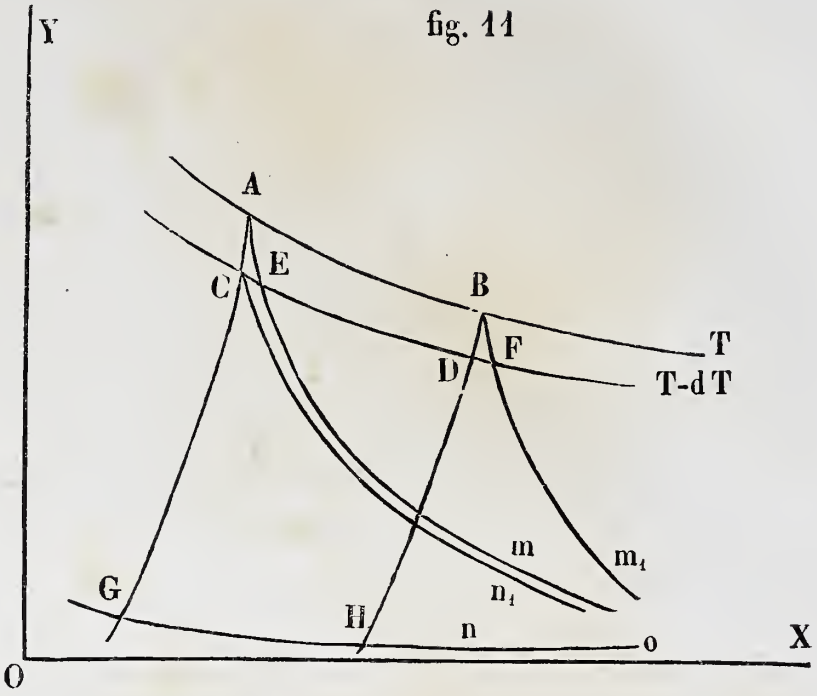
$$\text{area } ARSB = \text{area } AGFB$$

$$\text{area } QUSVU = \text{area } CFDE\ ;$$

dunque da *V* in *R* scarica tanto calorico quanto ne scarica da *E* in *G*; dunque ec.

§ 31. *Problema II.* Assegnare la forma della funzione *f*.

fig. 11



Mediante l'impiego di un'esterna energia e il consumo di un lavoro esterno eguale al lavoro interno della sostanza operante è possibile sempre supporre realizzata una curva di energia tale che la sostanza operante nel passare dalla curva isotermica corrispondente al calorico attuale T alla curva di egual calorico attuale $T+dT$ infinitamente vicina assorba dalla sorgente calorifica unicamente la quantità di calorico dT che va ad aumentare il suo calorico attuale. Sia AG fig. 11 una curva di energia così determinata; sieno AB, CF due curve isotermiche infinitamente vicine, a cui competano i calorici attuali T e $T—dT$; sia Gn la linea di zero calorico attuale, la quale è linea isotermica e linea di nessuna trasmissione insieme, e che si confonderebbe coll'asse x se per $T = o$ fosse pur zero la tensione della sostanza; sieno finalmente A, C, G i punti in cui le dette curve sono tagliate dalla AG. Pei punti A e C si conducano le linee di nessuna trasmissione Am, Cn_1, e per ciò che si è assunto sarà l'area n_1CAm equivalente al calorico dT. Si determini sulla AT un punto B tale che condotta per B la curva BH di egual trasmissione della AG sia l'area $ABDC$ eguale all'area n_1CAm, e si conduca per B la linea di nessuna trasmissione Bm_1.

Essendo AH e BH linee di egual trasmissione, Am e Bm_1 linee di nessuna trasmissione aventi colle prime comuni i punti A e B della linea isotermica AB, per quanto si è sopra dimostrato sarà

$$\text{area } ABFE = \text{area } ABCD = \text{area } n_1CAm;$$

e quindi se diciamo Q_1 la quantità di calorico assorbita dalla sostanza nel pas-

saggio da A in B lungo la linea isotermica AB e Q_2 quella che scarica passando da F in E lungo la seconda linea isotermica FC sarà

$$Q_1 - Q_2 = dT.$$

Di più essendo AB, GH linee isotermiche, sarà ancora

area $ABGH$ = area $mABm_1$ infinitamente prolungata;

ma l'area $ABGH$ è eguale alla somma di tutte le aree elementari $ABCD$ da $T=0$ fino a T, ed è quindi equivalente a T; e l'area $MBAM_1$ è equivalente a Q_1, per cui sarà

$$Q_1 = T;$$

dunque pel caso rappresentato dal processo $ABFE$ sarà

$$Q_1 = T \text{ e } Q_2 = T - dT,$$

quindi in tal caso

$$\frac{dT}{T} = \frac{f(T) - f(T - dT)}{f(T)} = \frac{f'(T)\,dT}{f(T)},$$

donde integrando

$$f(T) = K \cdot T$$

essendo K una costante arbitraria.

32. Per la forma ora assegnata della funzione f sarà

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

ossia anche

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

quindi

Corollario I. Quando una sostanza qualunque si espanda o si comprima fra due linee di nessuna o di egual trasmissione sotto l'influenza della continua presenza di calorici attuali differenti, le quantità di calorico assorbite o scaricate stanno fra loro nel rapporto dei calorici attuali.

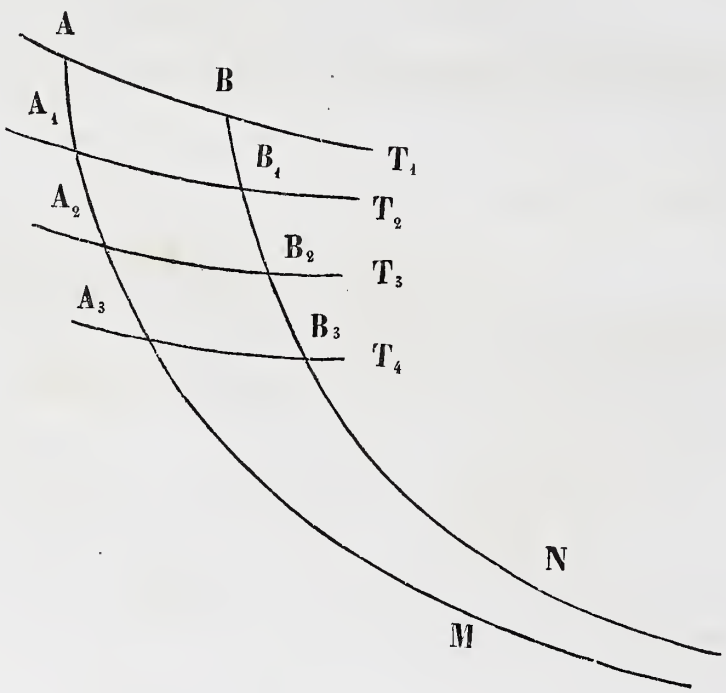
Corollario II. Quando si converte calorico in lavoro mediante l'espansione e la successiva compressione di una sostanza fra due linee di eguale o di nessuna trasmissione, a calorico attuale costante tanto della espansione quanto della compressione, ma differenti fra loro, il calorico convertito in lavoro sta al calorico trasmesso come la differenza dei calorici attuali corrispondenti alla espan-

sione ed alla compressione sta al calorico attuale sotto la cui presenza avviene la compressione.

Oppure anche, nel caso istesso ora contemplato, sta il calorico convertito in lavoro a tutto il calorico assorbito come la differenza dei calorici attuali della espansione e della compressione sta al calorico attuale della espansione.

Vi ha dunque vantaggio a rendere il più possibilmente differenti i calorici attuali della espansione e della compressione, ed a diminuire quanto si può il calorico attuale della espansione.

fig. 12.ª



33. Se si considerano due linee di nessuna o di egual trasmissione AM, BN fig. 12 intersecate da una serie di curve isotermiche T_1, T_2, T_3 ec. e diciamo Q_1, Q_2, Q_3 ec. le quantità di calorico assorbite o scaricate dalla sostanza nel suo espandersi o costiparsi a calorico attuale costante fra le dette due linee di eguale o di nessuna trasmissione, per quello che si è ora dimostrato sarà

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{T_2}{T_3}, \quad \frac{Q_3}{Q_4} = \frac{T_3}{T_4} \text{ ec.} \quad ,$$

donde

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_3}{T_3} = \text{ec.} \quad ,$$

cioè

Corollario III. Quando le espansioni o le compressioni avvengano a calorico attuale costante fra due medesime linee di eguale o di nessuna trasmissione, il rapporto fra la quantità di calorico assorbito o scaricato e il calorico attuale della sostanza rimane costante.

Ne discende che, se i calorici attuali T_1, T_2, T_3 ec. differiscano di quantità costante, le aree dei quadrilateri formati dalle intersezioni delle due linee di eguale o di nessuna trasmissione colle linee isotermiche corrispondenti sono eguali fra loro. Infatti si ha

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad ; \quad Q_1 - Q_2 = \frac{Q_2}{T_2}(T_1 - T_2)$$

$$\frac{Q_2 - Q_3}{Q_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_3} \quad ; \quad Q_2 - Q_3 = \frac{Q_3}{T_3}(T_2 - T_3),$$

ec.

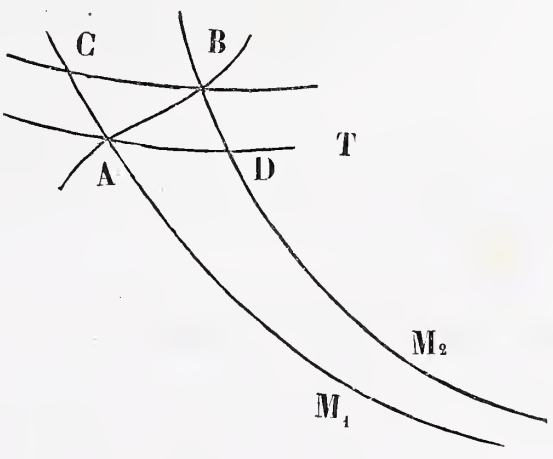
ma se è $T_1 - T_2 = T_2 - T_3 =$ ec., essendo $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_3}{T_3}$, ec. saranno eguali anche i primi membri delle precedenti equazioni, i quali sono equivalenti alle aree indicate, dunque ec.

34. *Scolio.* Se una sostanza qualunque si espande o si comprime seguendo una qualunque linea d'energia, e si dica dQ la quantità di calorico assorbita o scaricata della sostanza stessa nell'espandersi o comprimersi fra due linee di nessuna trasmissione infinitamente vicine, essendo T il calorico attuale della sostanza corrispondente al punto in cui la detta curva dell'energia taglia le curve di nessuna trasmissione, la quantità

$$\frac{dQ}{T}$$

è costante.

fig. 13.ª



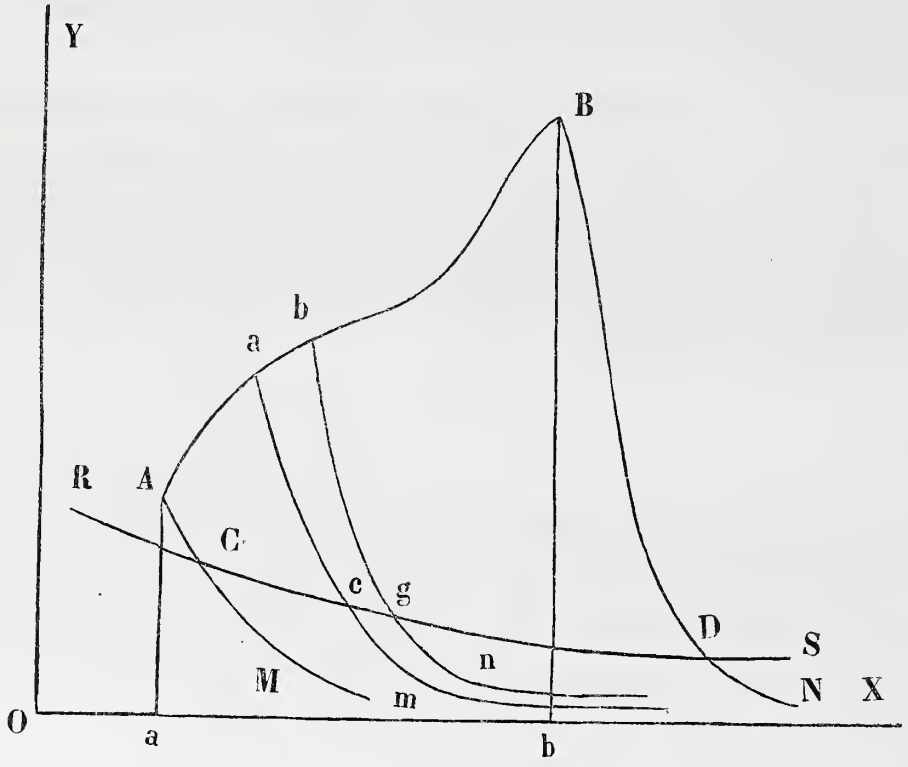
Infatti sieno M_1, M_2 fig. 13 le due curve di nessuna trasmissione infinitamente vicine, AB il tratto intercetto della curva d'energia; sia dQ la quantità di calorico assorbita nel passaggio da A in B e T il calorico attuale in A.

La quantità dQ sarà (Teorema I) equivalente all'area M_1ABM_2 infinitamente estesa, la quale non differisce dell'area M_1ADM_2 che dell'infinitesimo del second'ordine ADB, per cui essendo M_1ABM_2 infinitamente poco differente da M_1ADM_2, e quest'ultima essendo già un infinitesimo di prim'ordine, si potrà

prendere eguale a questa, e allora, per quanto si è dimostrato nel paragrafo precedente, sarà appunto $\frac{dQ}{T}$ costante.

Se la curva dell' energia fosse tangente ad una delle due curve di nessuna trasmissione, allora per quell' elemento infinitesimo è dQ zero, e quindi, a meno che non sia anche $T = 0$, sarà $\frac{dQ}{T} = 0$, al di là ritorna la proprietà superiore, e quindi ad estendere generalmente la stessa basterà prendere per T il calorico attuale corrispondente a quel punto in cui la curva dell' energia taglia l' una o l' altra delle due curve sotto angolo finito.

fig. 14.ª



35. *Teorema VI.* Se AB fig. 14 rappresenta la curva d' energia seguìta dalla sostanza nel suo espandersi da A in B; AM, BN le due linee di nessuna trasmissione passanti pei punti estremi A e B; RS una linea isotermica qualunque; C e D i punti in cui la linea stessa incontra le M ed N, e diciamo q la quantità di calorico che la sostanza assorbirebbe espandendosi a calorico attuale costante da C in D e τ, il calorico attuale corrispondente sarà

$$\int_a^b \frac{dQ}{T} = \frac{q}{\tau}.$$

Infatti sieno am, bn due linee di nessuna trasmissione infinitamente vicine, le quali taglino la curva RS nei punti c e d; sia dQ la quantità di calorico assorbito dalla sostanza nel passare da a in b secondo la curva d'energia AB, e dq quello che assorbirebbe passando da c in d lungo la curva isotermica RS, e sia finalmente T il calorico attuale della sostanza corrispondente al punto a: per ciò che abbiam detto nel numero precedente sarà

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dq}{\tau},$$

e quindi, per essere τ costante

$$\int_a^b \frac{dQ}{T} = \frac{q}{\tau}$$

come si era proposto.

36. *Corollario I.* Se dopo che la sostanza si è dilatata da A in B secondo la curva di energia AB venga compressa lungo una seconda curva di energia qualunque in modo, che il volume originario e l'originaria tensione essendo Ob e bB, torni a riprendere il volume primitivo Oa e la primitiva tensione aA, ad operazione compiuta, se stimeremo come positive le quantità di calorico assorbite e come negative le scaricate, sarà

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

estendendo l'integrale a tutto il calorico assorbito e scaricato.

Imperocchè torna il medesimo come se dopo che la sostanza si è espansa a calorico attuale costante τ da C in D poi siasi compressa pure a calorico attuale costante τ da D in C.

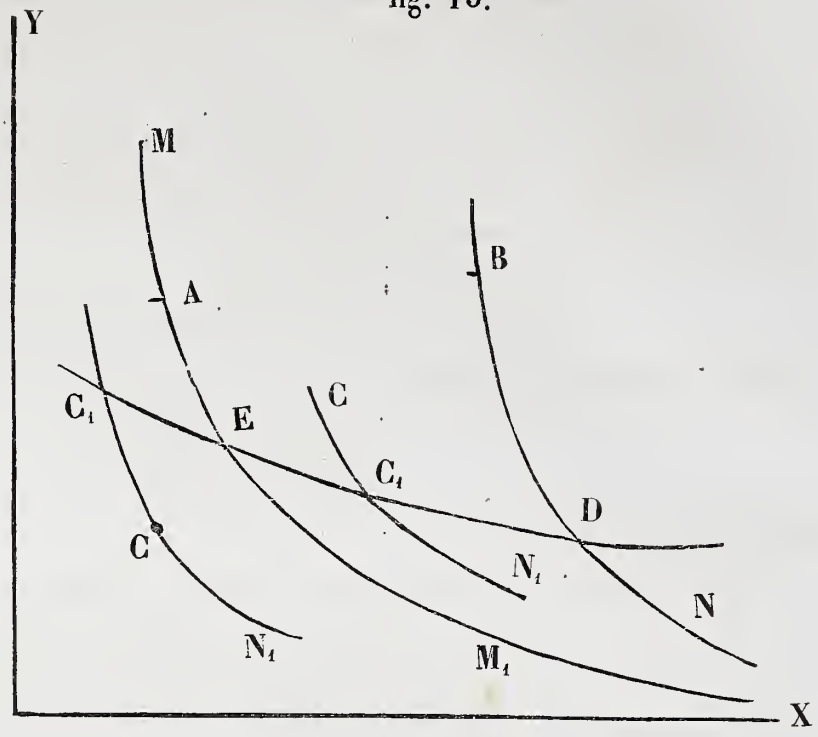
Questo corollario costituisce il secondo teorema fondamentale del Clausius nella sua memoria « di una forma modificata del secondo teorema fondamentale della meccanica del calorico » citata in principio.

Corollario II. Se MAM_1 rappresenta la linea di nessuna trasmissione passante pel punto A di partenza; BN quella che corrisponde al punto estremo della espansione, la quantità

$$\int \frac{dQ}{T}$$

estendendo l'integrale a tutto il calorico assorbito e scaricato sarà

fig. 15.ª



positiva o negativa secondo che il punto C di arrivo, ossia il punto che corrisponde al volume e alla tensione finali della sostanza, cade fra le due linee MM_1 e BN, o fuori delle medesime.

Infatti conducendo per C la corrispondente linea di nessuna trasmissione, e poi tagliando tutte le linee con una stessa linea isotermica, la quale incontri per es. in D la BN, in C_1 quella passante per C ed in E la MM_1 il punto C_1 casca fra E e D nel primo caso, e al di qua di E nel secondo, e quindi il calorico assorbito nell'espansione da E in D è maggiore di quello restituito nella compressione nel primo caso, e minore invece nel secondo.

CAPITOLO III.

Formole.

37. Nell'esprimere in linguaggio algebrico le conseguenze a cui siamo pervenuti nel precedente capitolo indicheremo sempre con

$\frac{1}{A}$ l'equivalente calorifico, cioè il numero di chilogrammetri che corrispondono ad una caloria.

T il calorico attuale della sostanza, cioè il numero di calorie che si contengono nella massa uno d'una sostanza determinata sotto l'originaria forma di forza viva calefacente o di calorico.

Q la quantità di calorie che la massa uno della sostanza operante assorbe da una sorgente nel passare da una sua condizione determinata ad un'altra pure completamente determinata.

v il volume dell'unità di massa, e p la tensione, a cui supporremo sempre eguale la pressione esterna.

Ciò premesso suppongasi che la sostanza posta in presenza d'un'opportuna sorgente calorifica assorba dalla medesima la quantità di calorico dQ, e che perciò il suo volume aumenti di dv e il suo calorico attuale di dT. Sia ds il lavoro interno necessario a portare la sostanza operante dal volume v e calorico attuale T al volume $v+dv$ e al calorico attuale $T+dT$: di più, essendosi ammesso che l'esterna pressione eguagli sempre la tensione o forza elastica della sostanza, sarà $p.dv$ il lavoro esterno. Ora, pei principii generali assunti, della quantità di calorico dQ assorbita dalla sostanza, la parte dT si conserva sotto la forma di forza viva calefacente nell'aumentato suo calorico attuale, e un'altra parte si trasforma nei due lavori $d.s$ e $p.dv$, quindi sarà

$$\frac{1}{A}\,dQ = \frac{1}{A}.dT + d.s + p.dv$$

ossia

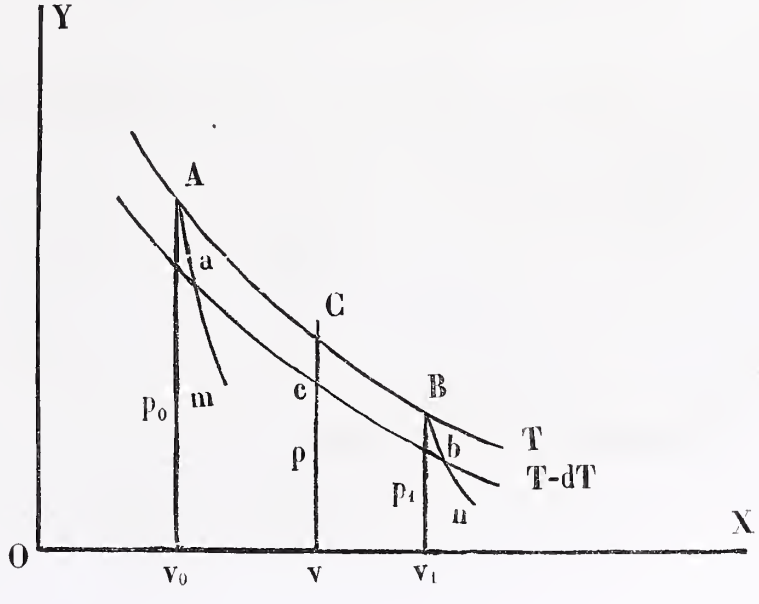
$$(I) \qquad dQ = dT + A.d.s + A.pdv.$$

38. Supponiamo in secondo luogo che una sostanza qualunque si espanda a calorico attuale T da un volume v_0 fino ad un volume v_1 e diciamo

$$(Q_T)_{v_0}^{v_1}$$

la quantità di calorico che durante questo passaggio assorbe da un'opportuna sorgente. Sia AB fig. 16 la linea di egual calorico attuale T, e si conduca la

fig. 16.ª



linea *ab* infinitamente vicina di egual calorico attuale $T - dT$, e sieno *m* ed *n* le due linee di nessuna trasmissione passanti per *A* e *B*. Se la sostanza seguendo il solito processo rappresentato dal quadrilatero *ABbaA* si espande e poi si comprime trasformerà in lavoro esterno una quantità di calorico proporzionale all' area del detto quadrilatero, la quale quantità sarà numericamente espressa da

$$A \cdot dT \int_{v_0}^{v_1} \left(\frac{dp}{dT}\right) dv$$

prendendo l' integrale nell'ipotesi del T costante. Per quanto dunque si è dimostrato nel capitolo precedente sarà

$$\frac{A \cdot dT \int_{v_0}^{v_1} \left(\frac{dp}{dT}\right) dv}{\left(Q_T\right)_{v_0}^{v_1}} = \frac{dT}{T}$$

donde ricaveremo tosto

$$\text{(II)} \qquad \left(Q_T\right)_{v_0}^{v_1} = A \cdot T \cdot \int_{v_0}^{v_1} \left(\frac{dp}{dT}\right) dv \,.$$

Se supponiamo $v_0 = v$, $v_1 = v + dv$ la precedente diventa

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{dQ}{dv}\right) = A \cdot T \cdot \left(\frac{dp}{dT}\right).$$

39. Posta la (I) sotto l'aspetto

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right) dT + \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv = A\left\{p + \left(\frac{ds}{dv}\right)\right\} dv + \left\{1 + A\left(\frac{ds}{dT}\right)\right\} dT$$

si spartisce nelle due

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right) = 1 + A\left(\frac{dS}{dT}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = A\left\{p + \left(\frac{dS}{dv}\right)\right\},$$

delle quali la seconda paragonata colla (III) dà

$$\left(\frac{dS}{dv}\right) = T\left(\frac{dp}{dT}\right) - p \,.$$

Integrata questa nell'ipotesi di T costante, e indicando con $\varphi(T)$ una funzione arbitraria di T, darà

$$S = \int_v \left\{ T\left(\frac{dp}{dT}\right) - p \right\} dv + \varphi(T) \quad \ldots$$

da cui

$$\left(\frac{ds}{dT}\right) = T\int_v \left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) dv + \varphi'(T) .$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione di questo numero avremo

$$\text{(IV)} \quad dQ = \left\{ 1 + A.\varphi'(T) + AT\int_v \left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) dv \right\} . dT + AT\left(\frac{dp}{dT}\right) dv$$

la quale è l'equazione generale dell'azione termodinamica del calorico.

40. Essendo per la (IV)

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right) = 1 + A.\varphi'(T) + AT\int_v \left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) dv$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = AT\left(\frac{dp}{dT}\right)$$

se si considerano v e T non più come variabili indipendenti, ma legate fra loro dalle equazioni che sussistono per qualunque sostanza fra la tensione, il volume e il calorico attuale, avremo

$$\left\{ \frac{d.\left(\frac{dQ}{dT}\right)}{dv} \right\} = AT.\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)$$

$$\left\{ \frac{d.\left(\frac{dQ}{dv}\right)}{dT} \right\} = AT.\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) + A.\left(\frac{dp}{dT}\right)$$

da cui

$$\text{(V)} \quad \left\{ \frac{d.\left(\frac{dQ}{dv}\right)}{dT} \right\} - \left\{ \frac{d.\left(\frac{dQ}{dT}\right)}{dv} \right\} = A.\left(\frac{dp}{dT}\right)$$

ch'è la prima delle equazioni fondamentali del Clausius, di cui la seconda è quella che noi abbiamo posta sotto il numero (III).

41. La quantità

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)$$

rappresenta il rapporto fra la quantità totale di calorico che convien porre nell' unità di massa di una data sostanza per aumentare il suo calorico attuale della quantità dT, e l' aumento dT del calorico stesso quando il volume della sostanza rimanga costante. Se diciamo *capacità specifica a volume costante* un tale rapporto, e lo rappresentiamo con c_v sarà

$$\text{(VI)} \qquad c_v = 1 + A.\varphi'(T) + A.T.\int_v \left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) dv.$$

Diremo poi *capacità specifica a pressione costante* il rapporto fra la quantità totale di calorico che convien porre nell' unità di massa della data sostanza perchè il suo calorico attuale aumenti della quantità dT, e l' aumento dT del calorico stesso, quando ci lasci espandere la sostanza a tensione costante, e sempre nella supposizione di contrapporvi una pressione esterna eguale alla tensione medesima. Se indichiamo questo rapporto con c_p sarà il rapporto fra le quantità dQ e dT che ci ricaverà dall' equazione (IV) supponendo nella stessa costante la p.

Dovendo essere p costante, sarà

$$\left(\frac{dp}{dT}\right) dT + \left(\frac{dp}{dv}\right) dv = 0$$

donde

$$dv = -\frac{\left(\frac{dp}{dT}\right).dT}{\left(\frac{dp}{dv}\right)}$$

che costituito nella (IV) darà

$$\text{(VII)} \qquad c_p = 1 + A\varphi'(T) + AT\int_v \left(\frac{d^2p}{dT_2}\right) dv - AT.\frac{\left(\frac{dp}{dT}\right)^2}{\left(\frac{dp}{dv}\right)}$$

42. Sottraendo la (VI) dalla (VII) si avrà

$$\text{(VIII)} \quad c_p - c_v = A.T.\frac{\left(\frac{dp}{dT}\right)^2}{-\left(\frac{dp}{dv}\right)}$$

che racchiude la così detta legge delle capacità specifiche del calorico.

Da questa si ha pure

$$\text{(IX)} \quad \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{A}{C_v} \cdot \frac{T\left(\frac{dp}{dT}\right)^2}{-\left(\frac{dp}{dv}\right)} .$$

43. Se dividiamo la (IV) per T essa si può facilmente porre sotto l'aspetto seguente:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{1 + A\varphi'(T)}{T} . dT + A . d . \left\{ \int_v \left(\frac{dp}{dT}\right) dv \right\}$$

e se poniamo

$$\frac{dQ}{T} = dF$$

sarà

$$\text{(X)} \quad dF = \frac{1 + A\varphi'(T)}{T} . dT + A . d . \left\{ \int_v \left(\frac{dp}{dT}\right) dv \right\} .$$

La funzione F così determinata è detta dal Rankine *funzione termodinamica;* essa, per quanto si è veduto al § 34, rappresenta la quantità di calorico che verrebbe assorbito dalla sostanza espandendosi sotto all'influenza della continua presenza di un calorico attuale eguale ad uno fra le due curve di nessuna trasmissione che passano pel punto di partenza e pel punto d'arrivo corrispondenti all'effettiva curva dell'energia seguita dalla sostanza nel suo espandersi e comprimersi. Questa medesima quantità è chiamata da Clausius *valore equivalente delle trasformazioni.*

Per la posta relazione, essendo per le linee di nessuna trasmissione $dQ = 0$, la

$$\text{(XI)} \quad dF = 0$$

rappresenta la proprietà generale delle linee di nessuna trasmissione, e la

$$F = \text{costante}$$

l'equazione di una di dette linee in particolare.

44. Esprimendo con

$$\text{(XII)} \quad \downarrow (p, v, T) = 0$$

la relazione particolare che per ogni sostanza operante, secondo la sua varia natura, lega la tensione il volume e il calorico attuale della sostanza medesima,

questa istessa equazione, in cui si supponga T costante, rappresenta anche le curve di egual calorico attuale spettanti alla data sostanza.

In quanto alle curve di nessuna trasmissione relative alla sostanza stessa, dovendosi per esse verificare la (XI), si avranno eliminando T fra le due

$$\text{(XIII)} \quad \begin{cases} \downarrow(p, v, T) = 0 \\ \frac{1 + A\varphi'(T)}{T}\, dT + A.d.\left\{ \int_v \left(\frac{dp}{dT}\right) dv \right\} = 0 . \end{cases}$$

Per avere poi le curve di egual trasmissione di una curva data, dall' equazione di questa curva e dalla (XII) relativa alla sostanza operante si caveranno le

$$p = \bar{\downarrow}_1(T) \quad ; \quad v = \downarrow_2(T) ,$$

i quali valori sostituiti nella (IV) daranno per la curva data

$$dQ = A.F'(T).dT ;$$

e siccome, per definizione, nella curva cercata dev' essere il dQ eguale per ogni valore di dT, così la sua equazione si avrà eliminando T fra le due

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} \downarrow(p, v, T) = 0 \\ \left\{ 1 + A\varphi'(T) + AT \int_v \left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) dv - AF'(T) \right\} dT + AT\left(\frac{dp}{dT}\right) dv = 0 . \end{cases}$$

45. L' equazione (IV) può anche porsi sotto l' aspetto

$$dQ - Apdv = \left\{ 1 + A\varphi'(T) \right\} dT + Ad.\left\{ \int_v \left(T\left(\frac{dp}{dT}\right) - p \right) dv \right\}$$

in cui il primo membro rappresentando la quantità di calorico assorbita dalla sostanza operante diminuita della parte che si è convertita in lavoro esterno, rappresenta pure l' energia residua che resta nella sostanza stessa sotto la doppia forma di calorico attuale e di lavoro interno; se indichiamo quindi con $d.\Psi$ questa energia residua posta in serbo nella sostanza, sarà

$$\text{(XV)} \quad d\Psi = \left\{ 1 + A\varphi'(T) \right\} dT + A.d.\int_v \left\{ \left(T\left(\frac{dp}{dT}\right) - p \right) dv \right\} .$$

46. Per introdurre nelle precedenti equazioni in luogo del calorico attuale la temperatura della sostanza operante, basterà osservare che il calorico attuale

è per la stessa definizione della temperatura legato alla medesima così che ad ogni assegnato calorico attuale corrisponde di necessità una determinata temperatura stimata mediante un determinato termometro. Noi supporremo, per fissare nettamente le idee, di valutare questa temperatura in gradi centesimali di un perfetto termometro ad aria-atmosferica, e diremo t la temperatura o il numero dei gradi segnati dal detto termometro quando ha lo stesso calorico attuale T della sostanza operante, locchè succederà allora che posto il termometro in perfetto contatto colla sostanza operante non vi ha più alcuna trasmissione di forza viva calefacente dall' uno all' altra, o inversamente.

Considerando dunque T come una funzione di t, avremo

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dp}{dT}\right)\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{dp}{dT}\right) = \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

e

$$\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right) = \frac{\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)\left(\frac{dT}{dt}\right) - \left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dT}{dt}\right)^3}.$$

Se ora facciamo

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dt}\right) = \frac{1}{\mu}$$

$$\text{(XVII)} \qquad \left\{1 + A\varphi'(T)\right\}\left(\frac{dT}{dt}\right) = f'(t)$$

essendo μ e $f'(t)$ due funzioni della temperatura t, la (IV) facilmente si converte nella

$$\text{(XVIII)} \qquad dQ = \left\{ f'(t) - A\int_v \left(\frac{dp}{dt}\right) dv \right\} dt + A.d.\left\{\mu \int_v \left(\frac{dp}{dt}\right) dv\right\}$$

e le (V) e (III) nelle due

$$\text{(XIX)} \qquad \left\{\frac{d.\left(\frac{dQ}{dv}\right)}{dt}\right\} - \left\{\frac{d.\left(\frac{dQ}{dt}\right)}{dv}\right\} = A.\left(\frac{dp}{dt}\right)$$

$$\text{(XX)} \qquad \left(\frac{dQ}{dv}\right) = A.\mu.\left(\frac{dp}{dt}\right).$$

Finalmente, se esprimiamo con K_v il *calorico specifico a volume costante*, e con K_p il *calorico specifico a pressione costante*, dalle (VI) e (VIII) si avrà

$$\text{(XXI)} \quad K_v = f'(t) + A\int_v \left\{ \frac{d.\left\{\mu\left(\frac{dp}{dt}\right) - p\right\}}{dt} \right\} dv$$

$$\text{(XXII)} \quad K_p - K_v = A\mu . \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{-\left(\frac{dp}{dv}\right)}$$

dalla penultima delle quali si ricava tosto

$$\text{(XXIII)} \quad \left(\frac{d.K_v}{dv}\right) = A . \left\{ \frac{d.\left\{\mu\left(\frac{dp}{dt}\right) - p\right\}}{dt} \right\}.$$

47. La funzione $\frac{A}{\mu}$ è la così detta funzione di *Carnot;* e, secondo le idee di questo autore, rappresenterebbe il rapporto fra il lavoro dinamico ottenuto col far passare una determinata quantità di calorico attraverso ad una sostanza qualunque, ricevendolo a costante temperatura da un' opportuna sorgente mediante un' espansione, e rigettandolo in uno scaricatore pure a costante temperatura col mezzo di una compressione, e la quantità di calorico ricevuto e trasmesso. Secondo la fatta posizione (XVI) per noi la detta quantità rappresenta il rapporto fra la quantità di cui varia il calorico attuale di una data sostanza di massa uno al variare la sua temperatura di una quantità infinitesima dt, e il calorico attuale della sostanza medesima. In altre parole se si rappresenta con una curva la relazione che esiste fra il calorico attuale di una data sostanza e il numero corrispondente dei gradi segnati da un determinato termometro presi questi sopra l'asse della x, la μ sarà la sottotangente della curva medesima.

Pel teorema generale enunciato al § 32 la μ rappresenta anche il rapporto fra il calorico convertito in lavoro esterno e il calorico assorbito facendo espandere la sostanza fra le due linee di egual calorico attuale T e $T + \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$ e due linee qualunque di nessuna o di egual trasmissione.

CAPITOLO IV.

Applicazione al caso delle sostanze eterogenee.

48. In tutto quanto abbiamo discusso fin qui è implicitamente inchiuso che il calorico attuale della sostanza operante sia eguale in ognuna delle sue parti in cui può essere suddivisa, e quindi anche che la temperatura di ciascuna delle sue minime parti sia la medesima. Però la comunicazione dell' energia calorifica, o col comune linguaggio, del calorico, come la trasmissione di qualunque energia da un corpo ad un altro, esige tempo; e non è assolutamente vero che posta una parte della sostanza operante in comunicazione con una sorgente calorifica ognuna delle sue parti acquisti tosto il calorico attuale corrispondente a quello che vi può essere sviluppato dalla sorgente. Per ciò, strettamente parlando, sarebbe necessario o che tutte le parti della sostanza fossero portate contemporaneamente in contatto della sorgente, o che la sostanza non cominciasse ad operare se non allora che il suo calorico attuale è ridotto eguale in ogni sua minima parte, oppure finalmente che la sostanza operante venisse introdotta nell' organo ordinato a sviluppare il lavoro dopo che la medesima è stata già condotta a questa condizione in altro organo a ciò appositamente costrutto. Siccome poi una tale condizione dovrebb' essere soddisfatta costantemente, così bisognerebbe che durante tutta la trasformazione ogni minima parte della sostanza operante si trovasse posta nelle identiche condizioni, acciocchè il calorico attuale fosse o in tutte costante o variasse in tutte egualmente. Questo stato di cose è ben lungi dal poter sempre essere realizzabile per qualunque sostanza; però sembra che assai prossimamente possa ammettersi pei gas e pei vapori, attesa la grandissima celerità con cui i detti corpi acquistano in ognuna delle loro parti la medesima temperatura: per esempio le ultime esperienze di Seguin l' anziano (Vedi Cosmos, *Revue* ec. Vol. 13, fasc. 8) mostrarono che il vapore dell' acqua non impiega che un tempo appena percettibile a portarsi a temperature altissime, locchè certamente proviene dalla piccola quantità di calorico che questi corpi esigono per aumentare la loro temperatura. Però, per ammettere che nei gas e nei vapori la posta condizione sia costantemente realizzata, sarà necessario ch' essi sieno portati al contatto delle superficie riscaldanti o refrigeranti pel maggior numero possibile di punti, e che lavorino con sufficiente lentezza.

Quando la sostanza operante sia un liquido, purchè lavori assai lentamente, ancora forse quella condizione sarà soddisfatta; ma per le sostanze solide mi pare indubitato che l'esposta teoria dovrebbe ricevere essenzialissime modificazioni, le quali mettano nel conto i fenomeni della propagazione del calorico nelle medesime. Siccome noi non si occuperemo di considerare queste sostanze, così ammetteremo sempre soddisfatta quella condizione, come lo esige la data teoria, e se qui abbiamo mossa questa difficoltà egli è unicamente per accennare a tutti gli obbietti che possono essere mossi nella pratica applicazione della medesima, e per poter anche più francamente esporre l'ipotesi fondamentale sopra della quale basiamo l'applicazione della teoria precedentemente esposta alle sostanze eterogenee, sulle quali dobbiamo ora fermare la nostra attenzione.

49. Già al § 15 abbiamo detto doversi considerare come eterogenee quelle sostanze le quali risultano dall'unione di varii ingredienti, ognuno dei quali occupa uno spazio di sensibil grandezza, e per ognuno dei quali varia il peso specifico, la capacità calorifica ec., come per esempio l'aggregato d'un liquido e del vapore del liquido stesso.

Supponiamo ora che in uno spazio impervio al calorico sia chiusa una di queste sostanze; se l'aggregato è in equilibrio egli è allora per sè stesso evidente che le tensioni de' suoi varii ingredienti dovranno essere eguali, altrimenti si espanderebbe l'uno e si costiperebbe l'altro fino a che le tensioni stesse si riducono all'eguaglianza, nulla opponendosi a ciò: ed eguali pure dovranno essere i loro calorici attuali riportati all'unità di massa, perchè se questo non fosse per la proprietà che ha l'energia calorifica di trasmettersi da un corpo in cui il calorico attuale unitario è maggiore in quello in cui è minore, avverebbe una tale trasmissione, e col variare de' calorici attuali variando le tensioni de' due ingredienti l'equilibrio ne andrebbe rotto, locchè è contro il supposto. Non altrimenti nelle sostanze omogenee in equilibrio è eguale la tensione e il calorico attuale in ognuna delle loro parti in cui possono essere suddivise. Siccome poi a eguale calorico attuale unitario corrisponde eguale temperatura, così « in un aggregato eterogeneo qualunque in equilibrio le tensioni e i calorici attuali, o le temperature dei varii ingredienti saranno eguali fra loro ».

Ma se questo stato d'equilibrio venga ad essere rotto, nulla osta che le tensioni e i calorici attuali dei varii ingredienti possano essere differenti; però tornando a ristabilirsi l'equilibrio sotto nuove condizioni quelle quantità saranno differenti dalle prime bensì, ma torneranno a farsi eguali fra loro.

Ora si ammette che quando una di queste sostanze che diciamo eterogenee si faccia servire per la conversione dell' energia calorifica, essa lavori sempre in tal condizione che ad ogni minimo istante le tensioni e i calorici attuali de' suoi varii ingredienti sieno tutti eguali fra loro, precisamente come se la sostanza stessa fosse nello stato d' equilibrio. È in fondo l' ipotesi stessa che si fa per le sostanze omogenee considerate come aggregato di varie parti, nè vi ha altra differenza se non quella che in queste ultime essa sarà più facilmente realizzabile; però quando la sostanza eterogenea sia un liquido o vapore del liquido stesso, e che lavori con sufficiente lentezza, l' ipotesi si può ritenere così prossimamente vera da togliere il dubbio di errori troppo forti, almeno in paragone alle pratiche difficoltà di accertare gli altri elementi della teoria.

50. Ciò premesso, e ritenuto che l' effetto totale debba eguagliare la somma degli effetti parziali, ci sarà assai facile il dimostrare che l' equazione generale che abbiamo data sotto il numero IV è applicabile anche alle sostanze eterogenee; e che quindi sussisteranno anche per queste tutte le conseguenze che abbiamo sopra dedotte dalla detta equazione, ed i teoremi generali sui quali la stessa si appoggia.

Suppongasi infatti di avere un composto di varii ingredienti; sia uno la massa totale del composto, e sieno m_1, m_2, m_3 ec. le masse dei singoli ingredienti, cosicchè sia

$$m_1 + m_2 + m_3 + \text{ec.} \quad = \Sigma\, m = 1 .$$

Sia v il volume dell' unità di massa del composto, e v_1, v_2, v_3 ec. sieno i volumi dell' unità di massa dei varii ingredienti, per cui sarà

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \quad = \Sigma\, m . v = v$$

e

$$d . m_1 v_1 + d . m_2 v_2 + \text{ec.} = \Sigma . d . mv = d . v .$$

Sia T il calorico attuale di ogni ingrediente, e p la tensione di ciascuno, per cui T e p saranno anche il calorico attuale e la tensione del composto.

Si supponga comunicata al composto una quantità totale di calorico Q, la quale riesca spartita nei varii ingredienti così che l' unità di massa di ciascuno riceva rispettivamente le quantità di calorico q_1, q_2, q_3 ec. sarà

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + \quad = \Sigma\, mq = Q ,$$

$$d.m_1q_1+d.m_2q_2+\text{ec.}-=\Sigma.d.mq=dQ\,,$$

ricordando che nell'equazione (IV) tutte le quantità si riportano all'unità di massa, se immaginiamo che ai varii ingredienti del nostro corpo sieno rispettivamente comunicate le quantità totali di calorico $d.m_1q_1$, $d.m_2q_2$ ec., ricordando che per ognuno sono i medesimi T e p, avremo

$$\frac{d.m_1q_1}{m_1}=\left\{1+A\varphi'(T)+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)\frac{d.m_1v_1}{m_1}\right\}dT+AT.\left(\frac{dp}{dT}\right)\frac{d.m_1v_1}{m_1}\,,$$

$$\frac{d.m_2q_2}{m_2}=\left\{1+A\varphi'(T)+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)\frac{d.m_2v_2}{m_2}\right\}dT+AT.\left(\frac{dp}{dT}\right)\frac{d.m_2v_2}{m_2}$$

ec.

Da queste si avrà

$$d.m_1q_1=\left\{m_1\left\{1+A\varphi'(T)\right\}+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)d.m_1v_1\right\}dT+AT\left(\frac{dp}{dT}\right)d.m_1v_1\,,$$

$$d.m_2q_2=\left\{m_2\left\{1+A\varphi'(T)\right\}+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)d.m_2v_2\right\}dT+AT\left(\frac{dp}{dT}\right)d.m_2v_2\,,$$

ec.

le quali sommate danno

$$\Sigma.d.mq=\left\{\left\{1+A\varphi'(T)\right\}\Sigma m+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)\Sigma.d.mv\right\}dT+AT\left(\frac{dp}{dT}\right)\Sigma.d.mv,$$

ossia

$$Q=\left\{1+A\varphi'(T)+AT\int_v\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)dV\right\}dT+AT\left(\frac{dp}{dT}\right)dV=0\,,$$

la quale ultima altro non è che l'equazione (IV) come appunto si era proposto.

CAPITOLO V.

Dei gas perfetti e dei vapori.

(A) Dei gas perfetti.

51. Diremo gas perfetto quella sostanza per cui si verificano le relazioni

$$(1)\qquad p.v=N.T\quad;\quad c_v=1$$

essendo N una costante.

In tal caso l'equazione (VI) darà $\varphi'(T) = 0$, e la (X) si convertirà nell'altra

$$(2) \qquad dF = \frac{dT}{T} + AN.\frac{dv}{v},$$

la quale integrata dà

$$(3) \qquad F = \log. C.\ T.\ v^{N.A},$$

essendo C una nuova costante arbitraria.

L' equazione dunque delle linee di nessuna trasmissione sarà

$$(4) \qquad T.v^{N.A} = \text{costante}$$

ossia, ponendo per T il suo valore ricavato dalla (1),

$$(5) \qquad p.v^{1+NA} = \text{costante}$$

dalla (VIII) poi si ricaverà

$$(6) \qquad C_p = 1 + N.A,$$

quindi costante anche la capacità specifica a costante pressione, e

$$C_p - C_v = N.A.$$

Finalmente dalla (IV) combinata colla (1) si avrà

$$(7) \qquad dQ = dT + NAT.\frac{dv}{v}$$

ossia

$$(8) \qquad dQ = dT + Ap.dv$$

e

$$(9) \qquad N.dQ = \{1 + A.N\}\, pdv + v.dp.$$

Data la curva dell'energia segnata dal gas nel suo espandersi si porrà nella precedente il valore di p in funzione di v ricavato dalla curva stessa, e si avrà, integrando fra i limiti dati del volume, la quantità di calorico assorbito dal gas: se invece sieno date le quantità di calorico che sono successivamente comunicate alla sostanza a mano a mano che varia il suo volume, cioè Q in funzione di v, la (9) darà la corrispondente curva dell'energia. Finalmente data quest'ultima curva, e detto W il lavoro esterno sviluppato dal gas nel suo espandersi dal volume v_0 al volume v_1 sarà

$$(10) \qquad W = \int_{v_0}^{v_1} p dv ,$$

e

$$(11) \quad Q = \frac{1 + N.A}{N} \int_{v_0}^{v_1} p dv + \frac{1}{N} \int_{v_0}^{v_1} v.dp .$$

52. Per ciò che spetta alle curve di egual trasmissione considereremo prima i due casi in cui la curva data sia una retta perpendicolare e una retta parallela all' asse delle x, cioè i due casi in cui il gas passi da un calorico attuale ad un altro o a costante volume, o a costante pressione.

Primo caso. Curva data

$$v = a = \text{costante} ;$$

per questa curva essendo $dv = 0$ sarà $dQ = dT$, e quindi, seguendo i precetti sviluppati al § 44, avremo per le curve di egual trasmissione della proposta

$$Apdv = 0 ,$$

e siccome A e p non sono zero, così sarà

$$dv = 0 ,$$

quindi

$$v = \text{costante} ,$$

cioè « pei gas perfetti tutte le rette perpendicolari all' asse delle x sono linee di egual trasmissione ». In altre parole: « se un gas perfetto sia mantenuto a costante volume per passare da un dato calorico attuale ad un altro calorico attuale pur dato, assorbe sempre la stessa quantità di calorico ». Questa proprietà è una conseguenza della posizione $c_v = 1$, e la esprime in linguaggio ordinario.

Secondo caso. Curva data

$$p = a = \text{costante} ,$$

per la (I) avremo

$$v = \frac{N}{a} . T$$

e quindi, secondo gli accennati precetti, per le curve di egual trasmissione della proposta dovrà essere

$$p \,.\, dv = d \,.\, pv \,,$$

la quale divisa per pv e integrata dà

$$\log. \, c \,.\, v = \log. \, p \,.\, v \,,$$

ossia

$$p = c = \text{costante} \,,$$

cioè « tutte le rette parallele all'asse delle x sono pei gas perfetti linee di egual trasmissione ». In altre parole: « se un gas perfetto passa da un dato calorico attuale ad un altro calorico attuale pur dato conservando costante la sua tensione assorbe sempre la stessa quantità di calorico ». Questa pure è una conseguenza della $C_p = 1 + N \,.\, A$ e la esprime in linguaggio ordinario.

Questo secondo caso corrisponde al rigeneratore di *Ericsson*.

53. Proponiamoci per secondo esempio di trovare le curve di egual trasmissione di quella rappresentata dall' equazione

$$p = a \,.\, v + 2b$$

essendo a e b due costanti arbitrarie.

Combinando l'equazione data colla (I) si avrà

$$p = b + \sqrt{\{b^2 + a \,.\, N \,.\, T\}} \quad ; \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{a} \sqrt{\{b^2 + a \,.\, N \,.\, T\}} - \frac{b}{a}$$

e quindi per la curva data sarà

$$dQ = \left\{ 1 + \frac{A \,.\, N}{2} + \frac{AN}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{\{b^2 + aN.T\}}} \right\} dT \,,$$

e quindi le curve di egual trasmissione della proposta saranno date (§ 44) dalla

$$\frac{b \,.\, d \,.\, pv}{\sqrt{\{b^2 + a \,.\, pv\}}} + d \,.\, pv = 2p \,.\, dv \,.$$

Dividendo tutto per pv si avrà

$$\frac{b \,.\, d \,.\, pv}{pv \,.\, \sqrt{\{b^2 + a \,.\, pv\}}} + \frac{d \,.\, pv}{pv} = 2 \,.\, \frac{dv}{v} \,,$$

la quale integrata, e detta c la costante arbitraria, darà

$$\frac{\sqrt{b^2+a.pv}-b}{\sqrt{b^2+a.pv}+b}=c.\frac{v}{p},$$

ossia

$$\left\{\sqrt{b^2+a.pv}-b\right\}^2=a\,c.v^2,$$

e finalmente

$$p=c.v+2b.\sqrt{\frac{c}{a}},$$

la quale coincide colla proposta pel valore di $c=a$, e rappresenta un sistema di rette.

Due rette di egual trasmissione s'incontrano in un punto di coordinate

$$v=-\frac{2b}{a+\sqrt{aC}}\;;\quad p=\frac{2b.\sqrt{a.C}}{a+\sqrt{aC}},$$

il quale giace sempre fuori dell'angolo xoy, e precisamente sempre nel secondo o nel quarto quadrante.

54. Se la massa uno di un gas perfetto si espanda secondo una linea di egual calorico attuale T_1 dal volume originario v_1 al volume finale v_2 la quantità di calorico assorbita sarà

$$\left(Q_{T_1}\right)_{v_1}^{v_2}=N.A.T_1\log.\frac{v_2}{v_1}$$

od anche

$$\left(Q_{T_1}\right)_{v_1}^{v_2}=Ap_1v_1.\log.\frac{p_1}{p_2}.$$

Se poi venga posto in comunicazione con uno scaricatore, e mantenendo costante il suo volume v_2 si riduca al calorico attuale T_2, e sia poi compresso a calorico attuale costante fino a riprendere il suo volume originario v_1, la quantità di calorico scaricata durante la compressione sarà

$$\left(Q_{T_2}\right)_{v_1}^{v_2}=N.A.T_2.\log.\frac{v_2}{v_1},$$

od anche

$$\left(Q_{T_2}\right)_{v_1}^{v_2}=Ap_2v_2.\log.\frac{p_1}{p_2}.$$

Se finalmente, mantenendo costante il suo volume v_1, si ponga in comunicazione con una sorgente calorifica fino a che riprenda il calorico attuale T_1, e quindi anche l'originaria tensione p_1 nel processo completo così seguìto si avrà:

Calorico convertito in lavoro esterno . . . $= N.A\{T_1 - T_2\}\log.\frac{v_2}{v_1}$,

od anche . . . $= A\{p_1 v_1 - p_2 v_2\}\log.\frac{p_1}{p_2}$.

Lavoro esterno sviluppato . . . . . $= N\{T_1 - T_2\}\log.\frac{v_2}{v_1}$,

od anche . . . $= \{p_1 v_1 - p_2 v_2\}\log.\frac{p_1}{p_2}$.

Calorico assorbito durante l'espansione . . $= N.A.T_1.\log.\frac{v_2}{v_1}$,

od anche . . . $= Ap_1 v_1.\log.\frac{p_1}{p_2}$.

Calorico assorbito per passare da T_2 a T_1 . . $= T_1 - T_2$.

Calorico scaricato durante la compressione $= N.A.T_2.\log.\frac{v_2}{v_1}$,

od anche . . . $= Ap_2 v_2.\log.\frac{p_1}{p_2}$.

Calorico scaricato nel passaggio da T_1 a T_2 . $= T_1 - T_2$.

Se il gas dopo tolto dalla comunicazione colla sorgente e collo scaricatore si lasci espandere e si comprima secondo linee di nessuna trasmissione, allora non assorbirà dalla sorgente che la quantità di calorico che corrisponde alla espansione, e non scaricherà nello scaricatore se non quella che compete alla compressione; le quali quantità, per le proprietà delle linee di eguale e di nessuna trasmissione, sono eguali a quelle calcolate superiormente. In quest' ultimo caso poi si avrebbe

volume originario . . . . . $= v_1$,

volume al termine della espansione a calorico attuale costante ed eguale a T_1 . . . . . $= v_2$,

volume al termine della espansione a zero trasmissione per acquistare il calorico attuale T_2 . . . $= v_2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{NA}}$,

volume al termine della compressione a calorico attuale

$$\text{costante } T_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \rho_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{NA}} .$$

55. Quando il passaggio da un calorico attuale ad un altro si faccia secondo linee di egual trasmissione allora, siccome il calorico restituito nella compressione è successivamente eguale a quello assorbito nella espansione, così si potrà fare che il calorico scaricato durante lo sbassamento del calorico attuale venga comunicato ad una sostanza conduttrice, la quale lo tenga in serbo e lo restituisca successivamente alla sostanza operante quando il calorico attuale di questa deva essere aumentato. Quell' apparecchio che serve a quest' uopo dicesi *rigeneratore:* allora la sorgente calorifica e lo scaricatore propriamente detti non emettono e non ricevono che le quantità di calorico che emetterebbero e che riceverebbero se si operasse il passaggio da un calorico attuale ad un altro secondo linee di nessuna trasmissione.

Un rigeneratore, anche perfettissimo, non diminuisce dunque il dispendio di calorico necessario a convertire in lavoro esterno una determinata quantità di calorico, solo permette di raggiungere questo effetto con condizioni, in molti casi, di maggiore comodità pratica.

56. Nessuno dei gas noti gode assolutamente delle proprietà che abbiamo detto caratterizzare i gas perfetti; però alcuni, fra i quali l' aria atmosferica, deviano pochissimo da quelle leggi, ed ai medesimi si possono con sufficiente approssimazione applicare le equazioni superiori, essendo assai piccole e generalmente trascurabili le differenze, specialmente quando si tengano in debito conto le difficoltà di accertare praticamente i valori numerici dei varii elementi che entrano nel calcolo, e di soddisfare esattamente a tutte le condizioni pratiche del problema.

57. A porgere un' idea concreta di quanto abbiam detto in questi ultimi numeri non sarà del tutto inutile il seguente esempio numerico.

Secondo le esperienze di Dulong nell' aria atmosferica il rapporto delle capacità calorifiche a pressione costante e a volume costante è 1,421, e avendo noi chiamato 1 la capacità a volume costante, sarà per la (6)

$$N . A = 0{,}421 .$$

Supponiamo di usare di un chilogramma d'aria, di espanderlo al calorico attuale costante $T_1 = 473$ calorie, e di comprimerlo a calorico attuale costante $T_2 = 313$ calorie, locchè, come vedremo al § 73, corrisponde a circa 200 e 40 gradi centigradi del termometro ad aria; sia $v_2 = 5 . v_1$, prendendo $A = 424$ § 80, avremo

Calorico convertito in lavoro esterno . . .	= 108,41 calorie.
Lavoro esterno sviluppato	= 45965 chilogrammetri.
Calorico assorbito durante l'espansione a calorico attuale costante	= 320,48 calorie.
Calorico scaricato nella compressione a calorico attuale costante	= 212,07 calorie.
Calorico assorbito e scaricato per passare da un calorico attuale all'altro a costante volume	= 160 calorie.
Volume al termine della espansione a zero trasmissione per acquistare il calorico T_2	= 13,320 . v_1 .
Volume al termine della compressione a calorico attuale costante T_2	= 2,664 . v_1 .
Rapporto fra il calorico convertito in lavoro esterno, e il calorico assorbito . . .	= 0,338.

Se non si fosse usata l'espansione per passare da un calorico attuale ad un altro, nè si fosse usato un rigeneratore, che noi qui supponemmo perfetto, allora il calorico assorbito dalla sorgente sarebbe stato di 480,48 calorie, delle quali se ne sarebbero scaricate 372,07, e allora il rapporto fra il calorico convertito in lavoro esterno e il calorico assorbito dalla sorgente sarebbe stato solamente 0,226, cioè da circa un terzo si sarebbe sbassato a poco più di un quarto.

(*B*) Dei vapori.

58. Quando i vapori dei liquidi non sono al loro massimo di tensione, allora essi seguono assai prossimamente le leggi stesse dei gas permanenti, e quindi possono aversi in conto di gas ai quali con approssimazione maggiore o minore è applicabile quanto si è detto nei precedenti paragrafi. Ciò non ha luogo quando sieno al loro massimo, e noi ci proponiamo ora di applicare

l'esposta teoria al caso speciale dei vapori al loro massimo, restringendo per semplicità il discorso al vapore dell'acqua, locchè è applicabile a tutti gli altri.

Abbiasi un chilogramma d'acqua e vapore d'acqua al suo massimo chiuso in uno spazio v; di questo la parte m sia in istato di vapore, e quindi la parte $1-m$ in istato di liquido; sia T il calorico attuale dell'acqua e del vapore, e p la forza elastica così dell'una come dell'altro. Rappresentiamo con s il volume di un chilogramma di vapore al suo massimo quando il suo calorico attuale è T, e con σ il volume di un chilogramma d'acqua pure al calorico attuale T; nel caso preso a considerare sarà dunque

$$(a) \qquad v = (1-m)\,\sigma + m\,.\,s\,,$$

da cui

$$(b) \qquad m = \frac{v-\sigma}{s-\sigma}\,,$$

e

$$(c) \qquad \left(\frac{dm}{dT}\right) = \frac{(v-s)\,\frac{d\sigma}{dT} - (v-\sigma)\,\frac{ds}{dT}}{(s-\sigma)^2}\,;\quad \left(\frac{dm}{dv}\right) = \frac{1}{s-\sigma}$$

s e σ essendo unicamente funzioni di T.

Ora supponiamo che rimanendo costante T, il volume totale aumenti di dv mediante la comunicazione a tutta la sostanza operante della quantità di calorico

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) dv\,;$$

per ciò si convertirà in vapore tanta acqua quanta è necessaria per riempiere di vapore lo spazio dv, ossia perchè la parte in istato di vapore aumenti della quantità

$$\left(\frac{dm}{dv}\right) dv.$$

Per ciò se diciamo r la quantità di calorico che si richiede per convertire in vapore un chilogramma di acqua al calorico attuale T, ossia, col linguaggio più comune, la quantità di calorico reso latente pel passaggio in vapore di un chilogramma d'acqua al calorico attuale T e sotto alla corrispondente pressione, sarà

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) dv = r\left(\frac{dm}{dv}\right) dv\,,$$

ossia per le (c)

$$(d) \qquad \left(\frac{dQ}{dv}\right) = \frac{r}{s-\sigma}.$$

Paragonata questa colla formola generale (III) del § 38 si ha

$$(A) \quad r = A(s-\sigma)\, T.\left(\frac{dp}{dT}\right),$$

oppure per la (XX) § 46

$$(B) \quad r = A(s-\sigma)\,\mu.\left(\frac{dp}{dt}\right).$$

59. Si supponga in secondo luogo che il volume resti costante, ma che il calorico attuale dell' aggregato aumenti della quantità dT assorbendo per ciò dalla sorgente la quantità di calorico

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right) dT,$$

e si ammetta che il vapore continui a restare nel suo stato di massimo, come ha sempre luogo quando il vapore è in contatto col liquido generatore. Allora la massa $1-m$ dell' acqua prova un aumento di calorico attuale dT, e se quindi indichiamo con c la quantità di calorico che conviene impartire ad un chilogramma d' acqua al calorico attuale T per aumentare il suo calorico attuale di un' unità, per questa parte la quantità di calorico assorbita sarà:

$$c.(1-m).dT.$$

In secondo luogo per l' aumento del calorico attuale si evapora una parte di liquido espressa da

$$\left(\frac{dm}{dT}\right) dT,$$

e per ciò si richiede la quantità di calorico

$$r\left(\frac{dm}{dT}\right) dT,$$

ossia per le (c)

$$r\left\{\frac{(v-s)\frac{d\sigma}{dT} - (v-\sigma)\frac{ds}{dT}}{(s-\sigma)^2}\right\} dT.$$

Finalmente, quando il vapore al suo massimo si riscalda esso non si conserva più al massimo, ma perchè ritorni in quello stato sotto all' influenza del suo nuovo calorico attuale è mestieri comprimerlo di una certa quantità. Durante il riscaldamento si sarà comunicata al vapore una certa quantità di calorico, e durante la compressione una parte almeno del detto calorico si sarà scaricata. Diremo h l' eccesso della quantità di calorico speso sopra quello che viene restituito per innalzare di una unità il calorico attuale di un chilogramma di vapore al calorico attuale T conservandolo mediante un' opportuna compressione allo stato di massimo. Nel caso nostro la compressione è fatta dal liquido che alcun poco si dilata, e dalla parte di liquido che viene convertita in vapore, e ciò a spese del calorico impartito a queste parti, nella cui stima entra per ciò il lavoro a questo necessario. La quantità di calorico quindi che sarà comunicato alla massa m in istato di vapore sarà

$$mh \,.\, dT \,.$$

Riunendo le tre quantità ora partitamente considerate, e ponendo per m il suo valore dato dalla (b) si avrà

$$(c) \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{v-s}{s-\sigma}\left\{\frac{r}{s-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dT} - c\right\} - \frac{v-\sigma}{s-\sigma}\left\{\frac{r}{s-\sigma}\cdot\frac{ds}{dT} - h\right\}.$$

60. Sostituendo nell' equazione (V) i valori ora trovati, ed osservando che anche r, c ed h non sono che funzioni di T, si avrà

$$(e) \quad \frac{dr}{dT} + c - h = A\,(s-\sigma)\left(\frac{dp}{dT}\right),$$

nella quale sostituendo nel secondo membro il suo valore dato dalla (A) avremo

$$(f) \quad \frac{dr}{dT} + c - h = \frac{r}{T},$$

la quale può servire a calcolare h ogniqualvolta sieno noti i valori di r e c in funzione di T.

Dalla equazione (f) ricaviamo il fatto avvertito la prima volta dai signori Clausius e Rankine che quando in uno spazio impervio al calorico siavi chiuso del vapore al massimo di tensione, e che il vapore stesso si espanda superando un' esterna pressione eguale alla sua forza elastica, una parte del vapore si con-

verte in acqua e quella che resta in istato di vapore continua per ciò a conservare lo stato di massimo. Infatti dalla (f) si ha

$$h = -\frac{r}{T} + c + \frac{dr}{dT},$$

e per le esperienze note, anche ad elevatissime temperature, è assai prossimamente c costante ed r esprimibile con una formola della forma

$$r = a - b \,.\, T,$$

essendo a e b due costanti, che per l'acqua hanno assai prossimamente i valori $a = 800$ $b = 0{,}7$. Quindi sarà

$$h = -\frac{a}{T} + c,$$

e per l'acqua

$$h = -\frac{800}{T} + 1,$$

per l'acqua quindi, e pei corpi conosciuti attesi i corrispondenti valori di a e c, h ha un valore generalmente negativo, almeno fino a $T = 800$, che, come vedremo, corrisponde circa a 527 gradi centigradi; e così dicesi degli altri corpi almeno fino a temperature assai elevate. Dietro la definizione data di h ciò vuol dire ch'è maggiore la quantità di calorico che il vapore per conservarsi al suo massimo scarica nella compressione di quella di cui ha di bisogno per aumentare corrispondentemente il suo calorico attuale, e quindi la sua temperatura: e per ciò inversamente che dilatandosi la quantità di calorico spesa è maggiore di quella che corrisponde allo sbassamento relativo del calorico attuale, o della temperatura; per ciò restando nella massa totale del vapore meno calorico di quello ch'è necessario per mantenerlo in istato di vapore al massimo di tensione corrispondente al nuovo calorico attuale, una parte del vapore si converte in liquido, come appunto abbiamo accennato.

61. Dalle (d) e (c), rimettendo nelle stesse il valore di m dato dalla (b) si avrà

$$(D) \quad dQ = \left\{ c\,(1-m) + m\,.\,h + r\left(\frac{dm}{dT}\right) \right\} . \, dT + r\left(\frac{dm}{dv}\right) dv,$$

da cui, mediante la (f),

$$(E) \quad dF = c\,.\,\frac{dT}{T} + d\,.\,\frac{mr}{T}.$$

Le linee dunque di nessuna trasmissione avranno per equazione generale la

$$(F) \quad c \cdot \frac{dT}{T} + d \cdot \frac{mr}{T} = 0 .$$

Per ciò se un aggregato di liquido e vapore del liquido di massa uno si espanda o si comprima senza che riceva o scarichi calorico, e si suppongano noti c ed r in funzione di T, come in seguito alle esperienze di Regnault si può supporre pel vapore dell'acqua, detti m_1 ed r_1 i valori di m ed r pel caso di $T = T_1$ e per le condizioni originarie dell'aggregato, dalla precedente si avrà

$$(G) \quad m = \frac{T}{r} \left\{ \frac{m_1 r_1}{T_1} - \int_{T_1}^{T} c \cdot \frac{dT}{T} \right\},$$

col cui mezzo avremo dato anche m in funzione di T; se poi supponiamo di avere anche σ in funzione di T, come per le esperienze di Despretz si ha pel caso in cui il liquido è acqua, combinando quest'ultima colle (A) e (b) si avrà

$$(H) \quad \rho = \sigma + \frac{1}{A} \frac{1}{\left(\frac{dp}{dT}\right)} \left\{ \frac{m_1 r_1}{T_1} - \int_{T_1}^{T} c \cdot \frac{dT}{T} \right\},$$

la quale dà ρ in funzione di T; essendochè anche il p e quindi il $\left(\frac{dp}{dT}\right)$ pel vapore al massimo è solo una funzione di T, che pel caso dell'acqua si possono sempre avere per ogni valore particolare di T dalle esperienze di Regnault, e dalle tavole corrispondenti.

Se nelle precedenti equazioni si suppone c costante, esse si trasformano nelle

$$(G)' \quad m = \frac{T}{r} \left\{ \frac{m_1 r_1}{T_1} - c \cdot \log. \frac{T}{T_1} \right\},$$

$$(H)' \quad \rho = \sigma + \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dp}{dT}\right)} \left\{ \frac{m_1 r_1}{T_1} - c \cdot \log. \frac{T}{T_1} \right\}.$$

62. Mediante l'equazione $(G)'$ possiamo verificare numericamente il fatto accennato al § 60 del costiparsi del vapore in acqua allorchè si dilata, partendo dal suo massimo, senza nè ricevere nè scaricare calorico, la cui importanza scuserà, spero, questa breve digressione. Non volendo spingere il calcolo oltre

quanto basta a dare un' idea del fenomeno e nulla più, prenderemo i dati seguenti, dei quali nel prossimo capitolo si vedrà il fondamento § 73, 78;

$$T = 273 + t \ , \ c = 1 \ , \ r = 606{,}5 - 0{,}695 \, . \, t \ ,$$

essendo t la temperatura in gradi centigradi di un ordinario termometro.

Si supponga che un chilogramma di vapore al suo massimo sia chiuso in uno spazio impervio al calorico; che la sua temperatura originaria sia di 200° e che vada successivamente espandendosi vincendo un' esterna pressione eguale alla sua forza elastica senza nè ricevere nè scaricare calorico fino a che la sua temperatura si sbassa successivamente ai gradi notati nella seguente tabella; i valori di m, ossia di quella parte della massa totale che resta in istato di vapore, ed i valori di $1 - m$, ossia della parte che si converte in acqua, dietro la formola $(G)'$ e i dati precedenti, saranno quelli notati in corrispondenza nella tabella medesima

t	200°	150°	100°	50°	0°
m	1	0,94075	0,86325	0,78339	0,69990
$1 - m$	0	0,05925	0,13675	0,21661	0,30010

63. *Problema.* Assegnare il lavoro esterno sviluppato da un aggregato di liquido e di vapore del liquido durante l' espansione secondo una linea di nessuna trasmissione nel passare da un calorico attuale T_1 al calorico attuale T_2.

Sia m_1 il valore iniziale di m; il suo valore finale m_2 sarà § 61.

$$m_2 = \frac{T_2}{r_2} \left\{ \frac{m_1 r_1}{T_1} - \int_{T_1}^{T_2} c \cdot \frac{dT}{T} \right\} .$$

Ora all' origine essendo il vapore al suo massimo, nello espandersi (§ 60) si conserva sempre al massimo, e quindi la sua tensione p non è che funzione del suo calorico attuale, per cui si avrà

$$p \, . \, dv = d \, . \, pv - v \left(\frac{dp}{dT} \right) dT \ ,$$

ossia per la (A)

$$p\,.\,d\rho = d\,.\,p\rho - \frac{1}{A}\cdot\frac{v}{s-\sigma}\cdot\frac{r\,.\,dT}{T}\,,$$

e siccome durante l'espansione l'aggregato non riceve nè scarica calorico, così (§ 61) sarà

$$c\,.\,dT + d\,.\,mr - \frac{mr\,.\,dT}{T} = 0\,,$$

con cui, unitamente alla (A), avremo

$$p\,.\,d\rho = d\,.\,p\rho - \frac{1}{A}c\,.\,dT - \frac{1}{A}\,.\,d\,.\,mr - d\,.\,\sigma p + p\,.\,d\sigma\,,$$

da cui

$$\int_{T_1}^{T_2} p d\rho = (\rho_2 - \sigma_2)p_2 - (\rho_1 - \sigma_1)p_1 - \frac{1}{A}\left\{m_2 r_2 - m_1 r_1\right\} - \frac{1}{A}\int_{T_1}^{T_2} c.dT + \int_{T_1}^{T_2} p.d\sigma\,,$$

dove sostituendo a $\rho - \sigma$ e ad m i corrispondenti valori dati dalle (G) ed (A), ed indicando con W il lavoro esterno richiesto, sarà

$$(L)\quad W = \frac{1}{A}\cdot\frac{m_1 r_1}{T_1}\left\{\frac{p_2}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} - \frac{p_1}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_1} + T_1 - T_2\right\} + \frac{1}{A}\left\{T_2 - \frac{p_2}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_2}\right\}\int_{T_1}^{T_2} c\cdot\frac{dT}{T}$$

$$- \frac{1}{A}\int_{T_1}^{T_2} c\,.\,dT + \int_{T_1}^{T_2} p\,.\,d\sigma\,.$$

Se poi si suppongono c e σ costanti, sarà

$$(L)'\quad W = \frac{1}{A}\cdot\frac{m_1 r_1}{T_1}\left\{\frac{p_2}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} - \frac{p_1}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_1} + T_1 - T_2\right\} + \frac{c}{A}\left\{\frac{p_2}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} - T_2\right\}\log.\frac{T_1}{T_2}$$

$$+ \frac{c}{A}\left\{T_1 - T_2\right\}.$$

64. Ciò premesso si supponga di avere un cilindro chiuso impervio al calorico, entro cui scorra un embolo a perfetta tenuta d'aria; in detto cilindro siavi un aggregato di un liquido e di vapore del liquido di massa uno, al calorico attuale originario T_1. In principio l'embolo sia così addentrato che tutta la massa sia in istato liquido, e allora, tenendo fermo l'embolo, venga posta in presenza di una sorgente calorifica la quale porti il calorico attuale della massa

a T_2, e allora lasciandola espandersi e convertirsi successivamente in vapore si supponga che la sorgente sia idonea a mantenere nella stessa costante il calorico attuale T_2, e che sull'embolo operi una costante pressione esterna eguale alla tensione dell'aggregato; così si lasci espandere fino a che tutta la massa è convertita in vapore. Ciò fatto si tolga l'aggregato all'azione della sorgente calorifica e si lasci espandere, sempre contrapponendovi una pressione esterna eguale all'interna tensione, fino a che il suo calorico attuale si sbassi al calorico attuale originario T_1, e allora, postolo in presenza d'un opportuno scaricatore, si comprima a calorico attuale costante T_1 fino a che tutto il vapore ritorni liquido, e l'aggregato riprenda con ciò il primitivo volume. Si domanda (*a*) la quantità di lavoro esterno realizzato; (*b*) la quantità di calorico assorbito dalla sorgente calorifica; (*c*) e finalmente il rapporto fra il calorico convertito in lavoro esterno e il calorico assorbito; ossia ciò che propriamente costituisce il così detto *effetto utile.*

All'origine essendo $m = 0$, e allora che tutta la massa si è convertita in vapore essendo $m = 1$, così detti v_1 il volume originario, e v_2 il volume ove termina l'espansione a calorico attuale costante e comincia quella a zero trasmissione, sarà per la (*a*)

$$v_1 = \sigma_2 \; ; \quad \text{e} \quad v_2 = s_2 \; ;$$

se poi diciamo v_3 il volume a cui si conduce l'aggregato quando per l'espansione a nessuna trasmissione ha già acquistato il calorico attuale originario T_1, sarà (§ 61)

$$v_3 = \sigma_1 + \frac{A}{A} \cdot \frac{A}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_1} \left\{ \frac{r_2}{T_2} - \int_{T_2}^{T_1} c \cdot \frac{dT}{T} \right\} .$$

Il lavoro durante l'espansione a calorico attuale T_2 sarà

$$(v_2 - v_1)\, p_2 = (s_2 - \sigma_2)\, p_2 \, ,$$

ossia per la (*A*)

$$\frac{A}{A} \cdot \frac{r_2}{T_2} \cdot \frac{p_2}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} .$$

Il lavoro durante l'espansione a zero trasmissione si avrà dalla (*L*) ponendo nella stessa $m_1 = 1$ e permutando T_2 in T_1 e viceversa, essendochè nel caso attuale l'aggregato passa dal calorico originario T_2 al calorico finale T_1.

Il lavoro durante la compressione a calorico attuale T_1 si avrà dalla

$$(\rho_3 - \rho_4)\, p_1 = \frac{A}{A}\, \frac{p_1}{\left(\frac{dp}{dT}\right)_1} \left\{ \frac{r_2}{T_2} - \int_{T_2}^{T_1} c \,.\, \frac{dT}{T} \right\} - (\sigma_2 - \sigma_1)\, p_1 \,.$$

Il lavoro cercato si otterrà sottraendo questo terzo dalla somma dei due primi; se quindi indichiamo, come al solito, con W il lavoro esterno sviluppato mediante l'indicato processo, sarà

$$(M) \quad W = \frac{A}{A}\, \frac{r_2}{T_2} \left\{ T_2 - T_1 \right\} + \frac{A}{A} \left\{ T_1 \int_{T_2}^{T_1} c \,.\, \frac{dT}{T} - \int_{T_2}^{T_1} c \,.\, dT \right\}$$

$$+ \int_{T_2}^{T_1} p \,.\, d\sigma + (\sigma_2 - \sigma_1)\, p_1 \,.$$

Se poi si suppongono c e σ costanti, sarà

$$(M)' \quad W = \frac{A}{A} \left\{ r_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + c \left\{ T_2 - T_1 + T_1 \,.\, \log. \frac{T_1}{T_2} \right\} \right\}.$$

E se diciamo Q la quantità di calorico convertita in lavoro esterno, sarà

$$(N) \quad Q = A \,.\, W \,.$$

La quantità poi di calorico assorbito dalla massa liquida uno per passare dal calorico attuale T_1 al calorico attuale T_2 sarà

$$\int_{T_1}^{T_2} .\, c \,.\, dT \,,$$

e la quantità di calorico assorbita nell'espandersi a calorico attuale costante T_2 fino a completa vaporizzazione sarà

$$r_2 \,.$$

Se quindi diciamo Q_1 la quantità di calorico assorbita, sarà

$$(P) \quad Q_1 = r_2 + \int_{T_1}^{T_2} c dT \,,$$

e se si suppone c costante

$$(P)' \quad Q_1 = r_2 + c \left\{ T_2 - T_1 \right\}.$$

Detto finalmente E l'effetto utile sarà

$$(R) \quad E = \frac{A \cdot W}{Q_1}.$$

Sia per es. $T_1 = 313$ calorie; $T_2 = 473$ id., che corrispondono a 40° e 200° gradi circa del termometro centigrado, (§ 73) essendo

$$r_2 = 464{,}3 \ (\S\ 78),$$

e prendendo

$$\frac{1}{A} = 424 \ (\S\ 80),$$

usando per semplicità delle formole $(M)'$ e $(P)'$ sarà

$$W = 79692 \text{ chilogrammetri},$$
$$Q = 187{,}82 \text{ calorie},$$
$$Q_1 = 624{,}30 \text{ calorie},$$
$$E = 0{,}3,$$

cioè qualche cosa meno di un terzo.

65. Se nel cilindro considerato precedentemente si suppone chiuso un chilogramma di liquido e di vapore del liquido di cui la parte m_1 sia in istato di vapore al calorico attuale T_2, e postolo in presenza d'una sorgente calorifica si lasci espandere a calorico attuale costante fino a che la parte in istato di vapore diventa m_2; poi toltolo all'influenza della sorgente si lasci espandere di nuovo senza ricevere nè scaricare calorico fino a che il suo calorico attuale diventa T_1; quindi, postolo in comunicazione con uno scaricatore, si comprima a calorico attuale costante T_1 fino a che ha acquistato tal volume per cui tolto all'influenza dello scaricatore, e continuata la compressione senza alcuna trasmissione di calorico arrivi al volume e al calorico attuale originario T_2; in base ai precetti precedentemente esposti si troverà

$$\text{calorico assorbito} \ . \ . \ . \ . \ . = r_2 (m_2 - m_1),$$
$$\text{lavoro esterno sviluppato} \ . \ . \ . = \frac{1}{A} r_2 (m_2 - m_1) \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$
$$\text{effetto utile} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Coi dati del paragrafo precedente, seguendo quest'ultimo processo, si avrebbe

calorico assorbito . . . . . = 464,3 calorie,
lavoro esterno sviluppato . . . = 66592 chilogrammetri,
effetto utile . . . . . = 0,338.

CAPITOLO VI.

Della stima numerica del calorico attuale T, *della funzione* μ *e dell' equivalente calorifero* $\frac{1}{A}$

(*A*) Stima di T e μ.

66. Al § 7 abbiamo definito il *calorico attuale* di un corpo qualunque come la quantità di forza viva calefacente ch'è imprigionata sotto questa sua forma originaria nell' unità di massa del corpo stesso, ed abbiamo veduto la sua presenza esserci dimostrata da quel particolare fenomeno cui si dà comunemente il nome di temperatura: quindi al § 47 abbiamo introdotto nelle formole l' elemento della temperatura, supponendo questa misurata da un ordinario termometro, ed abbiamo indicato con μ una particolare funzione di questa temperatura, che si lega al calorico attuale mediante l' equazione

$$\frac{A}{\mu} = \frac{A}{T}\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

Per noi dunque, e così comunemente, la parola temperatura rappresenta una quantità, un numero e propriamente il numero dei gradi che segna il termometro prescelto quando, posto in perfetto contatto col corpo che si considera, non vi ha più comunicazione di forza viva calefacente dall' uno all' altro, ossia, come si dice, quando è in perfetto equilibrio di temperatura col corpo stesso, che per noi corrisponde all' eguaglianza dei due calorici attuali. Tanto T quanto μ si considerano dunque come funzioni di questo numero t, e si tratta ora di vedere in qual modo le dette funzioni si legano a questo numero, ossia alle indicazioni che ci sono date dai nostri ordinarii termometri, così da poter avere il valore numerico delle funzioni stesse per ognuna delle indicazioni, per ognuno dei gradi, di un termometro determinato.

67. Propriamente la temperatura altro non è che la tendenza che ha l'energia calorifica di passare da un corpo più caldo in uno più freddo, od anche lo

sforzo ch' essa fa per convertirsi in lavoro o in forza viva ordinaria; essa in fondo altro non è che la manifestazione esterna del calorico attuale, e per natural conseguenza lo stesso calorico attuale si potrebbe denominare temperatura; e se noi abbiamo preferito quella denominazione, questo fu unicamente per non confonderlo con ciò che più comunemente s' intende sotto una tale parola. Questa tendenza ci è resa manifesta da alcuni fenomeni esterni, e se noi potessimo trovare un fenomeno esterno, misurabile in numeri, tale che il numero che lo rappresenta per eguali aumenti di calorico attuale aumentasse di eguali quantità, un tale fenomeno dovrebbe essere scelto a misurare il calorico attuale, ed esso misurerebbe pure la temperatura del corpo, almeno nel senso netto e preciso in cui dev' essere presa questa denominazione.

Ora fra i fenomeni che si presentano al variare del calorico attuale di un corpo due possono facilmente misurarsi ed esprimersi in numeri; questi sono l' aumentata tensione o forza elastica del corpo quando non gli sia permesso di mutar di volume; e l' altro l' aumento di volume quando, contrapponendovi un' esterna pressione costante, rimane invariata la sua tensione. Egli è poi del secondo dei detti fenomeni che comunemente ci valiamo nella costruzione degli ordinarii termometri, nei quali per grado di temperatura s' intende una determinata parte aliquota dell' aumento totale di volume che prova la sostanza termometrica dall' essere in perfetto equilibrio di calorico attuale col ghiaccio che si fonde, all' essere di nuovo in perfetto equilibrio di calorico attuale coi vapori che si svolgono dall'acqua bollente sotto alla normale pressione atmosferica, e sempre supponendo che sul corpo stesso si eserciti quest' ultima pressione.

Egli è evidente che, così operando, quello che diciamo temperatura, e che abbiamo espresso colla lettera t, non ha più col calorico attuale che una relazione di dipendenza crescendo o calando col medesimo, ma non più la relazione di proporzionalità; a meno che le esperienze non dimostrassero questo aver luogo almeno per una sostanza particolare, nel qual caso questa sostanza dovrebb' essere scelta a campione cui riportare la misura di questo importantissimo elemento termico.

68. L' esperienza dimostra che per ogni sostanza, in ogni suo stato, vi ha sempre una determinata relazione, più o meno complicata, più o meno nota, fra la sua tensione o forza elastica, il suo volume e il numero dei gradi rappresentante la sua temperatura, cioè fra p, v e t; relazione che per le sostanze gazzose è abbastanza bene espressa delle due leggi combinate di Mariotte e di Gaylussach.

Ora se si avesse una sostanza la quale ubbidisce esattamente a quest' ultime leggi, e nella quale fosse di più assolutamente nullo il lavoro interno, e che perciò espandendosi a calorico attuale, o a temperatura costante assorbisse solamente tanto calorico quanto se ne converte nel lavoro esterno, in questa sostanza gli aumenti di volume sarebbero esattamente proporzionali agli aumenti di calorico attuale, e si avrebbe in essa il desiderato campione.

Infatti, detto a il valore inverso del coefficiente di dilatazione della sostanza, per la legge di Mariotte e Gayllusach si avrebbe

$$p \,.\, v = \frac{p_0 v_0}{a} (a + t) ,$$

e d' altra parte, essendo il lavoro esterno sviluppato per una espansione dv ed una tensione p eguale a $p \,.\, dv$ si avrebbe per ipotesi

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) dv = Ap \,.\, dv ,$$

donde

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = A \,.\, p \,.$$

Ma è anche (XX)

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) = A\mu \,.\, \left(\frac{dp}{dt}\right) ,$$

dunque

$$\mu = \frac{p}{\left(\frac{dp}{dt}\right)} ,$$

cioè, per la precedente,

$$\mu = a + t ,$$

donde per la (XVI), essendo K una costante,

$$T = K (a + t) ,$$

e quindi

$$\Delta T = K \,.\, \Delta t$$

come si è accennato.

Il valore di K dipende dall' unità di calorico scelta. Per noi l' unità di calorico essendo la caloria, ammettendo misurato t in gradi centigradi, se supporremo che t invece di rappresentare gradi rappresenti calorie, sarà $K = 1$, e allora la quantità

$$a + t ,$$

se rappresenta il calorico attuale è un numero di calorie, se invece rappresenta la funzione μ allora è un numero astratto.

69. Importantissimi esperimenti di Joule e Thomson, sui quali avremo or ora occasione d'intrattenerci, mostrarono che comprimendo varii gas di una determinata quantità il calorico sviluppato dalla compressione è più grande del calorico corrispondente al lavoro speso nella compressione, ma non in tutti egualmente: per esempio comprimendo da 1 a 4,7 atmosfere circa e a 10° centigradi dell'idrogeno, dell'aria atmosferica e del gas acido carbonico, il calorico svolto dalla compressione eccede il calorico corrispondente al lavoro speso nella compressione stessa di $\frac{1}{630}$ nel primo, di $\frac{1}{174}$ nel secondo, e di $\frac{1}{32}$ soltanto nel terzo della quantità corrispondente di calorico. Questo fatto mostra indubbiamente l'esistenza di un lavoro interno anche nei gas, e mostra contemporaneamente che l'interno lavoro non è eguale per tutti; che, per esempio, è maggiore nel gas acido carbonico che nell'aria, e in questa maggiore che nell'idrogeno. Sebbene la divergenza sia piccolissima nell'idrogeno, ed anche abbastanza piccola nell'aria atmosferica, in cui le dirette esperienze mostrarono che alla pressione atmosferica e intorno a 16° cent. circa di temperatura per una compressione che riduca la tensione al doppio il calorico sviluppato eccede quello equivalente al lavoro speso solo di un trecentesimo circa; pure una tale divergenza avendo luogo, e di più avendo le acuratissime esperienze di Regnault mostrato che la legge di Mariotte e di Gayllusach non è che approssimata e nulla più, nessuna delle dette sostanze potrebbe teoricamente essere impiegata alla valutazione del calorico attuale, come si vorrebbe nel precedente paragrafo; e tanto meno il potrebbero le altre sostanze conosciute nelle quali il lavoro interno è ancora più grande, e per le quali non si verifica, nemmeno approssimativamente, la legge suesposta.

Non volendo però mutare il sistema di termometria finora usato, egli è mestieri cercar di rendere le differenze le minori possibili, locchè si otterrà usando di un perfettissimo termometro ad aria atmosferica, e calcolare i valori delle dette funzioni per ogni grado di questo termometro, o almeno calcolarne un valor medio il quale possa essere usato nelle varie applicazioni senza tema di error troppo grande. Unico ragionevol ripiego a cui possiamo appigliarsi quando si rifletta che noi vogliamo campionare le dette quantità con un campione imperfetto.

Se i gradi di temperatura fossero quelli corrispondenti ad un altro termometro qualunque, allora bisognerà prima ricondurli a quelli che vi corrisponderebbero nel termometro ad aria, locchè dopo le esperienze già note sarà sempre assai facile.

70. Fra le varie esperienze le quali possono servire a determinare il valore numerico delle dette funzioni, ed il loro valor medio, pare a me che meritino la preferenza quelle eseguite dai signori Joule e Thomson intorno agli effetti termici dei fluidi in moto *(On the Thermals effects of fluids in Motion)* che si trovano esposte con ogni maggiore dettaglio nei volumi 143 parte terza, e 144 parte seconda delle Transazioni filosofiche della Reale Società di Londra per gli anni 1853-1854. Raccomandando lo studio delle predette memorie noi non ne riporteremo qui che l'idea generale, e quelle conclusioni che servono allo scopo che ci siamo proposti.

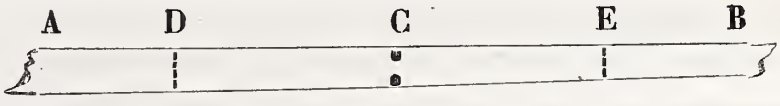
Per ben comprendere lo spirito di questa ricerca è prima mestieri ricordare il fenomeno che si presenta allora che un fluido aeriforme qualunque, per esempio dell'aria atmosferica, passa per un piccolo foro da un recipiente in cui la tensione è maggiore in un altro dove la tensione è più piccola. Le più semplici esperienze mettono tosto in evidenza un raffreddamento della parte dove la tensione è maggiore e nella stessa vena fluente, ed un riscaldamento al di là del foro. Tanto il riscaldamento quanto il raffreddamento della massa fluida sono assai grandi in vicinanza del foro, e vanno gradatamente discendendo coll'allontanarsi dal medesimo: in somma, con piccola variazione, i due effetti si bilanciano, lasciando però una piccola preponderanza all'effetto del raffreddamento. (Veggasi la prima parte della memoria di Joule e Thomson sopra citata, e la memoria di Joule intitolata: *On the changes of Temperature produced by the Rarefaction and Condensation of Air.* — Philosophical Magazine — Third series, Vol. 26, Mag 1845.)

La spiegazione del fatto è semplicissima. L'aria spinta dall'eccedente pressione attraverso al foro vince una resistenza oppostale dalla pressione del fluido nel secondo vaso, ed acquista una velocità tanto maggiore quanto è più grande la differenza delle pressioni; vi ha dunque un lavoro esterno compiuto ed un lavoro disponibile posto in serbo nell'aria fluente sotto forma di forza viva ordinaria. Una parte dunque del calorico attuale posseduto dall'aria fluente e dalla circonvicina dalla parte donde fluisce si converte in lavoro, donde l'accennato sbassamento della temperatura. Al di là del foro l'aria per l'attrito lungo le

labbra del foro, non che per l'attrito reciproco delle particelle perde la forza viva acquistata, per modo che ad una certa distanza tutta questa forza viva o lavoro disponibile resta estinta, e quindi viene convertita in calorico, donde il provato aumento di temperatura: la piccola perdita di calorico che ancora sussiste proviene dalla parte del calorico attuale che resta definitivamente convertita in lavoro.

Ora egli è appunto di questo fatto che gli autori citati si valsero, in fra le altre ricerche, anche alla determinazione di μ e quindi di T, nel modo che qui cercheremo di esporre quanto più brevemente ci sarà dato di farlo, rimandando per tutto il dettaglio alla memoria originale più sopra citata.

Fig. 17.



71. Si supponga un lungo tubo cilindrico *AB* fig. 17 interrotto in *C* da un diafragma in cui siasi aperto un piccolo foro, e che con mezzi facili a immaginare si faccia scorrere uniformemente lungo il tubo stesso una corrente di gas, per es. d'aria atmosferica, prendendolo ad una determinata temperatura, e facendolo uscire alla stessa temperatura, locchè non presenta difficoltà prendendo il tubo abbastanza lungo. Considerando il movimento del gas scorrente per entro il detto tubo si vedrà facilmente che fino ad una certa distanza, per es. *CD*, dal foro il moto del gas sarà uniforme, costante ne sarà la densità e la temperatura nonchè il volume che passa per una qualunque sezione nell'unità di tempo; ma a cominciare da *D* fino al foro, e anche per un certo tratto *CE* al di là del foro stesso, varieranno tutte le predette quantità, e varieranno secondo leggi particolari dipendenti dal legame che nel fluido scorrente esiste fra il suo volume, la tensione e la temperatura, e dalla legge secondo cui il calorico attuale si converte in forza viva, e questa in quello. Oltrepassata la sezione *E* il fluido riprenderà il moto uniforme e la temperatura di prima, ma, generalmente parlando, sarà differente di prima la sua tensione e il volume che nell'unità di tempo passa per ogni sezione, sebbene queste quantità restino costanti per tutto il tronco successivo.

Nelle esperienze citate in luogo di un orificio avvi un turaccio spugnoso di sostanza non conduttrice del calorico; ed è scelto il turaccio di sostanza spu-

gnosa, per esempio cotone, invece di un semplice orificio, perchè il lavoro sviluppato del fluido che si espande sia immediatamente spento dall' attrito senza che alcuna apprezzabile porzione del medesimo sia temporariamente impiegata a ingenerare la forza viva ordinaria od a produrre il suono: ed è poi scelta la sostanza non conduttrice del calorico allo scopo di diminuire quanto è più possibile tutte le perdite per la conduzione sia fra l' aria dall' uno dei lati e quella dall' altro lato, sia fra il gas e la materia circostante. L' uso della sostanza spugnosa non conduttrice permette anche di supporre che la conversione del calorico in forza viva ordinaria, e di questa in calorico si effettui ad ogni singolo istante, e che la temperatura non varii che per la sola parte che resta definitivamente convertita in lavoro.

Un bagno in cui trovasi immerso il tubo alla temperatura del gas scorrente pel tubo stesso, ch' è il più possibilmente la temperatura esterna, è ordinato a mostrare il guadagno o la perdita di calorico che avviene durante le trasformazioni che si succedono nel tronco interrotto dal turaccio citato.

Nelle varie esperienze si misurarono accuratamente le tensioni e i volumi del gas che passano per ogni unità di tempo nei due tronchi dove il moto è già uniforme e le dette quantità costanti, e la differenza fra la temperatura del bagno e quella della corrente d' aria uscente del turaccio spugnoso, differenza che i detti autori chiamano *effetto refrigerante* (the cooling effect), e ch' è proporzionale alla quantità di calorico che dovrebb' essere comunicata ad ogni chilogramma della corrente di gas ch' esce dal turaccio spugnoso a far sì che la sua temperatura diventi eguale a quella del bagno; ossia, ch' è lo stesso, alla quantità di calorico che converrebbe aggiungere ad ogni chilogramma della detta corrente a far sì che abbandonasse il turaccio spugnoso colla stessa temperatura con cui è entrata, temperatura ch' è appunto quella del bagno.

Ciò premesso ecco come le dette esperienze possono servirci allo scopo che ci siamo proposti. (Veggasi *Thomson on the Dynamical Theory of Heat.* — *Philosophical Magazine* — Furth Series, Vol. 4.° fascicolo dicembre 1852, pag. 430).

72. Sia t la temperatura del bagno e quindi del gas scorrente uniformemente pel primo e pel secondo tronco del tubo, misurata da un perfettissimo termometro ad aria; sieno p_0 e p_1 le tensioni del gas nei detti tronchi, u_0 ed u_1 i volumi che nei detti tronchi passano per ogni sezione nell' unità di tempo; sieno p e v la tensione e il volume che passa nel tempo uno per la sezione gene-

rica nel tronco interrotto dal diafragma e nel quale si succedono le accennate conversioni; sia finalmente $A\delta$ l'effetto refrigerante in gradi centigradi; e quindi, se K è la capacità calorifica del gas, sia $KA\delta$ il detto effetto in unità di calorico. $KA\delta$ rappresenterà la quantità di calorico che conviene comunicare alla massa uno del fluido fluente pel foro a portare la sua temperatura a t; la quale quantità di calorico aggiunta a quella prodotta dall'attrito darà la quantità totale di calorico che dev'essere assorbito per produrre il finale lavoro dinamico.

Ora invece che le due parti del tubo sieno separate dall'orificio, si supponga che lo sieno da un embolo scorrente lungo il tubo, e che il volume u_0 del fluido dalla parte della tensione p_0 sia racchiuso fra un altro embolo esso pure scorrente liberamente pel tubo, e che i due emboli scorrano così che il secondo giunga nell'unità di tempo al luogo occupato dal primo, e che nel frattempo il fluido racchiuso fra i due emboli siasi dilatato fino a raggiungere il volume u_1 e la tensione p_1 assorbendo tanto calorico quanto è necessario a conservargli inalterata la temperatura; dopo ciò si supponga tolto l'embolo dalla parte della tensione p_1 e che si lasci il fluido continuare liberamente il suo movimento: così si supponga aver luogo per tutti i successivi volumi. L'effetto finale sarà il medesimo, la sola differenza sta in ciò che in questo caso la trasmissione del fluido si opera senza alcuna perdita di lavoro dinamico per l'attrito del fluido.

Ora la quantità di calorico assorbito per l'espansione fra i due emboli è

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv = A\frac{1}{\mu}\int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{dp}{dt}\right) dv,$$

il lavoro dinamico dato dall'embolo

$$\int_{u_0}^{u_1} p dv + p_0 u_0 - p_1 u_1,$$

che corrisponde ad una quantità di calorico

$$A\left\{\int_{u_0}^{u_1} p dv + p_0 u_0 - p_1 u_1\right\}.$$

Se ora la trasmissione si eseguisca invece attraverso ad un orificio, questo lavoro sarà perduto come lavoro dinamico esterno e impiegato a ingannare l'ordinaria forza viva, che si convertirà in calorico a cagione dell'attrito, e quindi, per ciò che si è detto sopra

$$KA\delta + A\left\{\int_{u_0}^{u_1} p\,dv + p_0 u_0 - p_1 u_1\right\} = A\,\frac{1}{\mu}\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{dp}{dt}\right)dv\,,$$

da cui

$$(\text{XXV})\quad \mu = \frac{\int_{u_0}^{u_1} p\,dv}{\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{dp}{dt}\right)dv} + \frac{K.\delta + p_0 u_0 - p_1 u_1}{\int_{u_0}^{u_1}\left(\frac{dp}{dt}\right)dv}\,.$$

73. Per poter usare della precedente formola alla determinazione del valore di μ sarebbe mestieri di conoscere la legge che nel tronco DE, fig. 17, lega le quantità p, v e t; legge che noi non conosciamo che approssimativamente e non più; però siccome le variazioni mostrate dall'esperienza nella detta legge sono pei gas permanenti, e per l'aria principalmente, assai piccole, così possiamo valerci della legge stessa, almeno per determinare un medio valore di μ abbastanza prossimo al vero da potersi usare senza tema di grosso errore nella maggior parte dei casi pratici.

Suppongasi dunque verificarsi nel tronco DE la legge di Mariotte e di Gayllusach, e che sia C il valore inverso del coefficiente di dilatazione alla temperatura e alla tensione delle esperienze, si avrà

$$p.v = H(c+t)\,,$$

essendo H una costante, e quindi

$$\mu = c + t + \frac{K.\delta}{H.\log.\frac{u_1}{u_0}} - \frac{p_1 u_1 - p_0 u_0}{H.\log.\frac{u_1}{u_0}}\,,$$

od anche

$$(\text{XXV})\quad \mu = c + t + \frac{K.\delta}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}} - \frac{p_1 u_1 - p_0 u_0}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}}\,,$$

potendosi, attesa la piccolezza delle quantità $K\delta$ e $p_1 u_1 - p_0 u_0$, usare nel denominatore il suo valore approssimativo.

Ora, trattandosi dell'aria atmosferica, secondo le esperienze di Regnault, c diminuisce al crescere della tensione; per es. essendo 272,85 per medio fra 0° e 100° alla tensione di una atmosfera, è invece 270,92 a tre atmosfere ed un

terzo; e così pure, secondo il medesimo, al crescere della tensione cresce invece la quantità

$$\frac{p_1 u_1 - p_0 u_0}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}}.$$

Le esperienze poi di Joule e Thomson mostrarono che al crescere della tensione cresce pure il termine

$$\frac{K.\delta}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}},$$

per cui le variazioni della quantità

$$C + \frac{K.d}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}} - \frac{p_1 u_1 - p_0 u_0}{H.\log.\frac{p_0}{p_1}},$$

al variare della tensione in parte si compensano fra di loro, cosicchè per esempio a 16° centigradi circa, per tensioni varie da una a quattro atmosfere circa la predetta quantità ha il valore costante

$$273°,68,$$

con error medio appena di 0°,25.

Per ciò noi possiamo ritenere con grandissima probabilità a zero gradi essere

$$\mu_0 = 273,7,$$

e quindi per la (XXV) il valore approssimato di μ a t gradi di un esatto termometro ad aria essere

$$\text{(XXVI)} \quad \mu = 273,7 + t,$$

e quindi

$$\text{(XXVII)} \quad T = 273,7 + t \text{ calorie.}$$

74. I precedenti valori di μ e T non si possono ritenere abbastanza esatti che per temperature non molto distanti da zero, per le altre temperature essi probabilmente subiranno delle piccole variazioni, ma io non conosco esperienze le quali valgano ad accertare il loro valore alle varie temperature; solo sembra che le dette variazioni non possano essere mai molto grandi, e che con ogni

probabilità si possano sempre trascurare nelle più comuni applicazioni delle formole generali date superiormente alle macchine termodinamiche, specialmente, lo ripetiamo, in confronto alle difficoltà pratiche di accertare il valore numerico di altri elementi, e di soddisfare pienamente a tutte le condizioni teoriche del problema.

Per mostrare la probabilità che le dette variazioni nei valori di μ e T sieno sempre piccolissime, mi accontenterò di accennare qui il tentativo fatto dal Thomson di ridurre in formola empirica il valore di t espresso per T fondandosi sopra i dati delle esperienze di Regnault circa il coefficiente di espansione dell' aria a differenti densità, sopra i risultamenti del medesimo intorno alla compressibilità dell' aria, e finalmente sopra i dati raccolti dalle sue stesse esperienze intorno agli effetti termici dei fluidi in moto; tentativo che si troverà sviluppato con ogni dettaglio nella quinta sezione della memoria dello stesso autore già più volte citata superiormente. Secondo la detta formola si avrebbero le relazioni consegnate nella tavola seguente:

t	$T-t$	t	$T-t$	t	$T-t$
0°	273,70	100°	273,70	220°	273,95
20°	273,66	120°	273,73	240°	273,99
40°	273,65	140°	273,77	260°	274,04
60°	273,65	160°	273,81	280°	274,09
80°	273,67	180°	273,86	300°	274,14
		200°	273,90		

Dall' esame della predetta tavola risulta che, secondo ogni probabilità, in base delle esperienze finora note, si possono ritenere per medio come abbastanza esatti i valori dati superiormente, ricorrendo tutto al più alla tavola precedente tutte le volte in cui si potesse desiderare un' approssimazione alcun poco maggiore.

(*B*) Valore di $\frac{A}{A}$.

75. Resta finalmente che noi vediamo in qual modo può determinarsi il

valore dell' equivalente calorifico $\frac{1}{A}$, e quale ne è il suo valor più probabile. A quest' uopo lascieremo da parte gli esperimenti di Joule intorno agli effetti calorifici dell'elettro-magnetismo, perchè, sebbene si prestino maravigliosamente alla dimostrazione del fatto fondamentale della nostra teoria, pure non pare a me che possano egualmente bene servire alla determinazione numerica dell' equivalente calorifico, attesa l' incertezza un po' grande dei dati relativi, e ci varremo invece degli esperimenti dello stesso Joule intorno al calorico sviluppato dall' attrito, ed al calorico prodotto dalla condensazione e dalla rarefazione dell' aria, che si trovano nelle due memorie seguenti dello stesso autore.

1.ª *On the Mechanical Equivalent of Heat — Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1850, Parte I, pag. 60.

2.ª *On the canges of temperatura*, ec. citata al § 70.

76. Agitando un liquido qualunque, soffregando due corpi l' un contro l' altro, il liquido e i due corpi si riscaldano pel lavoro speso nell' agitare il liquido, nel soffregare i due corpi che si è convertito in calorico. Misurando accuratamente il lavoro speso e il corrispondente aumento di temperatura il Joule determinò l' equivalente calorifico con una serie di esperienze condotte colla massima diligenza e consegnate nella prima delle memorie sopra citate, alla quale rimanderemo chi desiderasse di esaminarne tutto il dettaglio, accontentandoci qui di riportarne i risultamenti finali; solo abbiamo tenuto conto, mediante la solita teoria degli errori, del peso relativo delle singole osservazioni, perchè sieno assai più probabili i medii finali. I risultamenti del Joule si possono riassumere nelle conseguenze seguenti:

(*a*) Agitando dell' acqua

Numero delle esperienze . . . . . = 40

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 423,92

Error medio delle singole osservazioni pure in chilogrammetri . . . . . = 7,24

Peso relativo delle osservazioni . . . . = 1712,96.

(*b*) Agitando del mercurio

Prima serie

Numero delle esperienze . . . . . = 20

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 423,99

Error medio delle singole osservazioni in chilogrammetri . . . . . = 44,42
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 45,56;

Seconda serie

Numero delle esperienze . . . . . = 30
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 425,38
Error medio delle singole osservazioni in chilogrammetri . . . . . = 12,70
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 561,07.

(*c*) Sfregando ghisa con ghisa.

Prima serie

Numero delle esperienze . . . . . = 10
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 426,25
Error medio delle singole osservazioni in chilogrammetri . . . . . = 134,46
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 5,013;

Seconda serie

Numero delle esperienze . . . . . = 10
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 424,60
Error medio delle singole osservazioni in chilogrammetri . . . . . = 68,65
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 19,12.

Secondo i dati precedenti si ha

facendo concorrere tutte le esperienze

Numero delle esperienze . . . . . = 110
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 424,29
Error medio del medio aritmetico in chilog. = 1,27.

Che se lasciamo da parte le esperienze che si riportano allo sfregamento della ghisa contro ghisa, sul dubbio che un qualche lavoro non stimato sia stato consumato nello staccare alcune particelle del metallo, come è avvertito dallo stesso Joule, avremo

Numero delle esperienze . . . . . = 90

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 424,27

Error medio del medio aritmetico in chilog. = 1,16.

Ed è quest' ultimo valore a cui noi daremo più volentieri la preferenza.

77. Del fatto che comprimendo un corpo qualunque esso si riscalda, e dilatandosi, vincendo una corrispondente pressione esterna, si raffredda, pel lavoro dinamico che si converte in calorico nel primo caso, e pel calorico attuale del corpo che si converte in lavoro dinamico nel secondo, lo stesso Joule nella seconda delle sue memorie sopra citate, dedusse pure il valore dell' equivalente calorifico computando il calorico generato nella compressione di una massa d' aria, o perduto nella rarefazione e confrontandolo col corrispondente lavoro speso o guadagnato. L' esame della predetta memoria conduce alle conclusioni seguenti:

(*a*) Mediante la compressione dell' aria

Prima serie

Numero delle esperienze . . . . . = 6

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 451,52

Error medio delle singole osservaz. in chil. = 11,21

Peso relativo delle osservazioni . . . . = 815,90

Seconda serie

Numero delle esperienze . . . . . = 5

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 436,16

Error medio delle singole osservaz. in chil. = 4,26

Peso relativo delle osservazioni . . . . = 5243,05.

(*b*) Mediante la rarefazione dell' aria

Prima serie

Numero delle esperienze . . . . . = 6

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 449,87

Error medio delle singole osservaz. in chil. = 10,09

Peso relativo delle osservazioni . . . . = 992,45

Seconda serie

Numero delle esperienze . . . . . = 7

Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 446,58

Error medio delle singole osservaz. in chil. = 9,40
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 1128,67

Terza serie

Numero delle esperienze . . . . . = 7
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 416,96
Error medio delle singole osservaz. in chil. = 3,42
Peso relativo delle osservazioni . . . . = 7444,16.

Combinando insieme i dati precedenti si avrà definitivamente

Numero delle esperienze . . . . . = 31
Valor medio di $\frac{1}{A}$ in chilogrammetri . . = 429,43
Error medio del medio in chilogrammetri . = 1,02.

L' accordo di quest' ultimo valore con quello trovato precedentemente è per certo superiore a quanto si sarebbe potuto impromettersi da esperienze delicatissime, e sulle quali hanno tanta influenza i possibili errori di osservazione.

78. Senza voler qui richiamare tutti i metodi usati per la determinazione dell' equivalente calorifico, ci limiteremo a mostrare l' uso delle formole date ai paragrafi 58 e 63; locchè varrà anche ad appoggiare sempre più il principio fondamentale della presente teoria. Ci serviremo per ciò delle esperienze fatte col mezzo dell' acqua.

Al § 58 abbiamo dimostrata l' equazione

$$r = A(s - \sigma)\,\mu \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right),$$

e, se diciamo π il peso di un metro cubo di acqua alla temperatura t, e πq il peso pure di un metro cubo di vapore al suo massimo di densità e alla temperatura t, essa si muterà nell' altra

$$r = \frac{A(1-q)}{\pi q}\,\mu \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right),$$

da cui

$$A = \frac{\pi q}{1-q} \cdot \frac{r}{\mu\left(\frac{dp}{dt}\right)}.$$

In questa equazione, stando alla definizione data di r, il suo valore si troverà così. Chiamando λ la quantità di calorico necessaria ad elevare un chilogram-

ma di acqua da o° a t° e poi ad evaporarla a questa temperatura, e c il calorico specifico dell' acqua, sarà

$$r = \lambda - \int_o^t c \,.\, dt \,.$$

Ora per le esperienze di Regnault si ha

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305 \,.\, t \,,$$

$$c = 1 + 0{,}00004 \,.\, t + 0{,}0000009 \,.\, t^2$$

quindi

$$r = 606{,}5 - 0{,}695 \,.\, t - 0{,}00002 \,.\, t^2 - 0{,}0000003 \,.\, t^3 \,.$$

In quanto ai valori di $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ si avranno dalle esperienze di Regnault: μ dalla tavola da noi riportata al § 74; π dalle esperienze di Despretz o di Hagen; ma non si hanno ancora esperienze dirette le quali servano a trovare i valori di q alle varie temperature. Noi però abbiamo il dato di Gaylussach che alla temperatura 100° sotto la normale pressione atmosferica corrispondente a 760 millimetri di mercurio il volume del vapore d' acqua è 1696 volte il volume di un egual peso di acqua presa al suo massimo di densità. Partendo da questo dato poniamo

$$t = 100.$$

Allora, in base delle esperienze di Hagen (*Ueber die Ausdehnung des distillirten Wassers*, ec. — Accademia di Belino, anno 1855), le quali dicono che un volume uno di acqua a 4° cent. diventa 1,042969 a 100° avremo

$$\pi = 958{,}8015 \text{ chil.},$$

e quindi pel dato riportato sopra di Gaylussach

$$q = 0{,}000614958,$$

e per la formola superiore

$$r = 536{,}5.$$

Delle esperienze poi di Regnault si ha per $t = 100$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = 27{,}2 \text{ mill. di mercurio},$$

che valutati in chilogrammi sopra un metro quadrato, come lo esige la formola, daranno

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = 369{,}526 \text{ chil. ;}$$

di più pel § 74 sarà

$$\mu = 373{,}7.$$

Sostituendo questi numeri nella formola superiore si avrà

$$\frac{1}{A} = 436{,}27.$$

79. Finalmente come applicazione delle formole date al § 63 ci faremo a calcolare il valore di $\frac{1}{A}$ in base delle esperienze di Seguin l'ainé, che sono riportate nel volume 25 del *Comptes Rendues de l' Académie des Sciences*. Adopreremo a quest' uopo la formola approssimata $(L)'$, e in luogo del $\left(\frac{dp}{dT}\right)$ il $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ rimarcando che allora la quantità

$$\frac{p}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}$$

sta in luogo dell' altra

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{p}{\left(\frac{dp}{dT}\right)} T,$$

e siccome μ è un numero astratto, così la quantità stessa rappresenta unità di calorico. Il p e il $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ li prenderemo dalle tavole di Regnault.

Secondo le predette esperienze, lasciando dilatare il vapore dell' acqua a zero trasmissione, il lavoro esterno sviluppato per ogni grado sarebbe

da 180°	cent.	a 160°	cent.	.	=	chilogrammetri	395
» 160°	»	140°	»	.	=	»	412
» 140°	»	120°	»	.	=	»	440
» 120°	»	100°	»	.	=	»	472
» 100°	»	80°	»	.	=	»	529.

Per la prima delle dette esperienze sarà dunque

$$m_1 = 1 \ , \ c = 1 \ , \ T_1 = 453{,}7 \ , \ T_2 = 433{,}7 \ , \ W = 7900^{km} \ .$$

Dalle tavole di Regnault si avrà

$p_1 = 7546{,}39$ mm. di mercurio $\left(\frac{dp}{dt}\right)_1 = 173{,}425$ mm. di mercurio

$p_2 = 4651{,}62$ » $\left(\frac{dp}{dt}\right)_2 = 118{,}460$ »

e dalla formola del paragrafo precedente

$$r_1 = 479\ ;$$

con questi dati la formola $(L)'$ darà

$$\frac{1}{A} = 418{,}82^{km}\ .$$

Calcolando nella medesima maniera tutte le altre esperienze si avrà successivamente

$$\frac{1}{A} = 404{,}83^{km}\ ,$$

$$\frac{1}{A} = 417{,}54^{km}\ ,$$

$$\frac{1}{A} = 396{,}49^{km}\ ,$$

$$\frac{1}{A} = 409{,}05^{km}\ .$$

Delle quali prendendo il medio si avrà

$$\frac{1}{A} = 409{,}35^{km}\ ,$$

con un

error medio delle singole determinazioni $9{,}25^{km}$

error medio del medio aritmetico . . $4{,}14^{km}$.

Se si prende il medio dei due valori trovati in questo e nel precedente paragrafo si avrà

$$\frac{1}{A} = 422{,}81$$

con piccolissima differenza coi valori assegnati superiormente.

80. Molte altre esperienze vennero intraprese in varii luoghi da varii e abilissimi osservatori allo scopo di determinare il valore numerico del detto equivalente calorifico, e se alcune condussero a valori sensibilmente differenti dal valor medio e più probabile da noi dato al § 76, non credo poter questo infirmare menomamente il principio fondamentale assunto, ma doversi invece attribuire queste differenze alla difficoltà delle esperienze, ed al non aver potuto tenere esatto conto di tutte le circostanze influenti.

Dopo quanto si è veduto nei precedenti paragrafi credo poter essere pienamente autorizzati a ritenere per ora come abbastanza esatto il numero 424,27, od anche solo 424, che noi, con altri, diremo l' *equivalente di Joule* in riconoscenza delle fatiche così luminosamente spese da questo abilissimo osservatore.

E qui pongo fine a questa prima memoria ordinata a porgere una completa esposizione della teoria dinamica del calorico, riserbandomi a tempo opportuno, e quando sieno per permettermelo le molteplici mie occupazioni, a dare la teoria delle macchine termo-dinamiche in altre separate memorie.

(*Letta il 14 novembre* 1858).

SULLE CAUSE

CHE RESERO FINORA INFRUTTUOSE LE MISURE PRESE PER ABOLIRE LA TRATTA DEI NEGRI

E COME UN TALE SCOPO SI POTREBBE RAGGIUNGERE

RIFLESSIONI

DEL M. E. CAV. AB. LODOVICO MENIN

La tratta dei Negri, antico delitto, incompatibile colla moderna civiltà, condannato dalla ragione, proscritto dall' Evangelo si conserva e forse cresce ai nostri dì. Nel 1815 l' Inghilterra, presso il congresso di Vienna, propose la tratta dei Negri a tema d' una questione diplomatica e, secondata dalla Francia nonchè dal concorde plauso di tutta Europa, s' assunse d' iniziarne l' abolimento. L' ardore, la sollecitudine, con cui diessi ad attuare il nobilissimo divisamento, troncò improvvidamente gl' indugi della riflessione. La Gran Bretagna sperò che un' armatetta di vascelli i più velieri, corseggiando l' Atlantico, lustrando le coste occidentali dell' Africa, guardando le foci dei fiumi, catturando quanti ne uscivano legni carichi di merce umana, n' avrebbe in breve giro d' anni l'ignominioso traffico annichilito. Ma il darla di corto finita con un inveterato abuso, ma lo sciogliere di netto una questione sommamente complessa, con subita e parziale risoluzione, non era di fermo ben consigliato partito, anzi doveva originare, siccome originò, il sospetto che sotto l' armamento allestito a cacciare i *negrieri* ben altro covasse da quello che al di fuori appariva. L' Inghilterra per altro operava con buona fede, e, diciamolo pur francamente, fu colpa d' inconsideratezza, se le fallì la speranza.

Eccoci all' anno 1859, quasi mezzo secolo dopo il congresso di Vienna. L' Inghilterra, devesi ripeterlo a sua gloria, dispendiò più che quaranta milioni di sterlini, presso che un miliardo di franchi, non mettendo a conto le ciurme

divorate dal rabbioso sole dei tropici, ed il traffico dei Negri continuò sempre dall' Africa all' America (1) coll' aggiunta di quello degli Stati dell' Unione dal Nord al Sud (2). La speculazione americana, da sordidezza resa ingegnosa, inventò nuovi stromenti d' agricoltura cui aggiogare a foggia di giumenti i Negri dell' uno e dell' altro sesso flagellandone a morte la stanchezza e lo sfinimento. Dieci milioni di Negri vivono in America, se pur l' essere riservato a sì scellerato governo, può dirsi vivere. In questi ultimi anni l' introduzione dei Negri aumentò al Brasile ed a Cuba. Il tragitto degli schiavi sotto forma di contrabbando divenne notabilmente più atroce. In fine tornarono vani gli sforzi dell' Inghilterra per mantenere il diritto di visita apertamente, non ha guari, disconosciuto dal presidente degli Stati Uniti Bucanano.

In mezzo a questi infelici risultamenti un armatore portoghese visitò il navilio francese *Charles et Georges*, e perchè portava carico di Negri ne 'l catturò. Tutti conoscono l' esito di questa clamorosa cattura. I Negri furono battezzati *immigranti liberi*, e la ragione del più forte ricondusse franco ed indenne il navilio. Ma l' imperatore Napoleone III, o molto gli calesse distrarre l' attenzione dalla praticata soperchianza, o riputasse giunta l' opportunità di condurre l' abolimento della tratta dei Negri a più ragionate ed efficaci misure, indirizzò al principe suo cugino l' invito d' ordinare « un esame teorico e pratico, fondato

(1) Richardson, morto nella sua esplorazione del Soudan il giorno 4 marzo 1851 lasciava scritto nel suo giornale quanto segue: « Gli schiavi più vigorosi vanno a Nyffé dove vengono imbarcati per l'America. Sono maschi la maggior parte, preecdentemente esaminati con particolare diligenza . . . Da tutte le informazioni, che ricevo, vengo assicurato che un immenso traffico di schiavi si fa per questa via, e che gli schiavi si cambiano contro produzioni americane, le quali a poco a poco escludono dai mercati d' Africa le mercatanzie del Nord . . . Da Zinder, dove io sono, si mandano continuamente schiavi a Nyffé. Sembra da vero che tutta questa parte dell' Africa sia messa a contribuzione per alimentare di schiavi i mercati dell' America meridionale (Richardson's, *Narrative*). La continua vista di questi miserabili inguidalescati dalle percosse, ed assicurati da un cerchio di ferro intorno al collo, rese all' umanità di Richardson insopportabile il soggiorno di Zinder; e fu appunto che avviandosi da Zinder a Kouka egli soggiacque alla crudele influenza del clima africano. »

(2) La Virginia spedì nel Mississipi, nell' Arkansas, al Texas, all' Alabama, alla Florida dall'anno 1840 al 1850 non meno di centomila Negri a 500 dollari per testa (prezzo medio) guadagnando cinquanta milioni di dollari ossia duecento cinquanta milioni di franchi. Egli è in sì fatto modo che alcuni Stati dell'Unione caritatevolmente aboliscono la schiavitù dei Negri. Egli è per questo che il Texas e la California furono predati al Messico. Per questo si sta meditando l'invasione di Cuba e l'aggregazione della Giamaica. Per questo ogni Stato, dove si reputa profittevole, la razza negra figura nell' Unione come Stato da schiavi. Leggasi l'articolo *Codex et roman de l'Esclavage* tolto dalla *Rivista d'Edimburgo* ed inserito nel mese di luglio 1855 della *Rivista Britannica*.

sui principii d'umanità e filantropia, che fino ad ora diressero gli sforzi fatti per abolire la tratta e la schiavitù dei Negri. » Dopo quaranta quattro anni siamo dunque da capo e la questione assume un carattere ben più esteso e più grave, conciossiachè più non si tratti di abolire soltanto il traffico, ma ben anche la schiavitù dei Negri, le quali due cose non vogliono essere insieme confuse e dovevano, sin da principio, con delicata e giudiziosa previdenza separatamente considerarsi.

Era da aspettarsi che le penne francesi non sarebbero rimaste oziose a sì alto e filantropico invito. Di fatti la *Rivista Britannica* inserì tosto nel suo fascicolo dello scorso dicembre 1858 un articolo dettato sulla tratta dei Negri da anonimo pubblicista francese, tributando elogi non meno ai nobili intendimenti che alle ingegnose viste dell'autore (1). Uno scritto partito dalla Senna, dopo l'avvenimento del *Charles et Georges* e la giustificazione fattane in faccia all'Europa, doveva sostituire l'immigrazione libera alla tratta venale assicurando ai Negri l'*habeas corpus* con tutti i diritti civili. Tuttavolta uniformandomi alla riverenza professata dal redattore della *Rivista Britannica* all'autore dell'articolo, io non so farmi una chiara idea della così detta immigrazione libera, finchè si parla d'Africani. L'Africa è terra dove il più forte preda il più debole unicamente per venderlo, nè questo passa mai in balìa degli Europei se non è venduto da una parte e comperato dall'altra. L'acquisto d'una merce viene determinato dal bisogno che si ha di usarne, ed ogni compratore crede avere col proprio danaro acquistato il diritto di valersene per appagare un tale bisogno. Ora il Negro-merce, anche protetto dall'*habeas corpus* non potrà, quantunque s'addomandi libera la sua immigrazione, nè fare ciò che vuole, nè andarsene dove gli piace. Forse male m'appongo, o 'l proposto sistema, se un giorno dovesse attuarsi, trasformerebbe l'orribile traffico dei Negri in un commercio legale.

(1) Così non parve a Monsieur A. de Gasparin, cui il citato articolo mosse tal bile che non la potendo frenare, scrisse al direttore della *Rivista Britannica* nei termini seguenti: « Monsieur le Directeur. — Vôtre numéro de décembre renferme un article intitulé: *Immigration de travailleurs libres et Traite des Noirs*, que vous avez imprunté à la *New Qarterly Review*. Je ne viens pas discuter cet article; je ne pourrais pas le faire de sang-froid. Permettez que je me borne a examiner une seule des expressions de l'auteur . . . » Fatto questo esame, Monsieur de Gasparin conchiude: « Mais du moment ou le marché est officiellement ouvert . . . ne craignez rien, les entreprises se feront en grand, et la France aura la gloire d'avoir provoqué la plus grande explosion de crimes et de calamités, le plus grand réeul de civilisation, dont l'histoire moderne fasse mention. »

Nel giorno 14 febbraio del corrente 1859 la Camera inglese dei Lordi aperse la discussione sulla tratta dei Negri e sul diritto di visita. Lord Malmesbury così parlò: « Ci sembra che nulla impedisca a tutte le nazioni di operare » insieme, e ciascuna da sè, per abolire quest' orribile traffico. Solo a ciò si » richiede una cosa, la pace. Allorchè scoppiò la guerra colla Russia la tratta » era quasi sparita. La sua abolizione venne impedita dalla guerra, e se noi » abbiamo la ventura di godere alcuni anni di pace, sono certo che la tratta » cesserà a pieno. » Rispettiamo siffatta dichiarazione e per chi la disse e per il luogo dove fu detta; quantunque non mancheranno certi ritrosi, i quali si permettano dubitare che la tratta fosse quasi sparita quando scoppiò la guerra contro la Russia (1), anzi ci protestiamo convinti che se tutte le nazioni, ed in particolar modo gli Stati dell' Unione e la stessa Inghilterra, opereranno sinceramente insieme, l' orribile traffico andrà abolito. Ma qui sta il nodo della questione, e 'l dubitoso *ci sembra* dell' oratore lascia intravvedere le molte ed ardue difficoltà, che anche in alcuni anni di pace non si potranno superare. Nè molto più rassicurante fu il linguaggio di Lord Derby quando die' conto delle negoziazioni trattate cogli Stati Uniti sul diritto di visita. Due punti importanti

(1) Se a giustificare questo dubbio non bastasse l'addotta autorità di Richardson, qui ne aggiungeremo una seconda più esplicita ancora. « Zinder 23 gennaio 1851: Il Governatore progetta una caccia di schiavi, che ognuno qui dichiara essergli necessaria per pagare i suoi debiti. Questa spedizione sarà diretta sul territorio e contro i sudditi del suo sovrano lo Scheihk di Bornou; ma come sopra mille schiavi ch' egli avrà predato, ne regalerà duecento allo Scheihk, così costui non se ne dorrà . . . Il Governatore partì questa mattina seguìto da un migliaio di cavalieri e da un certo numero d' uomini portati da camelli veloci (meharis). Si crede che, quando il suo esercito sarà completo, conterà duemille cavalli e diecimille arcieri a piedi. Si fa gran secreto della direzione, che prenderanno queste truppe sì che giungano inaspettate sulla popolazione, che si vuol catturare. Una turba di mercanti attende qui impazientemente il ritorno del Governatore ed espressamente venne per recargli voti di buon successo. Sono questi avidi negoziatori, la prima cagione del male colle loro perpetue domande di creature umane. — Zinder 1.° febbraio 1851: Questa mattina risuonò un grido in tutta la città. Ecco il Governatore che torna. Tosto uno sbucare dagli abituri, un accorrere, un avacciarsi per vedere la nuova preda. Apriva la marcia un solo cavaliero servendo a guida e la folla dei cattivi seguivalo, come se dal loro nascere quella e non altra fosse stata la loro condizione. Precedevano i fanciulli affatto ignudi colla indifferenza ch' è propria per tutto della loro età. Tenevano dietro le madri portando i loro lattanti; indi le fanciulle d' ogni età dalla infanzia alla pubertà. Poscia trascinavasi l' età senile dell' uno e dell' altro sesso. Dietro a questa confusa moltitudine gli uomini maturi ed i giovani robusti cerchiati il collo di ferro, avvinti da catena comune formavano file interminabili. La spedizione produsse mille e cinquecento schiavi. » (Estratto dal giornale di Richardson). Con qual oro, si domanda, il governatore pagò i suoi debiti? E que' mercanti che imploravano i cieli propizii alla barbara spedizione, come, dove la merce loro smaltirono? E non era forse allora imminente la guerra della Crimea?

emergono dalle sue spiegazioni: 1.° il governo inglese abbandona il diritto di visita; 2.° il governo inglese ed il francese hanno di concerto approvato un regolamento il quale surroga il diritto di visita con *nuovi mezzi di vigilanza,* combinati per assicurare la repressione della tratta. Il gabinetto inglese spera che il gabinetto americano accetterà quel regolamento che fu sottoposto alla sua approvazione.

Speriamo anche noi che il gabinetto americano accetti il proposto regolamento, e sopra tutto speriamo che questo regolamento non si limiti soltanto ai *nuovi mezzi di vigilanza*, i quali, se dal passato giova inferire il futuro, non faranno che fracidare sempre più la tanto profonda, tanto estesa e tanto finora inutilmente deplorata piaga della umana famiglia, la tratta dei Negri. Chiunque bramasse restar convinto di ciò getti uno sguardo sull' Inghilterra, sull' America, sull' Africa.

Una delle condizioni più essenziali alla prosperità della Gran Bretagna è la filatura e la tessitura dei cotoni. Questo ramo d' industria somministra di che vivere non meno che ad un' ottava parte della popolazione dei tre regni uniti (1), ond'è che i cotoni di manifattura inglese ingombrano i porti quanti sono d'Europa. Quattro quinti del cotone che alimenta le fabbriche inglesi vengono importati dall' America, la quale allettata dal guadagno e dalla opportunità di mettere a profitto i terreni di recente conquista d' anno in anno estende la coltivazione della pianta che lo produce. Rilevasi dai dati statistici quale sia stato il progressivo aumento dell' importazione fino all' anno 1852.

Importazione	Libbre
1793	187,000
1800	17,789,803
1810	93,201,462
1852	1,100,000,000.

Il cotone non si coltiva utilmente nell' America bagnata dall' Atlantico che dentro i limiti del grado trentesimoquinto di latitudine settentrionale e dalla parte dell' Oceano Pacifico dentro quelli del grado trentesimonono della medesima latitudine. Nessun clima è troppo caldo per non favorire la vegetazione di

(1) La fabbrica dei fili e dei tessuti di cotone fa vivere l'ottava parte della popolazione delle Isole Britanniche. È un' industria divenuta gigantesca, la cui conservazione è oggimai una delle condizioni essenziali della prosperità generale dell' Inghilterra (Britisch Almanack).

questa pianta. Quindi è che il solo Negro può reggere ad un prolungato e penoso lavoro sotto sì alta temperatura. Dunque la tratta dei Negri per la coltivazione del cotone negli Stati meridionali dell' Unione frutta principalmente all' Inghilterra. Si supponga che il diritto di visita l' avesse in poco d' anni compiutamente abolita. Quale sciopro in tutte le città manufatturiere della Gran Bretagna! Quanta rovina de' negozianti! Quanto subuglio e tempesta d' operai congedati, quanta jattura dello Stato! Sarebbe scoppiata tale rivoluzione da non potersene misurare nè l' estensione nè le conseguenze. Dicasi ciò che si vuole, ma nessuno Stato seriamente adopera in proprio danno; e s' avviene che il sentimento d' umanità venga in lotta con quello della utilità, l' azione del primo s' affredda e s' addormenta. Il monopolio del cotone e'l diritto di visita posero fin qui l' Inghilterra in contraddizione con sè medesima, ed è appunto siffatta contraddizione, che sparse luce sopra alcuni fatti ch' empirono di maraviglia l' Europa. Come mai un Governo così altezzoso, e nell' esigere dai deboli cotanto inesorabile, potè sofferirsi in pace la promossa insurrezione del Canadà, l' invasione del Messico, le conquiste del Texas, della California, la perdita dell' Oregon? Come potè divorarsi con faccia cerimoniosa e blandiente gl' insulti praticati ai suoi ufficiali e persino lo sfratto de' suoi consoli? No di fermo non le mancavano nè armamenti navali, nè capitani di consumata esperienza, nè coraggiosi e periti marinai, ma la guerra avrebbe sospeso l' importazione del cotone. Argomentando dunque da tali sacrifizii ci è pur forza concludere, che l'importazione del cotone è indispensabile all' Inghilterra, ma il cotone si coltiva dai Negri raggranellati colla tratta, dunque la tratta è indispensabile all' Inghilterra. Che che ne sia di questo raziocinio è certo, per mio avviso, che il non averne tenuto conto a suo tempo, rese inefficace il diritto di visita, e se non cambiano le ragioni del commercio britannico, tornerà del pari inefficace la vigilanza proposta da Lord Derby e la pace invocata da Lord Malmesbury. Tragettiamo in America.

Nella Confederazione americana gli Stati del settentrione, ove la temperatura non favorisce la coltivazione nè dello zucchero (1) nè del cotone, condannano apertamente i loro fratelli del mezzogiorno, barbari a segno da rendere produttivi i loro vastissimi possedimenti col sudore dei Negri comperati al mercato e

(1) In questa memoria si parla soltanto del cotone e non dello zucchero, perchè soltanto il primo alimenta le fabbriche inglesi. D' altra parte qualunque temperatura può favorire i prodotti da cui si estrae lo zucchero. La Francia non solo sopperisce a sè stessa collo zucchero indigeno, ma ne può far anche l' esportazione.

gettati a morire sul campo di percosse e di stento. La capanna dello Zio Tom dovette in gran parte a questo sentimento d' umanità, di giustizia e alle dominanti idee del nostro secolo quello strepitoso successo che ne moltiplicò prodigiosamente le edizioni e meritò alla patetica autrice gli applausi d' ogni nazione incivilita. Ma dal canto loro gli Stati del mezzo giorno appena sanno rendersi ragione di tanta ira, ned altro scorgono nella Stoowe che un felice ingegno venduto ai nemici della loro prosperità. I loro abitatori nascono e crescono in mezzo ai presepii della razza negra e non sanno risolversi a condannare i loro padri, gli avoli, gli arcavoli, che non si fecero scrupolo lavorare con quella specie d' animali le loro terre. I testi biblici che leggono, le storie degli antichi popoli che nella prima età consegnano alla memoria; l' agiatezza o meglio l'opulenza di che godono, sono tutte ragioni onde si persuadono essere la corta intelligenza dei Negri effetto d' un ordine provvidenziale perchè v' avessero padroni e schiavi. Osservano poi quanto a mezzo dei loro schiavi abbiano giovato e pur giovino alla potenza, alla ricchezza dell' Unione intera. Non vogliono quindi perdonare agli Stati settentrionali l' ingratitudine per cui, proponendo l' abolizione della schiavitù, non il danno propongono, ma lo sterminio completo dei meridionali. Tra l' una parte e l' altra cova pertanto il fuoco dell' odio sotto cenere insidiosa, e la causa dei Negri, qualunque volta si tratta d' abolizione, anzichè avanzare, indietreggia. Il mezzo giorno se fosse invitato a modificare i suoi interni ordinamenti, leverebbesi di subito in armi e combatterebbe ad oltranza. In conseguenza i Presidenti della repubblica degli Sati Uniti, qualunque fosse la loro patria, qualunque il partito, giudicarono, che se il soave eloquio del virtuoso Franklin, se l' austera rettitudine di Jefferson, se gli onorati convincimenti di Madison aveano indarno affrontato un abuso non anco cresciuto a proporzioni gigantesche, sarebbe stato stoltezza sperare distruggerlo da che divenne elemento vitale nell' organismo d' una vasta e potente società. È dunque un fatto che l' Europa intesa ad annichilire la tratta dei Negri non avvertì se fosse cosa sperabile l' abolizione della schiavitù in America. È un fatto che la schiavitù conservandosi avrebbe favorito la tratta malgrado qualunque vigilanza, qualunque severità, e che una popolazione siccome l' americana impazientissima di straniera imperiosità avrebbe disdegnato la visita o tolleraudola avrebbe promosso su grande scala il commercio clandestino.

Gli Europei, non v' ha dubbio, deliberati a cessare una volta l' obbrobrioso traffico della carne umana fidarono sulla cooperazione degli Americani; ma sia

permesso il riflettere, che non s' addiceva a grandi e calcolatrici nazioni l' adottare una misura, siccome quella del diritto di visita, tanto incomoda agli onesti navigatori, tanto sdrucciolevole ai soprusi, tanto dispendiosa, sull' appoggio d' una semplice supposizione. Pure si conceda un istante che la speranza si fosse a seconda dei desiderii adempita. Cosa avrebbe fatto l' America meridionale di que' milioni di schiavi donati alla libertà! Forse dopo la rovina delle proprie piantagioni navigarli a tutte sue spese nel territorio della repubblica Liberiana non capace d' accoglierli, non preparata a riceverli (1)? Forse appagarsi nel lavoro delle terre di braccia africane fatte libere mercè la legge dell' *habeas corpus* e la concessione di tutti i diritti civili? Ma il Negro, una volta che si senta spastoiato, diventa randagio e rifugge dal campo, scena esecrata de' suoi incredibili patimenti. Per convincersene basta aggirare le contrade dove fu abolita la schiavitù. Il Negro, come prima il può, si ficca nelle città e t' occorre ad ogni passo gallonato ed in cenci. È servitore, faccendiere, facchino, cuoco, taverniere, tutto fuorchè agricoltore. Nè gli è dato sperar meglio, che ivi pure dove si grida contro la schiavitù di lui, tutti l' hanno a vile, o perchè credano essergli stata natura avara d' intelletto o pensino ch' egli abbia in ischiavitù disimparato ad usarne. Che se tra que' milioni ve ne fosse alcuno che albergando in mente pensieri di vendetta facesse gruppo de' suoi prontamente addensati dall'identità del colore, dal bisogno, dalla speranza e cercasse signoria dov' ebbe catene, quale alternativa resterebbe allora ai Bianchi? od esterminare quella razza, cui la com-

(1) La Guinea superiore si divide in quattro sezioni: Costa degli Schiavi, Costa d' Oro, Costa dell' Avorio o dei Denti, Costa del Pepe o dei Grani. Partendo dal capo Palmas, ultimo confine occidentale della Costa d'Avorio, la spiaggia prende la direzione tra Settentrione e Levante e la conserva fin oltre la Sierra-Leone sino alle foci del Gambia. La porzione più meridionale di questa spiaggia compresa tra la Sierra-Leone ed il capo Palmas è la fertile regione conosciuta sotto il nome di Costa dei Grani. Altra volta fu popolata da numerose tribù negre, agricole e commercianti; ma il flagello della tratta sostituendo a tutti gli altri il traffico degli uomini compiutamente ne la disertò. È questa la contrada dov' è stabilita oggidì la repubblica di Liberia sopra un territorio, la cui profondità media è di quaranta miglia e la lunghezza di circa cinquecento; occupa quindi un' area di ventimila miglia quadrate. Consta la sua popolazione di dodici mila coloni tornati d' America e di circa trecento quaranta mila indigeni volontariamente accorsi sotto la protezione del nuovo Stato. Dove un tempo tenevasi il mercato degli schiavi ora sorge la capitale, piccola città marittima di due mila abitanti continuamente frequentata da navigli che vi caricano riso, caffè, olio di palma, legni da tintura ed altri prodotti dei tropici. È protetta da un forte, ha molo, fanale, magazzini, palazzo di giustizia, scuole, chiese, giornali, associazioni letterarie, istituzioni di beneficenza. — Alcuni filantropi di Washington commossi dalla miserabile condizione dei Negri liberi, sprezzati in America come razza inferiore, formarono nel 1816 un' associazione a fine di fondare sulla costa d'Africa una Colonia destinata a dare ricetto ai Negri liberi ed agli emancipati dai loro padroni.

passione poc'anzi fruttò libertà, o cedere al torrente sommergitore della civiltà. Per lo che gli Europei prima di fermare il diritto di visita avrebbero dovuto proporsi questa doppia questione: o gli Americani aboliscono la schiavitù dei Negri o non l'aboliscono. Se l'aboliscono, come si provvederà all'esistenza di dieci milioni di Negri? Se non l'aboliscono, risponderà mai all'intento il diritto di visita? Nè doveasi obliare che dall'abolizione della schiavitù conseguirebbe la rovina degli Stati meridionali dell'Unione, non più vi si coltiverebbe il cotone e tutta l'Europa sentirebbe la violenta scossa originata dalla mancanza di sì fatto prodotto. Lasciamo l'America e portiamo lo sguardo sull'Africa.

La schiavitù e la vendita degli schiavi è malattia indigena del continente africano. Però nei tempi andati infierì anche in Europa e principalmente allora che la bellicosa regina delle nazioni vendendo gl'innocenti abitatori delle conquistate città proclamava con mendace generosità il *parcere subiectis*. Quando la legge evangelica ravvivò indistintamente i diritti dell'umanità, il turpe traffico, quasi vergognando, rimpiattossi nella sua terra natale, il di cui accesso sembrava vietato alle nazioni incivilite dall'inclemenza del clima. Se non che, scoperte le Antille e disertata bella parte del continente americano dal ferro spagnuolo, occorrendo rendere produttive quelle solitudini, non si provò ribrezzo a dividere cogli Africani l'ignominia del mercanteggiare la carne umana. Moltiplicatesi in seguito le emigrazioni degli Europei alla volta del Nuovo Mondo, e nuovi territorii di mano in mano ai già conquistati aggiungendosi e conseguentemente crescendo il bisogno di braccia lavoratrici, l'avidità portoghese n'afferrò il monopolio e sulle coste della Guinea edificò fortilizii, murò abitazioni, ordinò agenzie, aperse emporii e sì estesamente vigoreggiò l'infame commercio che di schiavi negri riboccò ben presto l'America. Dal canto loro i Regoli (1) dell'Africa tanto più cupidi, quanto più poveri, scoperta questa vena d'oro, onde nelle mani loro più largamente fluisse, praticarono e praticano ancora il mestiere d'agguatare gli sparpagliati, gl'inermi; e se ciò è poco, muovono guerra ai vicini e, quando fortuna li aiuta, non lasciano vivente che no 'l mandino al mercato. Ma i negozianti portoghesi da sicuri nunzii avvertiti come sovrastava il diritto di visita, non si stettero a bada e le sedi loro lasciando, quasi abbandonate da tempo immemorabile, addentraronsi nell'oscurità delle vicine boscaglie, sulle rive dei fiumicelli, che mettono in cale riposte e dall'alto non discernevoli, fabbricaronvi

(1) Codesti Regoli sono Arabi che importarono in Africa l'Islamismo, o sono Turchi. Le tribù de' Negri indigeni, ch'ebbero la sorte di conservarsi indipendenti e si mantengono idolatre.

barcaccie all' uopo e profonde stalle ove assicurare i Negri alla cavezza e vi attendono con pronta merce i segnali dei negrieri compratori. Non so perchè il diritto di visita si stringesse alla merce, non curando il mercante. Allorchè i pirati della Cilicia infestavano tutti i mari della repubblica romana, Gneo Pompeo eletto dal senato a cessare quella pubblica calamità, non si perdette a cacciare le predatrici saettìe su queste acque o su quelle, ma discese nella provincia, sfolgorò le tane dei ladroni ed essi con quelle. Sarebbe stato utile, se male non avviso, ricordare ed imitare l'esempio. Conciossiachè dopo Gneo Pompeo non siasi più veduto un corsaro sui mari romani e dopo il diritto di visita continuino i Portoghesi a comperare e vendere carne umana, della quale si fa crudelissimo governo per le studiate precauzioni del contrabbando. Entro a legni negrieri, mobile carnaio d' esseri viventi, il povero Africano s' ammucchia nel tanfo pestilenziale di tenebrosa stiva. Ivi nè sfamato, nè dissetato abbastanza, privo del conforto della luce, e del respiro d' un libero aere, impotente a cambiar positura brancica in brev' ora i cadaveri de' suoi fratelli, e può dirsi fortunato se arriva a toccare l' infame costa dove il mercadante sui capi superstiti ripartisce il valore di tutti, e getta al mare il resto della sua merce *avariata*. Bastava rimembrare i telai d' Inghilterra e le piantagioni d' America per dedurne la certezza del contrabbando e l' estrema difficoltà d' impedirlo colle sue terribili conseguenze; avvegnachè l' Atlantico non sia quello stretto bacino su cui nemmen sottile palischermo possa remare inavvertito. E poichè cade in taglio gioverà accennare che il diritto di visita difficultando la vendita degli schiavi n' aggravò funestamente la condizione anche nell' interno dell' Africa. Che fece l' Arabo guerriero d' una preda, che restavagli in mano invenduta? Ce lo riferiva Vogel viaggiatore tedesco, che forse ora dobbiamo compiangere vittima del suo amore alla scienza. Egli s' univa nell' anno 1853 ad una spedizione intrapresa dallo Sheik di Cuca nel regno di Bornou contro il popolo di Musgo. Componevasi l' esercito dello Sheik di ventimila cavalieri e di quindici mila conduttori di cammelli e bestie cornute. I Musgiani diffidando di fronteggiare oste sì poderosa fuggirono colle lòro greggie oltre il lago Tubori ed appiattandosi ne' paduli vi si sperarono salvi. Ma ivi pure li raggiunse la cavalleria dello Sheik e poco stante tornò con parecchie migliaia di prigionieri, donne e fanciulli, chè gli uomini tutti erano stati trucidati. Poscia la vittoriosa soldatesca ogni cosa saccomanando mosse verso il fiume Sarec dove fece in brev' ora duemila e cinquecento prigionieri chè mozzati d' un braccio e d' una gamba lasciò lentamente morire sul campo. Di quattro

mila prigionieri appena cinquecento rividero la terra natale. Ah! se la vita umana doveva scendere in Africa a prezzo sì basso, era ben meglio chiudere gli occhi sui mercati della Guinea nei quali non si trattava che di libertà. Infatti il dott. Barth in quella sua perlustrazione africana, che durò dall'anno 1850 all'anno 1855, s'abbattè in ischiavi tornati dal Brasile; li vide fremere sulle continue atrocità, che contaminavano i loro sguardi, e gl' intese sospirare la terra della loro precedente cattività.

Consegue da tuttociò che il diritto di visita fallì perchè nel partito preso onde abolire la tratta dei Negri non si posero a calcolo le condizioni politiche ed economiche di que' medesimi Stati, che pur dovevano mandarlo ad effetto, e che la risoluzione ispirata da pietà della razza negra n' aggravò incomparabilmente la miseria.

Ora sembra che in Europa si consolidi la fiducia di vedere tantosto represso il traffico dei Negri ed in breve giro d' anni cancellata la macchia di questo snaturato commercio. Lo disse Lord Malmesbury, e la regina Vittoria pronunciava solennemente le seguenti parole: « La saggia risoluzione di S. M. I. (quella cioè » d' impedire qualunque reclutamento sia sulle coste orientali dell' Africa, sia a » Madagascar, sia alle Comore) finirà col compiuto abbandono del sistema, sosti- » tuendo un lavoro libero bene regolato. » Con tali detti la regina Vittoria si mostrò persuasa che qualora più non si favorisca l' immigrazione dalle coste orientali dell' Africa, la quale, se pure tratta non era, serviva ad incoraggiarla ed ammantellarla, quella pure delle coste occidentali non potrebbe più continuare. Sembrerà, non dubito, temeraria la mia opinione; nondimeno mi sento animo d' esternarla a petto di sì alte autorità, sostenendo che il traffico dei Negri continuerà, malgrado la più severa vigilanza, finchè lo stato commerciale dell' antico e del nuovo continente riclamerà le loro braccia. Cambiare poi lo stato commerciale dei due continenti non è bisogna di pochi mesi e nemmeno di pochi anni. Ai tempi nostri però non v'è studio, non tentamento, per dispendioso che sia, il quale non deva porsi in opera a raggiungere una meta, che prospettiamo da sì lungh' anni senza toccarla mai.

La tratta, ognuno se 'l vede, è conseguenza della vendita da una parte e della compera dall' altra. Vuole ragione che si tolga la causa per annichilire l' effetto, e questa causa vuolsi torre là dove nacque, dove regna, d' onde s'estese a tingere d' ombra nerissima la civiltà europea. L' Africa, per vero dire, non è di facile accesso, ma da tante parti assalita, com'è oggidì dal filantropico corag-

gio dei viaggiatori europei, è pur forza rimova le barriere innalzate più dalla barbarie degli uomini che dall' aridità del suolo o dal calore del cielo. Mungo-Park, Hughton, Denham, Clapperton accostumarono già i Negri alla visita dei Bianchi. Il missionario Livingston inoltrò da mezzo giorno fino al nono grado di latitudine meridionale e seguì il corso dello Zambese che mette foce nell'Oceano indiano. Il capitano Burton penetrò dalle coste orientali tocche un tempo dalle prore del famoso Albuquerque. Richardson, Owerveg, Vogel, Barth calando da Tripoli giunsero al decimo grado di latitudine settentrionale. Il maggiore Laing, il francese Caillé ed ultimo il dott. Barth soggiornarono nella tanto rinomata e commerciante città di Timbuctoo. I regni di Bagirmi, di Musgo, di Bornu, il grande impero di Sokoto, le stazioni dei Tuaregi e dei Feplani non sono più nuove per noi. Conosciamo quanto si spandano il lago Tsad nel cuore dell' Africa, e verso mezzo giorno il lago Ngami, sappiamo quali terre bagnino e dove confondano le loro acque il Faro, il Benuwé, il Niger (1); per lo che sebbene resti ancora molto d' ignoto in quella parte di mondo, possiamo sul molto già noto fondare speranza che ben presto la nostra civiltà farà provare ai Negri i suoi benefici effetti. Non tutta l' Africa è nomade, non tutta selvaggia. Tra le popolazioni in cui s' avvenne il dott. Barth ebbe talvolta ad ammirare consuetudini patriarcali, amore dell' ordine, rispetto all' autorità (2). Ivi l' Africano coltiva cotone, indaco, zafferano, mais, caffè ed attivando commercio con esso, oltre cotali derrate, potrebbe dare in cambio all' industria europea polvere d' oro, pen-

(1) Il dott. Barth fu il primo a scoprire il corso di questi fiumi. La scoperta era troppo importante perchè il governo inglese non s' affrettasse a verificarne l' esattezza. Nella state del 1854 un piccolo naviglio a vapore (la Pleiade) partì dall' Isola di Fernando Po sotto la direzione del dott. Baikia, rimontò il Niger, poi il Benuwé fino a Dulki, punto situato a cento venti o cento trenta chilometri dall' imboccatura del Faro. Questo punto non è distante da Yola capitale dell'Adamava che ottanta chilometri circa. Ivi arrivata la Pleiade dovette al principio d' ottobre per la subita diminuzione delle acque retrocedere al mare. Fu annunziata una seconda spedizione della quale dovevano far parte molti missionarii incaricati di fermarsi in ogni luogo disposto ad accoglierli, e da ciò si sperò ottenere una completa rivoluzione a vantaggio delle popolazioni negre. Sembra per altro che una tale spedizione sia rimasta in istato di progetto.

(2) Potrei a conferma di ciò arrecare molti brani della relazione del dott. Barth. Basterà uno solo. « Karmak Logone 13 marzo 1851. La vicinanza della città mi fu annunziata da numerosi campagnuoli che si recavano al mercato e tutti cordialmente mi salutavano. Oltrepassai le porte e primamente attraversai un quartiere abitato dalla classe la più povera, ma ben presto le strade allargaronsi, le case mi si mostravano più alte e spaziose finchè giunsi al Dendal, cioè alla strada principale dove sorgono la moschea, il palazzo del principe e la casa del suo primo ministro o Visir che qui si addomanda Keghamma . . . Fui introdotto nella casa del Keghamma. È un vero palazzo composto d' un

ne di struzzolo, avorio, soda, legni da costruzione, da tintura, da tarsia. Alle quali cose ponendo mente io concludo, che soltanto in Africa si deve e si può spegnere senza vigilanze severe, senza diritti di visita, senza libere immigrazioni la vendita, la tratta, la schiavitù dei Negri e tornerà a grande vantaggio dell' Africa stessa, a sommo onore e profitto dell' Europa.

Non s' impacci più la libertà dei mari col pretesto d' esaminare qual merce portino i navigli, e si finirà di suscitare contese per la violazione dei diritti internazionali. Non si propongano libere immigrazioni, velo anche troppo trasparente alla tratta, perchè non s' abbia in cotal modo a perpetuare. Si snidino colla forza, se occorre, dalle impure tane i filibustieri spagnuoli e portoghesi sergenti e mezzani del traffico infame. Si fondino sulle coste della Guinea ben provveduti emporii, e si annodi coi capi delle tribù interne tale commercio ch' essi dalla vendita d' altri loro prodotti ricavino profitto maggiore che dalla vendita dei loro schiavi (1). Si approfitti del Niger che lambendo Timbuctou scende a scaricarsi nella baja di Benino non che dei suoi confluenti per mercanteggiare nel cuore dell' Africa, importandovi i più semplici ordigni delle arti che soddisfano ai primi bisogni della vita, introducendovi i nostri strumenti d' agricoltura, insegnandone l' uso e mostrando agl' indigeni come possano adoperare per loro conto le braccia degli schiavi anzichè barbaramente mutilarli per non saperne che fare. Diasi in pari tempo la massima estensione possibile alla Repubblica Liberiana. Sopra tutto poi l' Inghilterra, che in Asia ed altrove possede regioni acconcie per loro latitudine alla coltivazione dello zucchero e del cotone, si franchi dall' umiliante tributo, che paga annualmente agli Stati dell' Unione, ed i proprii

gran numero d' edifizii e di corti interne. Fui alloggiato al primo piano in una sala lunga trentacinque piedi, larga quindici, illuminata da finestre semicircolari . . . Il Kegamma è un uomo semplice ed inclinato a benivoglienza . . . Il principe fu sommamente lusingato dal mio complimento, ed essendogli stati recati i doni che io gli offeriva mi fece entrare nella sua stanza, mi strinse cordialmente la mano e mi pregò spiegargli l' uso degli oggetti che gli aveva presentati . . . Il Logone, paese fertilissimo bagnato da due magnifici corsi d'acqua, sarebbe compiutamente felice perchè il potere sovrano temperato da una aristocrazia di alti personaggi vi è sommamente dolce . . . »

(1) Per questo motivo Richardson con Owerveg e Barth inoltrò nell' Africa centrale. Palmerston favorì l' intrapresa. Questi viaggiatori si convinsero non solo della possibilità, ma anche della facilità di legare cogli africani relazioni di attivo commercio. « Gli Schiavi, scriveva Barth da Demmo, sono la sola imposta che il sovrano leva sulle provincie del suo Stato, e 'l vincitore nei territorii soggiogati. Questo maledetto sistema sparirà tosto che un regolare commercio penetrando nel cuore della Soudon per la via del Benuwé verrà a domandare in luogo di creature umane i prodotti del suolo, il cotone, l' indaco, la cera, le pelli, l' avorio, le corna di rinoceronte, ecc. »

telai alimenti col cotone di sue piantagioni (1). Che se mai opponesse non reggere alla fatica gl' infingardi e molli coolies, nè potersi fidare nell' immoralità cinese, che pur viene offerendosi spontanea, cosa le vieta di trasportare a Calcutta, a Bombay quelle tante migliaia d' Irlandesi che impazienti dell'oppressione e della fame abbandonano la terra natìa? Spazio più che bastevole a capirle hanno già loro preparato gli esterminii della guerra presente.

Intendo bene che tutto ciò non può compiersi in pochi anni, ma egli è un errore il credere che mali inveterati, sieno fisici o morali, possano in brev' ora guarirsi; anzi n' ammaestra esperienza, che misurata e lenta medicina meglio assicura salute. Il frutto un giorno colto, largamente compenserà il tempo impiegato. Si tratta niente meno che lavare una gran macchia della nostra civiltà e di stabilire i veri, i santi diritti dell' uomo in una intera parte di mondo.

Spero non mi si apporrà a colpa d' arroganza, se in questione agitata dai grandi politici del secolo, osai levare la mia voce. Mi suggerì questi pensieri pietà d' esseri infelicissimi, che pur mi sono fratelli, perchè anche sulla loro fronte splende il raggio della ragione. La compassione è dono di chiunque ha cuore ancorchè non regga i destini delle nazioni, e 'l palesare quest' onesto affetto non potrà mai giustamente riputarsi nè presunzione, nè colpa.

(1) L'Inghilterra sentì e sente la convenienza di francarsi dal tributo che paga agli Stati Uniti; anzi fino dall' anno 1840 il Governo dell' India invitò la camera di commercio di Bombay a sottoporle le sue osservazioni sulla coltivazione del cotone. Quattro erano i punti principali, di cui doveva occuparsi la camera di commercio di Bombay. 1.° Miglioramento del cotoniere e del suo prodotto. 2.° Perfezionamento dei processi impiegati per raccogliere, nettare, imballare il cotone in guisa da farlo arrivare sui mercati inglesi immune di tutte quelle impurità che ne scemano il prezzo. 3.° Estensione delle piantagioni del cotoniere in una misura bastevole per diminuire effettivamente la dipendenza dell'Inghilterra dagli Stati Uniti. 4.° Mezzi di trovare nella coltura del cotone un impiego per i capitali impegnati nel traffico dell' oppio. La camera nel seguente anno 1841 soddisfece alle fatte domande, e rispetto alla terza che si riferisce alle proposizioni della presente memoria dichiarò: Che il territorio del Nizam e quello del Berar producono raccolte abbondanti; che il cotone del Decan matura prima di quello del Guzzerat, e che se ne potrebbe ottenere un considerevole aumento di produzione; che i due Concans potrebbero fornire molto più copiose quantità di cotone; che nel Kattiwar e nel Kandeisch nulla manca per disviluppare la coltivazione del cotone, eccetto una condizione quieta e pacifica; finalmente che il Malwah sembra proprio a produrre in abbondanza il cotone. La risposta si limitò alla sola presidenza di Bombay, ond' è probabile che in tutta l' India posseduta dagl' Inglesi sienvi terreni più che sufficienti per trarne tanto cotone da venderne agli Stati Uniti, se mai n' abbisognassero.

(*Lette il 13 marzo 1859*).

DELLA MATERIA E DELLE FORZE

CONSIDERAZIONI

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

Dal tempo, in cui per la prima volta ebbi l'onore di presentarmi a questo dotto Consesso leggendovi alcune considerazioni sulla dottrina del calorico raggiante (27 dicembre 1840; gli Atti dell'Istituto stampati nel 1851 contengono un estratto di tal memoria, che fu poi pubblicata negli *Annali di matematica*, agosto 1850, Roma, Vol. I), nella quale un illustre fisico Italiano faceva allora sì grandi scoperte, da quel tempo, dicevo, la denominazione del calorico sofferse vigorosi attacchi, sicchè per quanto mi sembri ragionevole supporre che da un corpo speciale dipenda quel gruppo ben distinto di fenomeni, che suol disegnarsi col nome di calore, debbo confessare che un'altra ipotesi sembra destinata ad occupare il posto della prima. Questo tempo mi pare molto opportuno per prendere in esame i fondamenti della scienza, e sceverare ciò che può ritenersi come l'esposizione di un fatto da ciò ch'è puramente ipotetico. Io svilupperò la mia maniera di vedere, che in parte ho già esposta in una memoria sulle proprietà generali dei corpi (letta all'Accademia di Padova, 8 dicembre 1845 e pubblicata negli *Annali di matematica*, ottobre, novemb. 1850, Roma) e nell'altra sulle unità fisiche e sull'importanza ed uso delle teorie (letta all'I. R. Istituto nelle sessioni del 1851 e 1852, fu poi inserita negli Atti del 1856, T. I, pag. 107, 221, 325). Desidero moltissimo che voi vi facciate ad esaminare attentamente l'argomento ed a stabilire i veri principii fondamentali della fisica razionale. La cosa mi sembra possibile, giacchè non si tratta di discutere quali sieno le cause dei fenomeni, bensì di ponderare col ragionamento

quali cose noi possiamo ritenere come suggerite dai fatti e quali escludere, od almeno tener per dubbiosissime, perchè conseguenze di pregiudizii. — Mi eccita particolarmente a questo esame l'opera del Grove sulla correlazione delle forze fisiche, ed il grande argomento in essa trattato. Mi pare che mentre il celebre autore si fece a criticare i principii adottati dai fisici, siasi poi talvolta lasciato trarre dalla sua immaginazione a supposizioni destituite di fondamento, e sopra tutto mancanti di preciso significato.

1. Il *principale fondamento filosofico*, a cui mi appoggio si è che nulla noi sappiamo intorno alla costituzione dei corpi, oltre quanto ci è insegnato dalla sperienza; e che non è giustamente ragionare l'appoggiarsi all'analogia fra cose essenzialmente differenti. Io confido che tutti saranno dispostissimi ad accordarmi questo principio, poichè niuno crederà che la nostra anima abbia un'idea innata, per la quale possa stabilire a *priori* la natura dei corpi: ma quanto spero che niuno negherà il principio, altrettanto temo che si voglia poi rifiutarne le legittime conseguenze; vorrei quindi fin da questo momento prender in parola il lettore.

2. *Idea innata del fuori di noi.* Mentre non ammetto alcuna idea innata sulla costituzione dei corpi, sarei dispostissimo a credere che fin dal primo momento della nostra vita avessimo l'idea ben più necessaria dell'esistenza dei corpi fuori di noi, ai quali riferire le sensazioni che ne proviamo; poichè non so intendere come potessimo acquistare tale cognizione, nè so appagarmi di certi raziocinii, coi quali alcuni filosofi vorrebbero provare che quell'essere sì poco ragionatore qual è l'uomo, specialmente nella sua prima età, sia condotto a dimostrarsi la necessità dell'esistenza di esseri che non sono lui, od anche soltanto a sospettare tale distinzione tra lui e ciò che non è lui. Fortunatamente noi non abbiamo ad occuparci di questa nè di altra questione filosofica, nè sofisticare sulla verità di ciò ch'è palese.

3. Non si può sperare di stabilire alcun che di sicuro e di rigorosamente dedotto dai fatti se non si adoperi un linguaggio preciso e scevro d'equivoci. È cosa riprovevole che volendo fondare nuove teorie si adoperi il linguaggio delle antiche; e se mai ciò fosse una necessità, sarebbe una prova irrecusabile che la nuova teoria non può sussistere da sè; nè vale il dire volersi evitare i neologismi e l'imbarazzo di nuove parole, poichè è facile scegliere alcune parole opportune e stabilire il significato, in cui sempre s'intende di adoperarle. Un'altra cosa a mio credere necessaria, e che può tornare come criterio che una teoria fisica

abbia un preciso significato, si è stabilire le unità a cui si riferisce ciascheduna qualità suscettibile di quantità, ch' entra nel discorso.

4. *Opinioni sul calore.* I fisici anteriori alla riforma della chimica stavano indecisi tra le due ipotesi di attribuire i fenomeni del calore e del fuoco al moto delle particelle dei corpi, oppure ad un corpo speciale; ed in sulle prime si valevano a sostegno della seconda opinione dell' accrescimento di peso, che alcuni corpi ricevevano mediante il fuoco; il Nollet peraltro notava che ciò poteva dipendere d' altra materia, cui i corpi che si calcinavano potevano trarre dall' aria che li circonda, o dai vasi che li contengono; d' altronde egli non trovava convincenti le sperienze, colle quali si voleva rifiutare il peso a quel corpo speciale ch' era cagione dei fenomeni calorifici. Prevalse dappoi l' ipotesi dell' esistenza del calorico; e quantunque ciò fosse per considerarsi come un allontanamento dalla verità, pure dee riconoscersi che fu utilissimo progresso: allora mancavano affatto i mezzi, che non peranco si possedono, per porre a calcolo l' ipotesi delle vibrazioni molecolari; sicchè attribuire ad esse i fenomeni era assumere una causa vaga ed indeterminata, la quale si sarebbe prestata a spiegare ogni cosa, perchè infatti nulla avrebbe spiegato, tutto avrebbe lasciato nello stato d' indeterminazione. Fu invece un vero progresso il raccogliere tutti i fenomeni intorno all' ipotesi dell' esistenza del calorico, ed a seconda delle differenti specie dei primi immaginare le proprietà di questo corpo ipotetico; così in una serie di fatti numericamente determinati e bene classificati si apparecchiarono i fondamenti ad ogni teoria dei fenomeni calorifici.

5. *Proprietà del calorico.* Dopo che un corpo caldo è rimasto qualche tempo vicino ad un altro, si trova che questo presenta alcune delle proprietà che nel primo si scorgono diminuite; queste proprietà sono le stesse, od almeno s' assomigliano, qualunque sia la natura del corpo caldo; la trasmissione delle proprietà da un corpo ad un altro può ripetersi quante volte si voglia, ed i corpi riprendono ogni volta le loro qualità primitive. Questa e molte altre classi di fatti sono perfettamente espresse dall' ipotesi che i corpi contengano maggiori o minori quantità di *calorico*, il quale produce in noi la sensazione del caldo, dilata i corpi, li liquefà, li vaporizza, li decompone, e talvolta invece rende possibili le loro unioni, ecc. Il calorico può lungamente tenersi chiuso nei corpi, e con questi si muove senza produrre alcun sensibile accrescimento alla loro inerzia; il che non fa obbiezione alla materialità del calorico, poichè non è altro che un pregiudizio (cioè un giudizio anteriore al fatto) il credere

che tutta la materia debba essere inerte (il che vuol dire soltanto che resiste alle forze che ne mutano il movimento) e pesante, solo per questo che altri corpi si riconobbero inerti e pesanti: e chi ponesse importanza a salvare i pregiudizii, potrebbe dire che il calorico è inerte e pesante in un grado piccolissimo. Peraltro il calorico è incoercibile, vale a dire niun corpo è capace d'impedirne assolutamente il passaggio: alcuno volle scorgere in ciò una prova contro la materialità del calorico, quasichè se tutti i corpi conosciuti si lasciassero attraversare più o meno facilmente dall'aria, questa cessasse d'essere un corpo.

6. Ponendo due corpi differenti nelle medesime circostanze, sicchè ricevano eguali accrescimenti di calorico, si trovò ch'essi presentano in gradi molto differenti le proprietà di corpi caldi, sia riguardo alle sensazioni che ci fanno provare, sia in riguardo a ciò che dicesi temperatura. Convenne dunque ammettere che i diversi corpi abbiano una *capacità pel calorico* differente anche sotto egual volume, e che la *capacità* di un corpo cangi talvolta al solo cangiare della temperatura. A questa capacità pel calorico fu dato molto impropriamente il nome di *calorico specifico;* e chi non seppe o non volle intenderne il significato ne trasse argomento per criticare la teoria.

7. *Calorico latente.* Talvolta la capacità di un corpo pel calorico sembrerebbe divenuta infinita, giacchè la temperatura non si accresce menomamente, finchè non sia entrata nel corpo una certa quantità di calorico; e si riconobbe che ciò avviene non ad una determinata temperatura, bensì quando il corpo soffre un qualche cangiamento. Supporre che il calorico si distrugga sarebbe stato quasi egualmente contrario all'idea della sua materialità, quanto immaginare che nelle opposte circostanze esso si creasse: nacque perciò l'idea del *calorico latente*, idea che bene esprimeva il fenomeno, senza però darne una vera spiegazione, com'è ogniqualvolta un fenomeno non si può ridurre ad altri già conosciuti. — Questa ipotesi rimarrà sempre nella memoria dei fisici, perchè ad essa si collegano lavori diligenti, che stabilirono i fondamenti della teoria del calorico; che l'ipotesi fosse precisa e suscettibile di esatti risultamenti, ne abbiamo una prova nelle unità delle varie misure relative al calorico.

8. *Definizioni delle forze.* Cerchiamo adesso di fissare il significato dell'altra ipotesi, nella quale negando l'esistenza del corpo *sui generis calorico* se ne attribuiscono i fenomeni alla *forza.* Ma prima ci è necessario dare definizioni esatte delle parole, e trattare della costituzione dei corpi. Tra le parole che nel mondo fisico ricevettero un maggior numero di significati vi è la parola *forza.*

Diremo *forza* quella causa che agendo per un certo tempo sopra una certa massa è capace di mutarne lo stato di quiete o di movimento di una certa velocità; tale è per esempio la forza di una molla. — Quando la forza è capace di agire egualmente su tutte le parti della massa la diremo *forza elementare;* essa, agendo per un certo tempo sopra una qualunque massa, le imprime una medesima velocità: tale è per esempio la *gravità*, cioè la *forza-elementare* esercitata dalla Terra sopra i corpi posti alla sua superficie. — Le forze non sempre esercitano tutta la loro azione nel mutare lo stato di quiete o di moto di un corpo; il più spesso sono impiegate ad equilibrare o vincere altre forze; allora esercitano delle *pressioni.* — L'azione utile di un motore in un certo tempo è il prodotto della forza per la componente della velocità del punto d'applicazione nel senso della direzione della forza; ciò dicesi *lavoro.* — *Motore* è una causa che in un certo tempo è capace di produrre un certo lavoro. — Un corpo, ch'è in moto (moto sempre determinato relativamente) suol dirsi avere una forza, ma a togliere ogni equivoco bisogna non adoperare mai la parola forza in tal significato; invece diremo *quantità-di-movimento* il prodotto di una massa per la velocità, e *semi-forza-viva* la metà del prodotto di una massa pel quadrato della sua velocità.

9. Per meglio stabilire i precedenti significati è necessario, od almeno utilissimo, fissare l'attenzione sulle unità spettanti rispettivamente a ciascuna quantità. Adotterò i segni, che usai nella precitata memoria sulle unità. — L'unità di *forza* è $[\mathbf{lm} : 1'' 1'']$, cioè il chilogramma (espresso con $\mathbf{l}$ massa di un litro d'acqua) moltiplicato per la velocità espressa da $[\mathbf{m} : 1'']$ cioè un metro per ogni minuto-secondo) e diviso ancora una volta per $1''$, ch'è il tempo unitario, in cui si suppone che agisca la forza per produrre la *quantità-di-movimento* $[\mathbf{lm} : 1'']$. — La *forza-elementare* ha l'unità $[\mathbf{m} : 1'' 1'']$, che moltiplicata per la massa $[\mathbf{l}]$ del corpo, su cui essa agisce, dà la *forza* $[\mathbf{lm} : 1'' 1'']$. — La gravità equivale a quasi dieci (9,805) di queste unità di forza-elementare, per brevità la segno con

$$[\mathbf{g}] = 9{,}805\,[\mathbf{m} : 1'' 1''].$$

Il *peso* ha l'unità $[\mathbf{gl}] = 9{,}8\,[\mathbf{lm} : 1'' 1'']$. — Il prodotto di una forza per una velocità ha quindi l'unità

$$[\mathbf{lm} : 1'' 1''].[\mathbf{m} : 1''] = [\mathbf{lmm} : 1'' 1'' 1''];$$

e considerando l' effetto ottenuto in 1″ vediamo che il *lavoro* ha l' unità

$$[\mathbf{lmm} : 1''1''1''] . [1'] = [\mathbf{lmm} : 1''1''] .$$

Se per unità di forza, anzichè $[\mathbf{lm} : 1''1'']$, prendiamo il peso di un chilogrammo $[\mathbf{gl}] = 9{,}8\,[\mathbf{lm} : 1''1'']$, l' unità di lavoro è

$$[\mathbf{gl}] . [\mathbf{m} : 1''] . [1''] = [\mathbf{glm}] = 9{,}8\,[\mathbf{lmm} : 1''1'']$$

e dicesi *chilogrammetro*, cioè il peso $[\mathbf{gl}] = 9{,}8\,[\mathbf{lm} : 1''1'']$, mosso di un metro $[\mathbf{m}]$ nella direzione opposta a quella della gravità. — Mille chilogrammetri sono un *dinamodo*, che esprimeremo con

$$[\mathbf{gsm}] = 9{,}8\,[\mathbf{smm} : 1''1''] ,$$

essendo $[\mathbf{s}] = 1000\,[\mathbf{l}]$ la massa, e $[\mathbf{gs}]$ il peso di uno stereo ossia $[\mathbf{m}^3]$ di acqua. — L' unità di *motore* è quella che in $[1'']$ produce un' unità di lavoro, quindi l' unità di *motore* sarebbe

$$[\mathbf{lmm} : 1''1''] : 1'' = [\mathbf{lmm} : 1''1''1''] ;$$

ma, prendendo invece per unità di lavoro il dinamodo, l' unità di motore è

$$[\mathbf{gsm} : 1''] = 9805\,[\mathbf{lmm} : 1''1''1''] .$$

Chiamando *dinamo* il motore che in 24 ore = 86400″ eseguisce il lavoro di mille dinamodi, il dinamo è espresso da

$$11{,}57\,[\mathbf{glm} : 1''] = 113{,}44\,[\mathbf{lmm} : 1''1''1''] .$$

Il *cavallo-vapore* è un motore equivalente a 6,48 dinami, cioè a

$$75\,[\mathbf{glm} : 1''] = 735{,}4\,[\mathbf{lmm} : 1''1''1''] .$$

La *quantità-di-movimento* ha, come dicemmo, l' unità $[\mathbf{lm} : 1'']$, cioè la massa $[\mathbf{l}]$ di un chilogramma moltiplicata per la velocità $[\mathbf{m} : 1'']$; e la *semi-forza-viva* ha l' unità $[\mathbf{lmm} : 1''1'']$, cioè la stessa unità del lavoro; vi è una specie di equivalenza tra un lavoro ed una semi-forza-viva espressi dallo stesso numero; perciò un chilogrammetro *equivale* a quasi dieci unità di semi-forza-viva, ed un cavallo-vapore può generare in ciascun minuto-secondo la semi-forza-viva espressa dal numero 735,4.

10. *Materia, sue forze.* Non credo necessario di occuparmi a superare la

difficoltà di definire la *materia.* In essa dee notarsi la *massa,* ch' è quella che ci ha servito a definire la forza, e la quale si misura colla bilancia di torsione osservando qual velocità le comunichi in 1″ la forza di un filo metallico che sofferse una data torsione. — La materia è dotata di quella forza-elementare, che dicesi attrazione universale; questa rapidamente diminuisce quando si esercita in luoghi discosti da quello, che si dice *occupato* dalla materia. Questa forza, come forse tutte le altre, è un' azione vicendevole; cioè l' attrazione fra due parti di materia tende a muovere tanto l' una come l' altra; l' effetto della forza, cioè la velocità prodotta è tanto minore quanto maggiore è la massa da muoversi. Due porzioni di materia, che fossero in quiete ed abbandonate a loro stesse, si avvicinerebbero con moto acceleratissimo, sicchè verrebbe a *prodursi* una ognor crescente semi-forza-viva, che si *distruggerebbe* quando le due masse venissero a riunirsi insieme; nel solo caso che le due masse descrivessero due circoli intorno al loro comune centro-di-gravità la semi-forza-viva rimarrebbe costante, altrimenti essa andrebbe periodicamente aumentando e diminuendo. — Del resto la forza-elementare detta attrazione universale è quasi del tutto insensibile nella fisica, quindi è da lasciarne lo studio all' astronomia.

11. Oltre a ciò la materia ha una *forza* (non già *forza-elementare)* che si palesa ogniqualvolta due corpi sono in tal posizione che gli spazii da loro *occupati* vengono al contatto. Questa forza, che in mancanza d' altro nome potremo dire d' *impenetrabilità,* talora cresce rapidamente, cioè diviene grandissima con minima differenza nella distanza, tal altra volta va crescendo gradatamente; come quando vengono a contatto due fluidi aeriformi. Può dirsi in qualche modo che questa forza dipende unicamente dalla natura della materia agente, e non da quella della paziente; così se contro un gas venga ad urtare un solido esso soffrirà un' egual forza (resistenza) qualunque sia la natura del corpo solido.

12. Vi sono altre forze *elettive,* per le quali due materie si attraggono dipendentemente dalle loro mutue nature: due gas posti a contatto si compenetrano vicendevolmente; lo stesso avviene molto spesso tra due liquidi, o tra un liquido ed un solido. Questa può considerarsi come una forza-elementare, perchè agisce ugualmente su ciascuna parte di materia, ma ci sono incognite le sue leggi e la sua misura. Quantunque la forza continui ad agire, pure le parti di materia non si muovono con moto accelerato, pare anzi che il moto sia ritardato; ma, lo ripeto, le leggi della forza di *dissoluzione* sono ignote.

13. Molti corpi presentano pure una forza d'*espansione* per cui le loro

parti si allontanano, cioè vanno ad occupare uno spazio maggiore, in quanto che non vi si opponga la forza d'*impenetrabilità* (§ 11) dei corpi circostanti; questa è una forza-elementare, che agisce forse secondo le solite leggi delle forze. Potrebbe sembrare che questa forza fosse *elettiva*, vale a dire che le parti di un gas o di un vapore fossero respinte solamente dalle parti della stessa materia, giacchè una pressione anche grandissima di un altro fluido aeriforme ritarda e non impedisce l'espansione del primo; ma è più probabile che l'effetto dipenda dalla forza di dissoluzione (§ 12). Così, per esempio, i vapori dell'acqua calda sollevano l'aria soprastante quando la loro forza d'espansione è maggiore della tensione dell'aria; ed in ogni caso per la forza di dissoluzione il vapor acqueo e l'aria si penetrano vicendevolmente e si mescolano fino a formar una materia omogenea.

14. Altre azioni parecchie appartengono alla materia, e danno origine ai fenomeni fisici ed ai chimici; non possiamo negare che sieno tutte riducibili a forze, pur sembra più verisimile che sieno cause agenti in maniera differente dalle forze: senza nulla poter decidere, le diremo *potenze*. Così un complesso di forze e di potenze costituisce la materia: questa è la teoria *dinamica* sostenuta da parecchi filosofi. — La maggior parte dei fisici ammettono inoltre che la materia sia composta di certi *atomi* perfettamente solidi indivisibili indistruttibili, che nessuno ha veduti, ai quali si fa grazia di attribuire tutte quelle forze e quelle facoltà. Questi atomi puntando tra di loro spiegavano in qualche modo l'*impenetrabilità* dei corpi; essi si spostavano un pocolino perchè il corpo si dilatasse, e per lasciare tra mezzo i *pori* tanto necessarii a salvare l'impenetrabilità dalla mentita che riceve dalla compressibilità; colle loro forme geometriche spiegavano (e ciò era il meglio) le variabili forme dei cristalli; unendosi insieme secondo le leggi degli equivalenti chimici formavano gli *atomi composti* (passiamo la contraddizione di parole). — Ma questi atomi erano anche d'imbarazzo, e siccome per certo in alcuni corpi dovevano starsene ben lontani fra di loro, così questi poveri atomi si riducevano tanto piccini in confronto delle loro distanze, che le opinioni dei fisici si avvicinano più o meno a quella del Young, secondo la quale le grandezze degli atomi sarebbero alle loro distanze nello stesso rapporto di cento uomini ugualmente distribuiti su tutta l'Inghilterra. Si vede bene che la solidità di quegli atomi non gioverà menomamente a spiegare nè l'impenetrabilità, nè la cristallizzazione, nè le composizioni chimiche. E l'Inghilterra non diventerà niente più deserta se vi togliamo quei cento abitatori. Alcuno potrebbe obbiettare che gli atomi, per piccoli e per lontani che sieno,

sono pur sempre necessarii; poichè senza di essi non esisterebbe la materia: facendomi forte del princpio accordato al § 1 dimanderò qual fatto, qual ragionamento, qual analogia ci renda almeno probabile che le forze e le potenze della materia non possano esistere se non in quanto appartengano, non si sa come, a quegli ipotetici atomi solidi. Quando siamo nell'ignoranza, ogni asserzione di meno è probabilmente un errore risparmiato; le forze della materia esistono, perchè ne vediamo gli effetti, ma che le forze non esistano per loro stesse e sieno soltanto proprietà di atomi solidi, questa è un'ipotesi affatto gratuita, da nessuna ragione resa probabile, che non facilita alcuna spiegazione, e che alle altre oscurità aggiunge quella della dipendenza tra le forze e gli atomi. Si riconoscerà facilmente che il rifiutare gli atomi non toglie nessun mezzo alle spiegazioni; solamente potrebbe dirsi che molte teorie matematiche sono fondate sull'ipotesi di atomi che vicendevolmente si attraggono o si respingono; ma agli atomi possono sostituirsi particelle di materia, ed il Cauchy osservò (*Compte rendu*, 16 Janv. 1854, pag. 67) che un corpo, invece che come un sistema di punti materiali, può considerarsi come una massa continua, in ogni punto e per ogni piano essendovi una speciale pressione o tensione.

15. Si può asseverantemente conchiudere che ogni corpo o porzione di materia è un complesso di forze e di potenze, una delle quali (§ 10) si estende in tutto lo spazio, le altre si rendono sensibili soltanto in un limitato spazio, ch'è quello che dicesi *occupato* dal corpo; ogniqualvolta vuole mutarsi questo spazio, cioè muoversi il corpo, occorre una forza proporzionale alla sua massa, forza ch'è una di quelle del corpo stesso, ma per la cui azione occorre la presenza di un altro corpo (pare che ogni forza sia un'azione vicendevole). L'aggiungere a questo indubitato complesso di forze e di potenze alcuni atomi solidi di volume immensamente piccolo anche rispetto alle loro distanze e di densità immensamente grande, stabilire che la massa sia propria soltanto degli atomi, e che da essi *emanino* tutte le forze, queste non sarebbero che ipotesi affatto gratuite, cui niuna buona ragione nè giustifica nè suggerisce; e d'altra parte tali ipotesi non giovano a spiegare alcun fenomeno.

16. *Impenetrabilità, porosità, divisibilità.* Due o più materie possono insieme compenetrarsi in modo di occupare uno stesso volume, che potrà essere maggiore o minore di quelli che occupavano quando erano separate: questo fatto è palesato dai gas, dalla maggior parte dei liquidi, dalle dissoluzioni, dalle combinazioni chimiche, ecc. Non ammettendo gli atomi, siamo liberi dall'imbarazzo

di cercare in qual modo essi si aggruppino tra di loro. — L'impenetrabilità e la porosità dei corpi erano due creazioni del nostro spirito, ognuna delle quali veniva giustificata soltanto dal bisogno di sostenere l'altra (veggasi la mia memoria sulle proprietà generali dei corpi), esse cadono da per sè, perchè non appoggiate che ad analogie ardite ed ingiustificabili. — Che la materia sia divisibile, i fatti lo mostrano; che poi la divisibilità abbia un limite, questo è uno dei soliti pregiudizii senza scopo nè utilità. D'altronde è pur vero che noi istruiti soltanto da cose finite siamo incapaci di rettamente intendere l'infinito, e quindi anche l'infinita divisibilità della materia; ma noi abbiamo troppe difficoltà nel finito per sentire dispiacere di non poter trattare tale inutile questione dell'infinita divisibilità.

17. *Ipotesi sul calore.* I corpi sono più o meno caldi, e limitandoci ad un solo fatto, essi ci sono cagione di una speciale sensazione: un corpo diviene meno caldo, mentre diviene più caldo quello che gli stava vicino. Se un corpo produce in noi una sensazione vuol dire ch'esso ha la *potenza* di produrla, se un corpo si raffredda e il vicino si riscalda vuol dire che quella potenza è passata dall'uno all'altro. Ciò non è immaginare ipotesi, è soltanto annunciare il fatto. — Abbiamo detto materia un complesso di forze e di potenze; ad una potenza, che si può staccare dalle altre, daremo noi il nome di materia? questa può considerarsi come una questione di convenienza, di opportunità; peraltro alla parola *materia* noi associamo l'idea di cosa indistruttibile, che non può nè diminuire nè aumentare; così dicendo che il calorico è una *materia sui generis*, asseriamo implicitamente che la sua quantità non può per alcuna maniera cangiare, è dunque più opportuno dire che il calorico è una potenza, e che la materia è un complesso di forze e di potenze, delle quali alcune, come quella che costituisce la massa o il peso, non possono nè crescere nè diminuire. — Alla potenza detta *calorico* rimarrà unita quell'altra potenza che dicesi massa; e quella forza-elementare che dicesi attrazione universale? Nulla *a priori* può farci propendere a rispondere col sì o col no: il fatto sembra provare che il calorico non ha peso. — La potenza *calorico* modificherà le sue azioni secondo che si trova unita con questa o con quelle forze e potenza? Nulla si può decidere se non che colla sperienza. Quando quella potenza calorico sarà tornata insieme con quelle forze e potenze, con cui prima coabitava, riprenderà essa precisamente la stessa energia, oppure rimarrà modificata dai sofferti passaggi? Anche qui spetta alla sperienza il decidere; peraltro è per noi un vantaggio che la sperienza sia favorevole al primo supposto, così la scienza è meno complicata.

18. *Calorico come semi-forza-viva.* Quantunque a chi giudica spregiudicatamente debba riuscire indubitato che il considerare il calorico come una potenza speciale non è che l'esposizione del fatto, e che quanto meno si asserisce tanto più si rimanga esente da errore; pure se si possa asserire qualche altra cosa, e se la nuova ipotesi sia conforme ai fatti, egli è certo che la scienza farà un progresso, giacchè essa non è l'enumerazione dei fenomeni bensì la loro classificazione. — Ecco la nuova ipotesi. La potenza, che dicemmo *calorico*, è una semi-forza-viva, questa tutta sola può trasportarsi da un corpo ad un altro, ed essa può cangiarsi in quella semi-forza-viva, ch'è propria dei corpi in movimento. — Dicemmo *cangiarsi*, poichè la prima semi-forza-viva è ben differente dalla seconda; questa è palese, l'altra è affatto invisibile; non è già il corpo che si muove, sono le sue minime particelle; e siccome se continuassero a muoversi in linea retta il moto diverrebbe ben presto palese, così bisogna ammettere che si tratti di un moto vibratorio, o curvilineo per linee rientranti. — Quali sono le forze che mantengono indefinitamente tali movimenti vibratorii? Non è facile il dirlo; ma noi nulla sappiamo sull'intima essenza delle cose, bisogna che ci contentiamo d'ignorar molto, purchè ciò che ammettiamo senza intenderlo, ci sia poi fecondo di conseguenze. — Soltanto parrebbemi che si dovesse accordare che l'ipotesi semplice e naturale non è già quella delle vibrazioni calorifiche; e che in questa, anzichè in quella della materialità del calorico, si accumulano supposizioni gratuite, alle quali manca ogni analogia ed ogni spiegazione. — Quando alcuno dice che la fisica non ha bisogno di supporre un corpo immaginario qual è il calorico, e che i fenomeni calorifici sono soltanto effetti del movimento, può essere ch'egli dica una verità, ma intanto è certissimo ch'egli dice una cosa affatto inintelligibile a chi sia abituato a veramente intendere qualche cosa: particelle o molecole o atomi di un corpo che vibrano, o che si aggirano in orbite rientranti; — che non si disturbano menomamente nei loro movimenti, e continuano a muoversi indefinitamente; — ma che pure comunicano a poco a poco il loro movimento ad altre molecole vicine (comunicazione del calorico per contatto); — che accelerano il loro movimento quando vengono compresse (riscaldamento dell'aria compressa); — che talvolta comunicano il movimento con somma rapidità, ma soltanto per linea retta o per linee riflesse o refratte e senza muovere le molecole presso cui tragittano (calorico raggiante); — che talvolta cangiano il loro movimento vibratorio invisibile in un vero movimento di massa (cangiamento del calorico in lavoro) . . . ; tutti questi a chi voglia considerarli

spregiudicatamente sono veri misteri. — Si adottino pure, ma non si pretenda di mettere per tal guisa la fisica nella strada della evidenza, e toglierla alle chimeriche supposizioni dei fluidi imponderabili. — Giova avvertire che le predette obbiezioni non valgono contro i casi nei quali hanno luogo vere vibrazioni sonore o luminose, e che perciò queste non danno alcun appoggio di analogia alle vibrazioni calorifiche; il calcolo dimostra come quelle vere vibrazioni si mantengano e si propaghino. — Chi ha potuto fare che un suono se ne stia ristretto in piccolo spazio propagandosi d'intorno con quella lentezza con cui si propaga il calorico? Quando si sentì un suono ad accrescersi perchè si comprimeva il corpo? Il suono e la luce si videro propagarsi sempre alla stessa maniera qualunque sia il mezzo che li trasmetta; e se non si propagano, si estinguono; tale è il destino del movimento vibratorio.

19. Io peraltro sono ben lontano dal pretendere che non si debba ammettere se non che quello che s'intende; anzi nella succitata memoria sulle unità ec. ho lungamente difese quelle che dissi ipotesi o pseudoipotesi, e mostratine i vantaggi. Soltanto mi pare malissimo fondata la pretesa di alcuni di liberare la fisica dalle chimere, sotto il cui giogo dicono esser finora rimasta, e ciò ponendo innanzi teorie, che non possono resistere ad un esame alcun poco spregiudicato. — A mio credere il miglior partito si è non di nascondere le difficoltà inorpellandole con parole insignificanti, ma di esporle nettamente. Così per esprimere quell' importantissimo fatto della conversione del calorico in lavoro, quale sembra ricevere ogni dì maggiori conferme, io direi che quella *potenza*, che fu detta (§ 17) *calorico*, è capace di convertirsi in un *lavoro* (§ 8), e che viceversa il lavoro può convertirsi in calorico. — Colla parola *potenza* intendo una causa (§ 14) che forse s'assomiglia ad una forza; non è dunque strano ch'essa produca un lavoro; bensì è nuovo che la potenza producendo lavoro si distrugga, mentre le vere forze rimangono invariate sia che esercitino un'azione o che restino inattive. Ricordiamoci esser un pregiudizio voler trovare sempre l'analogia, e dare ad essa importanza: noi conosciamo sì poche cose, e vogliamo ch'esse si assomiglino per apprenderle più facilmente (credo che questa sia la vera ragione, per la quale abbiamo tanta predilezione per l'analogia): conosciamo la gravità ch'è una forza, la quale rimane costante anche quando produce un lavoro; ciò non ci deve impedire di ammettere anche una potenza che si estingua quando ha prodotto un lavoro, e risorga quando il lavoro si distrugge.

20. *Corrélation des forces physiques par W. R. Grove.* Il principale difetto dell' opera del Grove (e lo sarà di tutte quelle che avanzano idee non ancora ben determinate, e che sono poco precise anche nelle menti dei loro autori) si è di non istabilire esattamente il significato delle parole, e di adoperare quelle denominazioni e quelle frasi, che hanno significato soltanto nelle vecchie teorie, che si vorrebbero abbattere. Nello stesso titolo dell' opera le *forze fisiche* hanno un significato molto indeterminato, e che sembra abbracciare tutte le cause di effetti fisici; ed anche venendo a parlare del movimento, l' autore avanza l' opinione (pag. 28 dell' edizione di Parigi, 1856) che la forza non può essere annientata, ma soltanto divisa o alterata; e dagli esempii ch' egli soggiunge rimane dubbioso se per forza egli intenda la quantità-di-movimento, o la semi-forza-viva; ma per certo non intende la forza qual causa di movimento (§ 8). Quando parla del calore (pag. 42) dice che non lo vediamo che come una forza meccanica, repulsiva, una forza antagonista dell' attrazione di coesione o d' aggregazione, e tendente a muovere le particole di tutti i corpi od a separarle le une dalle altre; qui per forza deve intendersi una vera forza. — Descritto poi l' effetto di dilatazione e di contrazione di due corpi, il secondo più caldo del primo, posti a contatto, il Grove ne conchiude che la materia ha un potere molecolare repulsivo, un potere di dilatazione, il quale è comunicabile per contiguità o prossimità. Ciò è conforme a quello che dissi precedentemente il calorico essere una *potenza*, colla qual parola comprendo anche la forza-elementare (§ 8). Ma quando l' autore prosegue dicendo che il calore (pag. 44) « così considerato è un movimento, e questo movimento molecolare può cangiarsi in movimento di masse o in movimento colla forma ordinaria e palpabile; » l' idea diviene almeno oscurissima. — La quantità-di-movimento delle molecole d' un corpo che si dilata è piccolissima, e la semi-forza-viva ritorna ben presto nulla, poichè le molecole rimangono ferme nella posizione di dilatazione; dunque un corpo riscaldato non differisce sotto questo riguardo da un corpo freddo. È pure inesatto che i termometri (pag. 45) sieno misuratori del calore per mezzo del movimento; giacchè è ben vero che non vi può essere dilatazione senza movimento, e che nei termometri si cerca di rendere il movimento quanto più si possa visibile; ma è pur vero che questo movimento è affatto accessorio, e sarebbe far equivoco sulla parola il credere che vi sia qualche relazione tra questo movimento e quello in cui si vorrebbe consistesse il calorico.

21. L' autore trova (pag. 46) che l' idea del calorico latente ha qualche

cosa di simile al vecchio principio del flogisto, e poi dice (pag. 51) che l'acqua a 75° deve cedere al ghiaccio tanto di calore quanto ne bisogna per separarne le particelle e mantenerle nello stato liquido; e poco appresso soggiunge (pag. 52) « la forza, riguardando semplicemente il calore come una forza meccanica, ch'è impiegata a mettere in libertà o a staccare le particelle del ghiaccio, è tolta all'acqua liquida. » In ciò io veggo poco più che la sostituzione della parola *calore* all'altra *calorico:* si noti eziandio che nell'ipotesi della materia dotata di forze il trasportarsi di una forza dall'acqua nel ghiaccio è un'idea contradditoria a quella che le forze sieno proprietà della materia; nella teoria dinamica può ammettersi la separazione delle forze o potenze, ed allora può ritenersi che la potenza detta calorico abbandoni quel complesso di forze e di potenze, che dicesi acqua, e si unisca al ghiaccio, e ne produca la liquefazione, dopo di che rimanga dissimulata e non si palesi come potenza calorifica se non quando il ghiaccio liquefatto torna a solidificarsi. Ma tutti troveranno che questo discorso è ben poco differente da quello in cui si ammetteva il calorico latente.

22. Prendo un altro esempio dal Grove (pag. 53). « Se una sorgente di calore è applicata all'acqua in cui sia immerso un termometro a mercurio, sulle prime l'acqua e il mercurio si dilateranno ambedue; giunti ad un certo punto, la forza attrattiva delle molecole dell'acqua è tanto superata che l'acqua si vaporizza; a questo punto il calore o la forza incontrando una resistenza molto meno grande da parte dell'attrazione delle particole di vapore che da parte delle particole del mercurio agisce unicamente sulle prime; il mercurio non deve più dilatarsi; il vapore, al contrario, si dilata grandemente. » Non è più il ghiaccio che per giungere a separare le sue molecole si fa dare dall'acqua precisamente tanto calore quanto gliene bisogna; si è la forza-calore che stima più comodo di agire nel vapore dove trova poca resistenza, e perciò cessa di agire nel mercurio: ma chi può intendere la ragione della esigenza del ghiaccio per liquefarsi, e della preferenza di una forza ad agire soltanto dov'è minore la resistenza? E chi immaginerebbe che quella forza-calore che ha cessato ogni suo effetto, perchè s'impiegò a vaporizzare l'acqua, tornerà poi ad apparire quando il vapore si farà nuovamente liquido? Sono queste cose più inintelligibili e più lontane da ogni analogia di quella materia (calorico), che rimane latente senza più manifestare le sue proprietà, e, mutate le circostanze, ritorna libera.

23. Non pare che queste oscure maniere di ragionare sieno scevre d'errore; poichè l'autore ne conchiude (pag. 55) che un termometro a mercurio a

temperatura superiore a 0° dovrebbe liquefare tutto il ghiaccio di cui sarà portato a contatto. I fisici che ragionano mediante quel mito o quel flogisto, che dicesi calorico latente, direbbero invece che il termometro discenderà a zero tosto che avrà liquefatta una piccola porzione di ghiaccio. L'esperienza è facile per decidere tra le opposte conclusioni delle due teorie.

24. Il Grove trova (pag. 56) una bella conferma della sua dottrina nel solidificarsi di una parte di gas acido carbonico, mentre un'altra parte esce per uno stretto orificio da un vaso, in cui il gas era potentemente compresso: l'improvvisa dilatazione esige, secondo l'autore, un sì grande rinforzo di forza che alcune altre parti del corpo tanto si contrattano che finiscono col solidificarsi. Cerchiamo d'indovinare la teoria che dicesi per tal maniera confermata: le molecole materiali dell'acido carbonico sono dotate della forza di coesione, e di una forza repulsiva, che moltissimo prepondera alla prima anche nello stato di gran condensamento e di bassa temperatura; le molecole presso l'orificio impiegano a dilatarsi non solamente la propria forza repulsiva, ma eziandio una gran parte di quella delle molecole, che stanno in fondo del vaso, le quali abbandonate alla forza di coesione si solidificano. — Nasce spontanea la domanda del perchè le molecole presso l'orificio non si contentino di dilatarsi quanto comporta la loro propria forza, e vogliano prendersi anche la forza altrui.

25. Conchiude l'autore dicendo che il calorico è una forza capace di produrre il movimento (pag. 69), e più sotto (pag. 82) dice che dal momento che il calore si paragona nei suoi effetti ad una forza meccanica, si deve aspettarsi *a priori* che una data quantità di calore agendo sopra una materia data produca una quantità data di potenza motrice; ed allora si presenta la questione se una stessa quantità di calore produrrà la stessa quantità di forza-meccanica qualunque sia la materia su cui il calore agisce. Soggiunge ch'egli considera il calore come essendo esso-stesso un movimento od una potenza meccanica, ed ogni quantità di calore è misurata da una quantità di movimento. Ed ammettendo (pagina 84) che tutte le volte che un corpo si dilata esso si raffreddi (nel che riconosce che vi sono alcune eccezioni) egli crede conchiuderne che la potenza meccanica generata dal calore è definita, cioè la stessa qualunque sia la sostanza su cui agisce il calore. — Mi pare difficile intendere il vero significato di questa opinione. Per togliere la possibilità di equivoco aggiungo ad ogni quantità la sua unità espressa colle segnature spiegate al § 9. Il calore non è una forza-elementare $[\mathbf{m} : 1'' 1'']$, giacchè un corpo caldo non ne muove un altro; gli effetti

del calore sono spesso molto differenti da quelli di una forza meccanica. Egli è vero che se un corpo si riscalda in esso vi è movimento; ma questa è una frazione piccolissima riferita all'unità [**lm**] (con che esprimo la massa di un chilogramma spostato per la lunghezza di un metro); forse che per potenza motrice prodotta dal calore l'autore intende la pressione [**lmm** : $1''1''$], che il corpo riscaldato può esercitare nel dilatarsi, od anzi il lavoro [**lm** : $1''1''$] eseguito da tale pressione. Come poi il calore può essere un movimento od una potenza meccanica?, e per quantità di movimento intendesi veramente il prodotto di una massa per una velocità [**lm** : $1''$]?

26. Il Grove crede (pag. 84) poter dimostrare nel seguente modo che « la potenza meccanica generata dal calore è definita, ossia ch'essa è la stessa per una data quantità di calore, qualunque sia la sostanza sulla quale questo calore agisce: » due sorgenti eguali di calore consistenti ciascuna in un chilogramma di mercurio a 200° sono impiegate a sollevare, l'una mediante la dilatazione dell'aria e l'altra mediante il vapor acqueo, due emboli di stantuffi legati insieme in guisa da farsi equilibrio: dunque se uno degli emboli salisse, l'altro discenderebbe e colla compressione del gas determinerebbe un accrescimento di calore, il quale alla sua volta eleverebbe la temperatura di uno dei due chilogrammi di mercurio, il che dall'autore è detto contradditorio. — Prima di tutto io considero come un pregiudicio quello di credere impossibile che, mediante un chilogramma di mercurio a 200°, si aumenti l'egual temperatura di altro mercurio; ed infatti lasciando raffreddare quel primo chilogramma si può (come vedremo al § 28) ottenere un lavoro meccanico, e col mezzo di questo si può, mediante la compressione od in altro modo, accrescere la temperatura dell'altro mercurio, che si suppone sottratto al raffreddamento prodotto dai corpi circostanti. Inoltre dalle parole del Grove sembrerebbe che la potenza meccanica prodotta dal calore dipendesse unicamente dalla temperatura, oppure che il calore trasmesso dal mercurio al gas fosse convertito tutto intero in potenza meccanica; le quali cose non sono ammissibili.

27. *Teoria meccanica del calorico.* Il calore tende ad equilibrarsi, vale a dire, se due corpi hanno temperature differenti il più freddo tende a riscaldarsi ed il più caldo a raffreddarsi; questo passaggio di calore da un corpo ad un altro può eseguirsi mediante alternative dilatazioni e contrazioni di uno stesso corpo, che serve a produrre i due cangiamenti di temperatura, e queste dilatazioni e contrazioni possono produrre un lavoro meccanico. Partendo da questo fatto e dal

principio che sia impossibile il moto perpetuo, il fisico S. Carnot (1824) e più tardi E. Clapeyron (*Journ. École polytechn.*, 1834, cah. XXIII) stabilirono una teoria sulla potenza motrice del calore, secondo la quale il passaggio non immediato di calore da un corpo ad un altro può dar origine ad un lavoro; e viceversa, mediante un lavoro meccanico si potrebbe render disuguali le temperature di due corpi, che prima erano a temperature uguali. Un lavoro può andar perduto, come, per esempio, quando si lascia discendere un corpo senza profittarne col far ascendere un altro; o quando si urtano due corpi non perfettamente elastici: anche un disequilibrio di calorico può togliersi senza ricavarne un corrispondente lavoro meccanico; ciò avviene se i due corpi di temperature differenti sono in immediata comunicazione.

28. Acciocchè si tragga tutto il possibile partito da una differenza di temperatura di due corpi dati bisogna che il passaggio del calorico abbia luogo soltanto tra corpi la cui differenza di temperatura sia piccolissima; ed ecco come la cosa è teoricamente possibile. I due corpi, che noi diremo *caldo* l'uno e *freddo* l'altro, non sieno tra loro in immediata comunicazione calorifera, ed abbiasi un fluido espansibile o vaporizzabile, il quale si ponga da prima in comunicazione col corpo caldo e vada dilatandosi; esso ritrarrà dal corpo caldo tanto calorico quanto occorre acciocchè le loro temperature si mantengano sensibilmente uguali: supponiamo che ad un certo istante cessi ogni comunicazione calorifica, ed il fluido continui ad espandersi, esso decrescerà di temperatura: quando avrà precisamente la temperatura del corpo freddo lo si ponga in comunicazione calorifica con questo, e mediante una forza esterna lo si comprima così esso trasmetterà una parte del proprio calorico al corpo freddo, nel mentre che le loro temperature si manterranno sensibilmente ugualmente: finalmente il fluido s'isoli da ogni comunicazione calorifica in tale istante, che continuando a comprimerlo esso riacquisti nello stesso tempo il suo stato primitivo e la temperatura del corpo caldo. Durante questo *compiuto ciclo* di azioni il fluido espansibile avrà esercitato un lavoro meccanico sia colla sua dilatazione a temperatura costante, sia colla successiva espansione a temperatura decrescente, e per lo contrario avrà richiesto un lavoro esterno prima a temperatura costante poi a temperatura crescente: è chiaro che il primo lavoro supera il secondo; sicchè dall'equilibrarsi delle temperature può ricavarsi un lavoro meccanico, e questo sarà il medesimo qualunque sia la natura del fluido espansibile adoperato per convertire in lavoro la diminuzione di temperatura del corpo caldo, e l'accrescimento

nel corpo freddo. Ciò si fonda su questi due principii, che sembrano comprovati da tutti i fatti naturali. 1.° È impossibile il moto perpetuo; 2.° quando, per esempio, nel primo dei precedenti stadii, il fluido aeriforme riceve calorico dal corpo caldo, e si dilata esercitando un lavoro, se vi si applicasse una forza comprimente quanto poco si voglia superiore alla forza di dilatazione, il fluido si comprimerebbe e darebbe al corpo caldo precisamente tanto calorico quanto ne prende nel primo caso; dicasi lo stesso per tutti gli altri stadii di azione. Ora se mediante un fluido A l'equilibrio di temperatura tra il corpo caldo ed il freddo producesse un lavoro meccanico superiore a quello che potrebbe produrre il fluido B; questo si potrebbe adoperare in senso *inverso*, cioè posto B in contatto col corpo freddo, lo si lascierebbe dilatare, con che produrrebbe un lavoro e nello stesso tempo sottrarrebbe del calorico dal corpo freddo; staccatolo da questo corpo, lo si comprimerebbe, ponendolo in comunicazione calorifica col corpo caldo nel momento in cui le loro temperature fossero divenute eguali, ed allora continuando a comprimerlo si farebbe in guisa che cedesse al corpo caldo tanto calorico, che poscia isolato nuovamente il fluido B e lasciatolo dilatare esso giungesse nello stesso tempo alla temperatura del corpo freddo ed a uguale stato di dilatazione col quale cominciò il predetto ciclo di azioni. Per tal maniera mentre il fluido A tende ad uguagliare le temperature dei corpi caldo e freddo, il fluido B farebbe ufficio opposto ed esattamente uguale, sicchè i due corpi manterrebbero temperature costanti nello stesso tempo che si otterrebbe sempre l'eccesso di lavoro meccanico prodotto dal fluido A in confronto di quello distrutto da B, il che è in opposizione col 1.° principio.

29. Il predetto teorema del Carnot ci offrirà il limite massimo dell'azione di ogni macchina *piromotrice*. Il dato sperimentale che dobbiamo conoscere si è il rapporto $\lambda : C$ tra il lavoro λ ottenuto e la quantità di calorico, che in uno dei predetti cicli compiuti è emessa dal corpo caldo, supposto che la sua corrispondente diminuzione di temperatura sia trascurabile; questo rapporto sarà funzione della differenza di temperatura t di due corpi caldo e freddo, ed anche della temperatura T del corpo caldo. Io prendo per unità (§ 9) di lavoro mille chilogrammetri [**gsm**], cioè uno stereo d'acqua [**s**] sollevato all'altezza di un metro [**m**] sotto l'azione della gravità [**g**] $= 9{,}8$ [**m** : 1″1″]; per unità di calorico [**c**] intendo 100 calorie, o più propriamente la quantità di calorie occorrenti a portare la temperatura d'un litro d'acqua [**l**] da 0° a 100°.

30. Rammentando che l'azione della supposta macchina è suscettibile

d' *inversione* (§ 28), vale a dire che mediante il lavoro λ si potrebbe introdurre nel corpo caldo la quantità di calorico C, si riconoscerà che l'impossibilità del moto perpetuo conduce alla seguente conseguenza. Si abbiano tre corpi delle temperature T, $T-t$, $T-t-t'$; la quantità di calorico C sia trasmessa (coll' intermezzo di un fluido espansibile, e nel modo già detto) dal primo nel secondo corpo, il che produrrà il lavoro λ, poi dal secondo nel terzo, il che produca il lavoro λ', il passaggio della stessa quantità di calorico dal primo nel terzo dovrà produrre lo stesso lavoro $\lambda_1 = \lambda + \lambda'$. Sicchè se il rapporto $\lambda : C$ non dipende dalla temperatura T, ma soltanto dalla differenza t, dovrà essere $\lambda = mCt$, essendo m un numero costante, che esprime il lavoro che può ricavarsi da un litro di acqua portato dalla temperatura di 100° a quella di 0°.

31. *Teoria della trasformazione del calorico in lavoro.* La teoria del Carnot mi sembra fondata sopra principii plausibilissimi e poco mi pare che si potrà opporle; egli è di fatto che ogni *piromotore* ha per causa due corpi di differenti temperature, e per effetto un lavoro ottenuto da un parziale equilibrio tra quelle temperature. Essendo il disequilibrio di temperatura la causa, sembra ragionevolissimo supporre che ogniqualvolta si pongano in contatto corpi di differente temperatura si avrà una perdita, perchè l' equilibrio si stabilirà almeno in parte senza ottenere il corrispondente lavoro. — Alle conclusioni fatte nel § precedente si oppone un' ipotesi, che, come già ho accennato, va ognora più acquistando seguaci ed appoggio di osservazioni. Secondo questa ipotesi ogniqualvolta si ottiene un lavoro vi è una corrispondente distruzione di calorico, perlochè si dice il calorico non essere che una particolare manifestazione di lavoro o di semi-forza-viva.

32. Se non che quando non si ammette la materialità del calorico ciò richiede qualche spiegazione; è necessario dire mediante quali sperienze si potrebbe determinare il numero di calorie $\frac{1}{100}$ [**c**] contenute in un dato corpo in date circostanze; per esempio nella massa d' un chilogramma [**l**] d' aria contenuta nel volume [$\mathbf{m}^3$] ed avente la temperatura T. Bisogna in primo luogo ritenere come assioma che quali si sieno i mutamenti sofferti da un corpo quando esso ritorna nello stesso stato, nello stesso volume ed alla stessa temperatura contenga un egual numero di calorie; al che pur potrebbe farsi qualche restrizione essendo noto esistere, almeno tra i corpi solidi, dei casi nei quali si muta la temperatura in conseguenza di un non ben definito cangiamento molecolare. La

quantità assoluta di calorie corrispondente alla temperatura 0° dee considerarsi come un' incognita da determinarsi ipoteticamente in guisa da rendere più semplice la teoria; supponiamo che con quel $[\mathbf{m}^3]$ di aria si ponga in comunicazione calorifica una frazione di chilogramma f $[\mathbf{l}]$ di acqua alla temperatura 100° e dopo ristabilito l' equilibrio e l' aria e l' acqua abbiano la temperatura 1°, ne dedurremo che un $[\mathbf{l}]$ d' aria del volume $[\mathbf{m}^3]$ richiede la quantità di calorico $0{,}99\,f$ $[\mathbf{c}]$ per passare dalla temperatura 0° alla 1°. — Se invece la massa $[\mathbf{l}]$ di aria fosse tenuta sotto una pressione costante, sicchè da 0° a 1° il volume crescesse da $[\mathbf{m}^3]$ a $\left(1+\frac{\delta}{100}\right)[\mathbf{m}^3]$, e se per tal cangiamento si fosse richiesta la quantità f' $[\mathbf{l}]$ di acqua a 100°, non si potrebbe già dedurne che l' aria avesse acquistata la quantità di calorico $0{,}99\,f'$ $[\mathbf{c}]$; giacchè una parte di calorico si suppone trasformata nel lavoro ch' esercitò l' aria dilatandosi. Forse m' inganno, giacchè è ben difficile sottrarsi interamente ad idee preconcette; mi sembrerebbe impossibile verificare sperimentalmente che nella dilatazione dell' aria si distrugga una quantità di calorico equivalente al lavoro esercitato; per certo bisogna ammettere la diversa capacità dei corpi pel calorico, sicchè il raffreddamento che accompagna la dilatazione potrebbe attribuirsi al solo accrescimento di capacità.

33. Si ritiene per vero che quando il passaggio del calorico da un corpo caldo ad uno freddo si eseguisce profittando di tutto il lavoro che può trarsene, le quantità di calorico dato dal corpo caldo e ricevuto dal freddo, anzichè uguali, sieno proporzionali alle loro rispettive temperature contate dal punto del freddo assoluto, il quale si suppone esser quello, in cui, secondo la legge del Gay-Lussac, l' aria si ridurrebbe ad un volume nullo; sicchè il coefficiente di dilatazione $\delta = \frac{3}{8}$ determinato da Gay-Lussac darebbe pel freddo assoluto $-267°$, e $\delta = \frac{4}{11}$ dà $-275°$. Risulta da questa supposizione che una parte del calorico somministrata dal corpo caldo rimane distrutta, vale a dire si converte in lavoro. Sicchè se T è la temperatura del corpo caldo contata da $-275°$, e $T-t$ quella del corpo freddo, per ogni centinaio di calorie $[\mathbf{c}]$ somministrate dal corpo caldo, il corpo freddo ne riceve soltanto $\frac{T-t}{T}[\mathbf{c}]$, ed il calorico rimanente $\frac{t}{T}[\mathbf{c}]$ si converte nel lavoro espresso (§ 29) da

$$42{,}4\,\frac{t}{T}\,[\mathbf{gsm}]\,.$$

— Questa legge a me sembra troppo semplice per essere l'espressione della verità, giacchè non mi pare che i fatti dimostrino nelle leggi quella semplicità, cui alcuni vorrebbero imporre alla natura. — Si noti la difficoltà di stabilire in maniera assoluta in che cosa consista l'eguaglianza di due intervalli di temperatura, per esempio di quelli da — 275° a 274° e da 99° a 100°.

34. Dee farsi un'altra osservazione: mediante il lavoro o coll'attrito o in altro modo si può riscaldare un corpo, ma non è altrettanto facile convertire il calorico in lavoro. Prendete quanti corpi volete ad egual temperatura, e provatevi a trarne del lavoro e nello stesso tempo raffreddarli; cosa che sarebbe doppiamente utile nell'estate; ma non credo che si potrà mai conseguirla. Immaginate di avere una sorgente di freddo, per esempio una soluzione frigorifica; e vi sarà possibile convertire in lavoro una parte del calorico dei corpi circostanti. Così ammessa l'equivalenza tra il calorico ed il lavoro, è ben singolare che non si possa convertire il calorico in lavoro se non in quanto si abbia un corpo che contenga meno calorico degli altri. È invece indubitato il principio del Carnot che il lavoro si ottiene diminuendo un dato disequilibrio di temperature. — Viceversa mediante il lavoro si può produrre un disequilibrio di temperatura e perciò anche raffreddare un corpo.

35. Contrariamente alla fatta osservazione potrebbe dirsi che data dell'aria compressa alla comune temperatura se ne ottiene col lasciarla dilatare un lavoro meccanico e nello stesso tempo un raffreddamento: ma in questo caso mi pare che l'aria compressa rappresenti il lavoro impiegato a comprimerla, e che vi sta come immagazzinato; non altrimenti che in una molla caricata od in un peso sollevato, i quali danno un lavoro quando si permette alla molla di spiegarsi ed al peso di discendere. Immaginiamo che cento litri $\left(\frac{1}{10}\,[\mathbf{m}^3]\right)$ d'aria sieno compressi in un solo litro $\left(\frac{1}{1000}\,[\mathbf{m}^3]\right)$; nel riprendere sotto la pressione atmosferica [10**gm**] il volume di 100 litri, esso produrrà un lavoro, che ascenderà a 3,6 [**gsm**], purchè si dia tempo all'aria di mantenersi alla temperatura dell'ambiente traendo il calorico dai corpi circostanti; bisognerebbe adunque che la quantità di calorico assorbita, più quella esistente nei cento litri d'aria compressi in un solo litro, e meno quella contenuta nei cento litri d'aria atmosferica, eguagliasse $\frac{3,6}{42,4}\,[\mathbf{c}]$. Io non so persuadermi che si tratti soltanto di una trasformazione di calorico in lavoro, e che per nulla entri

la forza elastica dell'aria. È possibile che lo spiegarsi di una molla dia origine ad un assorbimento di calorico, ma per certo che questo calorico non rappresenterà tutto il lavoro prodotto; e se ciò non è nella molla, potrà bene non esserlo nell'aria. Bisognerebbe anche ammettere che la quantità di calorico assorbita dalla molla nello spiegarsi fosse molto differente secondo la diversa resistenza che essa vince, poichè il calorico assorbito dovrebbe equivalere al lavoro esternamente esercitato, ed al lavoro nel muovere le parti stesse della molla.

36. *Calorico latente.* Coll'idea della trasformazione del calorico in lavoro, o viceversa, vorrebbe spiegarsi anche il calorico latente; così il calorico reso latente dalla liquefazione del ghiaccio si dice impiegato a staccare le particelle del ghiaccio ed a vincerne la mutua attrazione; ma quando un lavoro si adopera a rompere un corpo il lavoro rimane distrutto, nè più ricomparisce: si risponderà che le molecole dell'acqua possono in altre circostanze cedere nuovamente alla loro mutua attrazione, e che in tal guisa nell'agghiacciare dell'acqua si riproduce il lavoro sotto forma di calorico; ma qual è questa nuova circostanza, per cui l'acqua torna a solidificarsi? Si rammenti che quel calorico che dapprima la ha fusa si è distrutto convertendosi in lavoro per istaccar le molecole; dunque esso più non esiste ad impedire l'avvicinamento delle molecole. Le molecole avvicinandosi le une alle altre acquisteranno una quantità-di-movimento, ma non si vede in qual lavoro questa si possa trasformare (si noti eziandio che l'acqua agghiacciandosi si dilata). In fine non si potrà mai capire che cosa sia la trasformazione del lavoro in calorico, finchè non si abbia detto in che cosa consista il calorico (§ 18). Si noti esser impossibile non ammettere la differente capacità dei corpi pel calorico, e nulla ci vieta di supporre che la capacità pel calorico di uno spazio vuoto e di un altro spazio occupato da aria compressa sia minore della capacità pel calorico di tutto lo spazio complessivo, nel quale sia dilatata l'aria. Secondo la teoria pirodinamica se l'aria compressa va ad occupare lo spazio vuoto senza essere da nulla impedita, cioè con tutta la velocità che ricevono le sue molecole, non vi è assorbimento di calorico, il quale ha luogo quando una parete cede alla pressione dell'aria, sicchè questa esercita un lavoro, ch'è l'equivalente del calorico assorbito.

37. Peraltro quali si sieno le difficoltà di formarsi una qualche idea del calorico rimarrà sempre un'importantissima teoria quella che riguarda le mutue relazioni tra i fenomeni di moto e quelli di temperatura; teoria che cominciata dal Carnot sembra dover ricevere importanti modificazioni pei lavori di Joule,

Thomson, Clausius, ecc.; io non mi arresto di più intorno a questo argomento, che fu già trattato da uno dei nostri colleghi, e, rivolgendo ancora le mie idee alla materia ed alle forze, parmi che soltanto si possa dire che quella *potenza*, a cui suol darsi il nome di calorico, può trasportarsi da un corpo ad un altro, che non di rado essa diminuisce nei suoi effetti, sia poi ch' essa in parte si celi, oppure si trasformi in un lavoro meccanico. — Ciò è dir poco o affatto nulla sulla natura della causa dei lavori termici: ma il Grove non dice in sostanza nulla di più; le sue sono frasi, a cui non può darsi alcun preciso e chiaro significato; spesso parla del calorico come fosse un corpo *sui generis*, poi chiama il calore una *forza*, senza che si possa capire in qual senso prenda tal parola; poi il calore si converte in lavoro; ma prima di divenir lavoro era forse una semi-forza-viva? Da qual moto era desso costituito o rappresentato? Come questo moto si propaga lentamente da corpo a corpo? Come si mantiene invariato? Come talvolta si slancia nello spazio colla velocità e secondo le leggi della luce?

38. *Vacuità di alcune teorie.* Chi esamini la cosa con un poco d' attenzione, e sfrondi alcune frasi che celano la nullità del pensiero, si persuade che dopo negata la esistenza del calorico noi siamo ridotti a non saper nulla sulla natura della causa; vediamo i fenomeni, li aggruppiamo artificialmente, ma non ci si presenta nemmeno con qualche piccola probabilità alcuna ipotesi sulla causa dei fenomeni stessi. Il Fusinieri nel negare l' esistenza del calorico come un corpo *sui generis* era stato molto più esplicito; aveva detto che i fenomeni calorifici sono prodotti dalla materia in istato di *espansione;* ma poscia questa materia *attenuata* non ispiegava i fenomeni niente meglio del calorico, di cui teneva le veci, e dava una speranza affatto illusoria che da un bricciolo di materia, la quale, secondo le opinioni del Fusinieri, era così facile ad attenuarsi lungo gli spigoli, potesse trarsi a nostro beneplacito un grandissimo calore.

39. Se niente possiamo dire intorno alla causa dei fenomeni calorifici, rimane sempre da studiarne le leggi, al che nulla giova qualche avventata ipotesi, o qualche frase senza senso; sono di fondamento soltanto le sperienze. Siccome per esporre i fatti occorre un linguaggio, il quale più o meno direttamente alluda alle cause, così mi pare che sarà da conservarsi l' uso della parola *calorico;* il Grove sembra affettare di sostituirvi l' altra *calore*, ma il senso in cui la adopera si è come se esprimesse una sostanza suscettibile di passare da corpo a corpo. Oltre la parola *calorico* bisogna pure adoperare l' altra di *capacità pel calorico* (detta impropriamente *calorico specifico);* poichè due volumi o due

masse uguali di sostanze differenti sviluppano quantità differenti di calorico nell' abbassare di ugual grado le loro temperature; e pei fluidi espansibili si hanno due differenti capacità secondo che si suppone che il fluido conservi lo stesso volume oppure la stessa tensione: nel che peraltro vi è la difficoltà (§ 32) proveniente dal calorico, che forse rimane distrutto. Finalmente nell' ignoranza in cui siamo sulla natura del calorico può ammettersi che, per esempio, il ghiaccio a 0° contenga minor calorico che l' acqua alla stessa temperatura; queste sono cose che bisogna lasciare indeterminate per poi adattarle nel modo più semplice ai fatti. E siccome non si suppone che il calorico sia una sostanza indistruttibile e ingenerabile, così ammetteremo inoltre che, mediante il lavoro meccanico, possa prodursi del calorico, ossia in altri termini, che il lavoro possa cangiarsi in calorico.

40. *Se il lavoro possa distruggersi.* Qui si affaccia un altro di que' principii generali offerti dalla sperienza, cui niuno vorrà dire che sia una verità innata da riceversi senza esame, e che pure siamo disposti ad accogliere con tanta facilità e compiacenza. La ragione di ciò io la troverei nella brama di sapere unita col desiderio di risparmiarci la fatica. Ci piace un principio generale, un sistema, perchè sotto il simbolo di poche parole ci promette d' insegnare molte cose; così noi attribuiamo alla natura quella semplicità di leggi, che giova alla nostra corta veduta; ci disturbano invece le eccezioni, e vogliamo modellare i fatti secondo i nostri sistemi. — Perciò i fisici pongono innanzi il principio che il lavoro meccanico, o la semi-forza-viva, non possa nè accrescersi nè diminuirsi; per la prima parte accorderemo che i fatti sieno ad essa favorevoli; per lo contrario i fatti di attriti, d' imperfette elasticità e di resistenze di ogni genere smentiscono tutto dì la seconda parte. Forse si risponderà che quanto sembra avvenire in una piccola cerchia non è più vero nell' intero mondo, nel quale il moto si perpetua con vicenda continua di azioni meccaniche calorifere, chimiche, vitali, ecc. Dubito molto della verità di questo asserto; il calore centrale della Terra, che va perdendosi negli spazii celesti, e molto più quel torrente di calorico, che con vicenda diurna ed annua ci viene dal Sole, sono continue cagioni di movimento, che possono ben sopperire al moto, che viene continuamente distrutto dalle resistenze: e noi, la cui storia data da ieri, non possiamo giudicare se l' insieme delle azioni meccaniche, calorifiche, vitali, ecc. vadano decrescendo e molto meno se sieno per durare quanto il mondo. Trasportiamoci col pensiero nelle regioni polari, vi troveremo regnare la quiete e la morte, quantunque i

venti e le meteore vi portino qualche parte del moto, di cui sono ricche le altre zone, e pur vi giungano obbliquamente i raggi solari: gli avanzi fossili ci mostrano che anche in quelle regioni fu altre volte rigogliosa la vita, un immenso movimento vi si è a poco a poco spento nello stesso tempo che ne sfuggiva il calorico. Da ciò possiamo arguire qual sarà lo stato di tutta la Terra quando la sua temperatura si sarà eguagliata a quello dello spazio circostante, e quando il Sole si sarà esso pure esaurito pel calorico continuamente emesso.

41. Ammetteremo dunque che il lavoro o la semi-forza-viva possa cangiarsi in calorico, ma ci guarderemo bene dal ritenere *a priori* che il moto che si estingue produca sempre calorico. Viceversa ammetteremo che il calorico possa convertirsi in movimento, ma non crederemo che la stessa quantità di calorico produca sempre lo stesso lavoro se non in quanto le sperienze esattamente le mostrino, e d' altra parte ricorderemo essere una condizione necessaria per la trasformazione del calorico in lavoro che una maggior quantità di calorico passi da un corpo ad un altro.

42. In quanto al *calorico raggiante* lo potremo considerare come calorico trasformato in *semi-forza-viva*, potremo dire ch' esso si propaga come le vibrazioni trasversali dell' etere costituenti i raggi luminosi; ma credo che nulla potremo stabilire sulla sua essenza. Se, per esempio, dicessimo che il calorico raggiante è la semi-forza-viva delle vibrazioni dell' etere, come potremmo persuaderci che la quantità di calorico [**c**] che riscalda 4 chilogrammi da 0° a 25° equivalga veramente (§ 33) al lavoro 42,4 [**gsm**], ossia alla semi-forza-viva 416 [**smm** : 1″1″], ch' è quella di 41,6 chilogrammi che si muovono colla velocità di 100 metri per minuto-secondo? A chiunque voglia proporre ipotesi raccomando di non contentarsi dell' indeterminazione delle parole, e di far sempre le applicazioni numeriche.

43. *Opinioni del Grove.* Prendendo ad imparziale esame le idee del Grove sul calorico, mi pare che o esse si considerano come pensieri anteriori alle sperienze e fondate sui principii della semplicità dei mezzi di cui si serve la natura, del non presentare il calorico tutte le proprietà della materia, e quindi potersi dubitare della sua esistenza, della trasformazione vicendevole tra il calorico e il lavoro: e sotto questo punto di vista mi sembrano idee vaghe ed indeterminate che altri molti possono aver avuto, ed hanno infatti avuto, idee che probabilmente non recheranno alcun vantaggio alla scienza, e che anzi saranno di danno, facendo credere agl' inesperti ch' esse valgono a spiegare, ciò che non

sono nemmeno in istato di descrivere, e sostituendo vane ipotesi all'esatta esposizione di quello ch'è veramente indicato dai fatti. — Che se invece noi consideriamo da prima le sperienze relative alla produzione di calore col mezzo di lavoro meccanico, ed alla trasformazione del calorico in lavoro, noi le troviamo importantissime; dopo di ciò le idee sistematiche in parte sono l'espressione dei risultamenti della sperienza, in parte sono idee mancanti di precisione, e che per nulla rischiarano l'argomento.

44. *Elettricità.* Ho già detto *(Sulle unità, ecc. e sull' importanza ed uso delle teorie)* che l'ipotesi, o se voglia dirsi pseudoipotesi dei due fluidi elettrici, è utile a coordinare i fenomeni, quantunque siamo lungi dal supporre ch'essa sia la vera espressione del fatto. Mediante l'ipotesi dei due elettrici si spiegano e si possono anche sottoporre a calcolo i fenomeni della elettricità statica; le correnti elettriche sono abbastanza bene espresse, particolarmente se si ammette che in ogni particella siavi decomposizione successiva del fluido neutro, ecc. Il Grove dice (pag. 101 dell'ediz. francese) che « non si avrà ripugnanza a con» siderare i fenomeni elettrici come una polarizzazione molecolare della materia » ordinaria, o come la materia ordinaria agente per attrazione e per repulsione » in una direzione determinata. » Se mai alcuno credesse d'intendere che cosa significhi la *polarizzazione molecolare*, la successiva spiegazione lo convincerà dell'errore in cui si trovava. In altro luogo (pag. 250) l'autore dice che l'elettricità Frankliniana è una condizione statica della forza meccanica agente sulle molecole. — Quando si procede in tal modo con frasi senza significato, qual chiarezza si potrà sperarne? Non si farà che scorrere qua e là in cerca di particolari fenomeni, e notare, opera ben agevole, la difficoltà di accordarli coll'ipotesi dei due fluidi, senza poi saperne sostituire alcun'altra di migliore.

45. Consideriamo uno dei più comuni fenomeni. Due corpi conduttori isolati, l'uno elettrizzato e l'altro no, sono a poca distanza, un corpicciuolo sospeso ad un filo di seta va oscillando tra di loro. — Dov'è la polarizzazione molecolare? Qual è la direzione determinata, in cui la materia ordinaria agisce per attrazione e per repulsione? — Simile cosa potrei ripetere per ogni altro fenomeno, e dovrei copiare quasi tutta l'opera se dovessi scendere ad ogni critica di dettaglio. A pag. 107 si legge che la differenza tra l'elettricità prodotta da una macchina ordinaria e l'elettricità della pila Voltaica si è che la prima è di una intensità molto più grande della seconda, ma agisce sopra una quantità di materia molto più piccola. Si sostituisca alla parola *elettricità* la frase: *pola-*

rizzazione molecolare, oppure: *la materia ordinaria agente per attrazione e per repulsione in una direzione determinata;* e si vegga qual senso ne risulti. — A pag. 115 dopo aver parlato della materia impressionata dalla scarica, quantunque secondo lui la scarica sia essa stessa l'impressione della materia, l'autore nota molto ingenuamente la schiavitù in cui le idee sono tenute dalle parole, mentre per esprimere un'opinione differente dalle opinioni ricevute è sforzato servirsi di parole, che implicano le opinioni ricevute. — Chi ha idee chiare e precise non trova difficoltà ad esprimerle, poichè alla peggio può servirsi di parole nuove dandovi opportune definizioni; ma quando non si vuol ammettere che la materia ordinaria, mentre si debbono esprimere classi di fenomeni affatto diversi, è necessario ricorrere alle parole, con cui nella teoria, che si vuol ripudiare, quei fatti sono espressi. È sicuro criterio dell'imperfezione di una teoria il non potersi formare un linguaggio proprio, e doverne accattare uno dalle teorie cui riprova. — Il Grove dice che il calorico è un'idea arcana simile a quella dell'antico flogisto, sia pure; ma la chimica moderna si servì essa del linguaggio del flogisto, o piuttosto non cominciò collo stabilire una nuova nomenclatura? — Se volete esser intesi, e dirò anche se volete pensare, cominciate col formarvi un linguaggio conforme alle vostre idee.

46. L'autore non dice che cosa sia una corrente elettrica o Voltaica, e va cercando gli effetti che produce sui fili conduttori; alcuna volta (pag. 116) quando sono fusi si raccolgono in nodi o grani come fossero compressi longitudinalmente. Questo fenomeno speciale nulla insegna, ed evidentemente dee dipendere dall'attrazione molecolare che conforma i liquidi in goccioline. Altri fili senza fondere si raccorciano. Ebbene, questo sarà uno dei tanti, nè certo uno dei maggiori, fenomeni della corrente elettrica; ne vorremo forse dedurre che la corrente consiste in tale cangiamento di lunghezza del filo? — È ugualmente inutile che io segua l'autore in altre simili considerazioni, dopo le quali conchiude (pag. 119) che il fatto che la conducibilità dipenda dalla struttura o disposizione molecolare non è spiegabile nella teoria dei fluidi elettrici; mentre che se l'elettricità è soltanto una trasmissione di forza o di movimento, la cosa è appunto come doveva essere, e ne viene che il diamante trasmetta la luce ed arresti l'elettricità, mentre il carbone è un corpo opaco e buon conduttore. — Non ho tempo d'indovinare quali sieno le basi di questa conseguenza, poichè vorrei invece intendere la vera definizione dell'elettricità, che non è più una polarizzazione molecolare, bensì una trasmissione

di forza o di movimento. Ma se la *forza* sia (§ 8) la causa di movimento, io non intendo nè che cosa significhi la trasmissione di una forza, nè come una corrente Voltaica sia una forza trasmessa. In quanto alla *trasmissione del movimento,* non mi pare che sia la nota comunicazione del movimento, per la quale un corpo, che prima si moveva, si arresta, e si muove invece altro corpo che prima era in quiete. Sorgerebbe il dispiacere che l'autore non abbia creduto opportuno d'impiegare poche parole a spiegare se intendeva parlare della *semi-forza-viva* di un moto vibratorio (chè già le vibrazioni, che fecero sì bella prova nell'ottica, sono chiamate a sostenere tutte quelle teorie, che non preferiscono prendere a campione la forza espansiva) o di una forza propriamente detta, o di una quantità-di-movimento; ma è facile capire che non fu sua colpa se non diede tali spiegazioni. Nè fu colpa della sua volontà se parlando delle attrazioni e repulsioni dei corpi elettrizzati si limitò a dire (pag. 121) che non presentano maggior difficoltà quando si considerano come prodotte *par un changement dans l'état ou dans les rapports de la matière affectée*, di quella che si trovi a spiegare l'attrazione tra il Sole e la Terra. — La rottura e riduzione in polvere d'un corpo non-conduttore, e la fusione o la dispersione d'un filo metallico prodotto dalla scarica elettrica sono pel Grove (pag. 127) conseguenze necessarie d'un rovesciamento improvviso della polarizzazione molecolare, o di un movimento vibratorio repentino od irregolare della materia stessa.

47. Alcuno mi potrebbe tacciare di considerare l'opera sulla correlazione delle forze fisiche con una critica dei dettagli anzichè delle idee fondamentali: ma le inesattezze od oscurità mi si presentano quasi ad ogni pagina, ed invano cerco di formarmi un'idea di quell'ipotesi sul calorico, sull'elettricità, ec. ch'egli intende sostituire alle ipotesi antiche. Le vicendevoli azioni tra gli agenti fisici sono ben conosciute, e ne feci io stesso argomento di un articolo della già citata mia memoria (*Sulle unità,* ec., § 152). In quanto alla correlazione delle forze, vale a dire alle loro equivalenze e trasformazioni le une nelle altre, questa è un'idea, che non risulta menomamente dalle definizioni del calorico, dell'elettricità, ec. date in maniere così indeterminate e multiplici; spetta soltanto alle sperienze riconoscere se ed in quali circostanze essa sia esatta, egli è un pregiudizio senza alcun fondamento volerla stabilire *a priori:* e nell'opera del Grove si trovano soltanto accennate alcune sperienze, che potranno provare la correlazione tra le forze senza peraltro che siano mai date relazioni numeriche; è poi indicato un numero molto maggiore di sperimenti, che nulla hanno da fare colla

correlazione delle forze, i quali, egli dice, non potersi spiegare colle antiche ipotesi, e che per sapere se possano spiegarsi colle nuove, bisognerebbe cominciare a dare a queste un preciso significato.

48. *Della luce.* Quantunque si conosca una teoria che sì bene corrisponde coi fenomeni ottici, e qui si potesse veramente parlare di trasmissione di moti vibratorii, pure il Grove sembra farsi una legge di non parlare delle cause e della teoria, e soltanto descrive alcuni fenomeni luminosi (pag. 140) ed alcune azioni chimiche prodotte dalla luce; poscia va spigolando (pag. 149) alcuni fenomeni, nei quali dalla luce sono prodotte immediatamente o mediatamente azioni chimiche, correnti elettriche, magnetismo, calore, movimento; senza peraltro che si possa scorgere alcuna proporzione tra queste differenti azioni. — È inutile presentare fatti negativi quando mancano i fatti positivi a sostegno di un' opinione, pure ne accennerò uno come esempio d' infiniti altri. Per produrre una luce che s' avvicini a quella mandataci dal Sole ci vuole un calore sommamente intenso, invece se la luce del Sole è assorbita per lungo tempo da un corpo opaco questo riceve piccola quantità di calore.

49. L'autore è molto disposto a credere (pag. 161) che le vibrazioni luminose sieno quelle della materia ordinaria, anzichè di un fluido speciale, io non ci veggo alcun vantaggio: bisognerà ammettere tutti gli spazii celesti riempiuti di questa materia ad una densità sufficiente per porre in vibrazione le materie terrestri, e, senza parlare delle obbiezioni che a ciò farebbero gli astronomi, questa materia potrebbe trasmettere anche i suoni, ed i cieli non sarebbero muti. — Che la luce consista nelle ondulazioni della materia ordinaria, l' autore lo deduce anche dalla analogia della luce col calore, il quale consiste nelle ondulazioni della materia ordinaria (pag. 162); così noi veniamo adesso a sapere che cosa sia il calore, che prima ci si presentava come una forza. — Grove ritiene che la materia che (pag. 179, 181) colle sue ondulazioni serve di mezzo di trasmissione alla luce ed al calore, sia la materia ordinaria, dotata di peso, quantunque a causa della sua estrema rarefazione essa non possa manifestare le ordinarie proprietà se non che ad un grado infinitamente piccolo; mentre nell' opinione opposta bisogna ammettere una materia specifica senza peso, la cui esistenza non è stabilita che mediante fenomeni, la cui spiegazione suppone quella stessa esistenza. Per ispiegare i fenomeni s' invoca l' etere, e per provare l' esistenza dell' etere s' invocano i fenomeni. — Vedete a che punto sono le questioni! di sapere se è una materia il cui peso sia infinitamente piccolo, oppure

una materia speciale senza peso! Che non si voglia capire essere stolta pretesa indagare l'intima natura delle cose, e che i fenomeni veramente non si spiegano nè in un modo nè nell'altro; l'ipotesi dell'etere (che pure è quella la cui verità più si avvicina ad essere dimostrata) è in fine un mezzo per coordinare i fenomeni ottici, qual confusione o complicazione nasce dal supporre che l'etere sia un corpo speciale?, chi ha stabilito *a priori* che tutti i corpi sieno pesanti, e chi ha detto che l'etere assolutamente nol sia? Che sia una delle tante materie ordinarie od una materia speciale, non è questa una inutile questione di parole? È poi cosa ben singolare trovare un circolo vizioso nell'ammettere che gli effetti fanno prova della causa, e la causa serve a spiegare gli effetti!!

50. Le opinioni si aggirano anch'esse in orbite rientranti: si è trovato ridicolo l'orrore pel vuoto ammesso dagli antichi, ed ecco che il Grove trova (pag. 175) ridicolo che si abbia riso di un aforismo, il quale prova che quelli, che i primi hanno generalizzato in quell'assioma i fatti da loro conosciuti, avevano spinto l'osservazione ben lungi coi pochi mezzi che possedevano.

51. *Magnetismo.* Dopo le scoperte di Oersted, d'Ampère, di Faraday, ec. alcuni non dubitano di sentenziare che l'elettricismo ed il magnetismo sono una medesima cosa, e che di due supposti fluidi imponderabili (i magnetici) è ormai dimostrata la non esistenza. Pure vi sono essenzialissime differenze tra i fenomeni magnetici e gli elettrici, dall'una parte quiete e costanza, dall'altra moto e fugacità nei fenomeni. Che una causa agisca sull'altra ciò non è indicio che sieno identiche, e di questa identità non ci persuade nemmeno il vedere che coll'elettricismo possa simularsi il magnetismo, e che una calamita possa produrre una corrente elettrica (peraltro istantanea). Che se mi si domandasse se io ammetto che vi sia un fluido magnetico neutro, il quale si decomponga nell'australe e nel boreale, il primo portandosi in ciascuna particella di corpo magnetizzabile verso il polo *nord* ed il secondo verso il *sud*, ec., ec.: Risponderei che lo ammetto come lo si ammetteva prima della scoperta dell'Oersted, vale a dire come un mezzo teorico per coordinare e descrivere i fenomeni magnetici; ignoro poi se tali fluidi esistano, come ignoro affatto qual sia la costituzione dei corpi, e quali sieno le cause dei fenomeni; ma so che tutti i complicati e variatissimi fenomeni magnetici di attrazione o repulsione sono benissimo espressi dalla pseudoipotesi, secondo la quale ogni corpo magnetico ha quei due fluidi, i quali vicendevolmente si attraggono e si respingono. Oersted ha mostrato, il che certamente non era previsto dalla teoria, che una corrente elettrica esercita un'azione sui corpi

magnetizzati; ma una nuova serie di fatti non toglie l'utilità della pseudoipotesi, che raccoglieva gli altri fatti; d'altronde basta aggiungere alla precedente teoria il nuovo principio che ogni elemento di corrente esercita su ciaschedun polo di una calamita una forza perpendicolare al piano che comprende la corrente ed il polo ed i nuovi fenomeni sono pienamente rappresentati. Siccome peraltro se ne potrebbe ricavare un moto perpetuo, così si prevede che la causa non può consistere soltanto nella differente disposizione del fluido magnetico, e che vi dev'essere anche una causa continuamente agente, qual è l'azione chimica, che produce la corrente elettrica.

52. Le azioni vicendevoli delle correnti elettriche fecero nascere l'opinione che le azioni magnetiche dipendessero esse pure da correnti elettriche; idea bizzarrissima per quelli che credettero esistessero veramente tali correnti, ed invece opportuna se la si considerò come un mezzo di rappresentare i fenomeni magnetici ed elettromagnetici. Nulladimeno non credo che la nuova pseudoipotesi sia da sostituirsi a quella dei fluidi magnetici, poichè ne è meno semplice e più imbarazzante, nè sussiste interamente l'analogia tra i solenoidi e le calamite, poichè se alla calamita od al solenoide si presenta un pezzo di ferro questo è calamitato e stabilmente attratto, che se invece del ferro si abbia un filo conduttore conformato a solenoide e rientrante in sè stesso, in esso non s'ingenera una corrente perenne, nè viene attratto dalla calamita.

53. Ebbero torto i fisici, che, trovando una gran conformità tra i fenomeni e le pseudoipotesi, terminarono col persuadersi che queste fossero le vere cause, oppure (forse per non destare negli studiosi un' inutile diffidenza) le esposero senza accennare le obbiezioni, a cui davano luogo, e senza notare qual era il loro vero ufficio; ciò diede facile assunto a coloro, che si proposero di criticare le teorie fisiche, quantunque nulla di meglio vi sapessero sostituire.

54. *Idee del Grove sul magnetismo.* Il Grove comincia col dire che (pagina 182) « le magnetisme fait naître de l' *electricité*, mais avec cette particula- » rité, que le magnetisme est une force statique, et que pour lui faire produire » un effet dynamique, il faut lui ajouter le mouvement; elle est de fait directive, » et non motrice, changeant la direction des autres forces, mais à parler stricte- » ment ne leur donnant pas l'impulsion initiale. » Copio queste parole senza aggiungervi quelle osservazioni, che si presentano spontanee a coloro, che hanno idee chiare delle forze e dei loro effetti. Per la stessa ragione copio dalla pag. 250: « L' electricité et le magnétisme dynamique sont des mouvements, le magnéti-

» sme permanent et l'électricité franklinique sont des conditions statiques de la » force mécanique agissant sur les molécules. » Da pag. 255 si rileva che, secondo il Grove, il movimento può suddividersi o cangiare di carattere in maniera di divenire calore, elettricità, ec., ma chi intenderà che cosa sia il movimento che si suddivide e cangia di carattere? — L'autore accenna parecchi fenomeni prodotti dal magnetismo, alcuni dei quali sembrano corrispondere coll'argomento dell'opera; senza peraltro che si vegga qual relazione vi sia tra il calorico o il movimento ed il magnetismo, e senza che nemmeno s'intenda qual sia quella forza magnetica che ha correlazione colle altre forze fisiche.

55. *Affinità chimiche.* Le combinazioni chimiche hanno una stretta relazione colla corrente elettrica: se ammettiamo che i liquidi sieno assolutamente incapaci di condurre le correnti Voltaiche in altro modo oltre quello di decomporsi, e che ogni equivalente chimico di un qualunque componente porti seco la stessa quantità di elettrico; supposta una serie rientrante quale si voglia di corpi solidi e liquidi, alcuni dei quali abbiano affinità chimica, si avrà una perfetta equivalenza tra le varie azioni chimiche, e si avrà anche la precisa misura della corrente. Abbiasi per esempio questa serie

Platino — Acqua — Rame — Carbone — Acido solforico allungato — Zinco — Acqua — Platino — Acido cloridrico — Oro — Acqua — e Platino, che comunica col primo;

se l'affinità dell'ossigeno della prima acqua col rame, dell'ossigeno dell'acido solforico allungato collo zinco, e del cloro coll'oro la vinca sulle affinità dell'ossigeno della seconda acqua collo zinco, e sulle affinità che si oppongono alle decomposizioni dei liquidi; si avrà una corrente elettrica in senso retrogrado alla predetta serie di sostanze, e la quantità di fluido elettrico, che scorse in un certo tempo sarà molto opportunamente rappresentata dal peso d'idrogeno, che si sviluppa presso il primo platino, che sarà l'ottava parte del peso di ossigeno che ossida il rame e di quello che ossida lo zinco, ed uguale all'idrogeno che si sviluppa presso il carbone, e presso lo zinco e presso il secondo platino e presso l'oro, e la 36.ma parte del cloro che si unisce coll'oro, l'ultima acqua verrà decomposta tra l'oro e il platino.

56. Bisogna peraltro notare che quest'ultima decomposizione è molto facilitata coll'aggiunta di un po' d'acido, il quale suol dirsi, che ne accresce la conducibilità, il che sarebbe in contraddizione col principio della nessuna conducibilità dei liquidi, poichè non pare che quell'acido essendo inattivo sui due metalli

oro e platino possa facilitare la decomposizione dell' acqua: che se aggiungiamo un acido alla seconda acqua, esso rendendo più forte l' affinità dello zinco per l' ossigeno dovrebbe diminuire la corrente elettrica, e quindi tutte le decomposizioni. Un' altra obbiezione alla non conducibilità dei liquidi mi pare si abbia in questo che immergendo in un acido allungato una lamina di zinco ed una di platino, che non comunichino insieme, quantunque la prima continui ad ossidarsi, pure non presenta sensibile tensione elettro-negativa.

57. *Misura delle correnti.* Se gli sperimenti in molte guise variati confermassero sempre le considerazioni del § 55, ne verrebbe che l' intensità di una corrente Voltaica sarebbe espressa mediante l' unità

$$[\mathbf{v} : 1'']$$

indicando con **v** un milligramma d' idrogeno sviluppato in uno dei liquidi in un minuto-secondo, ossia l' ottava parte del peso dell' ossigeno di una delle ossidazioni. Così per ciascun galvanometro gioverebbe determinare previamente quante di queste unità corrispondano a ciascun grado del galvanometro. — Se si potessero tener tutti gli elettrodi ad una precisa distanza eguale e tutti fra loro eguali, si potrebbe trovar nel precedente sperimento anche una misura dell'affinità chimica; per esempio, se unendo in circolo cinque elementi Voltaici platino — acqua — zinco amalgamato con un elemento — zinco — acido allungato — platino il galvanometro elettro-magnetico non desse alcun indicio di corrente, potrebbe dirsi che l' affinità dell' acido per lo zinco è quintupla di quella dell' acqua collo zinco.

58. Quello che il Grove dice sull' affinità chimica ha poca relazione coll'argomento dell' opera, quantunque la correlazione tra le composizioni o decomposizioni chimiche, e le quantità di calorico *sviluppato,* o, se così si voglia, *prodotto,* possano appoggiarsi a molte serie di sperienze, cui credo inutile accennare, poichè mentre sono importantissime come cognizioni positive, nulla ci possono per ora insegnare sulla natura dell' azione chimica o su quella del calorico.

59. L' autore accenna le obbiezioni contro la teoria degli equivalenti chimici applicata alle sostanze di natura organica. Anche in questo argomento per la solita tendenza a generalizzare si suppose che la teoria, che vale pei corpi minerali, debba valere anche per tutti i composti d' origine organica; io credo che se, tenuto il debito conto delle incertezze delle sperienze, si calcolasse la probabilità che i composti contengano un numero intero di equivalenti di cia-

scun componente si troverebbero quasi sempre delle probabilità, che farebbero perdere ogni fiducia alla teoria; sicchè il rappresentare le composizioni dei corpi organici col mezzo del numero degli equivalenti chimici, anzichè coi pesi, è forse soltanto una questione di comodità; giacchè probabilmente quei numeri sono frazionarii non meno di questi.

60. *Opinioni del Séguin.* All' opera del Grove tradotta dall' ab. Moigno, il quale sembra persuaso della realtà della nuova teoria, fanno seguito le note di Séguin ainé. Questi osserva che l' idea fondamentale del Grove era già stata esposta dal Montgolfier, e da lui stesso, senza che i fisici se ne sieno curati. È notabile che ad onta della conformità delle opinioni, e della vicendevole comunicazione per più di un mese dei loro pensieri scientifici, il Séguin debba dichiarare (pag. 279) che il Grove non esaminò se gli elementi della materia ordinaria sieno necessariamente di due sorte, gli uni incatenati o in riposo relativo, gli altri liberi ed animati da grandi velocità che, passando attraverso i sistemi dei primi, li distendono o li allontanano; ed a lui sembrare che senza questa distinzione essenziale i fenomeni rimangono inviluppati di mistero e forse anche inesplicabili; egli nota pure che il Grove lasciò interamente da lato la forza di coesione delle particelle sòlide, la prima e la fondamentale delle forze della natura. — Così dei due riformatori l' uno trova che l' altro lascia i fenomeni inesplicabili e dimentica la principale delle forze. — Io non mi farò ad esporre l' ipotesi del Séguin, perchè chi conoscesse le importanti sue ricerche intorno alle macchine, e non avesse lette le sue note all'opera del Grove, crederebbe che io volessi calunniarlo. — Il Séguin non tralascia di attribuire all' influenza dei matematici che le idee di Montgolfier, di Grove e sue non abbiano ricevuto l'altrui assenso.

61. Credo inutile arrestarmi di più nella critica delle teorie piuttosto accennate che dettagliatamente esposte nell' opera sulla correlazione delle forze fisiche; vorrei avere abbozzati alcuni dei principii, che deggiono guidare per istabilire quali sieno nell' attuale stato della fisica le meno dubbiose opinioni intorno alla materia ed alle forze, e quali le ipotesi o pseudoipotesi, cui intanto si deggiono adottare; rimanendo per ora indipendenti da tali ipotesi le teorie che alcuni fisici sperimentatori stabiliscono sulla correlazione delle azioni fisiche; ossia sulle trasformazioni tra il calorico ed il lavoro, tra le azioni chimiche e il calorico, tra le correnti elettriche e le azioni chimiche, tra l' elettro-magnetismo e il lavoro, ec., ec.; importantissimi lavori, che non ricevono nè appoggio da azzardate ipotesi, nè detrimento da critiche astratte.

(*Lette il* 13 *febbrajo* 1859).

RICERCHE

SUL

MOTO DELL' ACQUA NEL TURBINE IDROFORO DELLO SCHLEGEL

E SULL' EFFETTO DI QUESTA MACCHINA

APPLICATA AL PROSCIUGAMENTO DEI TERRENI PALUSTRI

DEL

MEMBRO EFF. PROF. GUSTAVO BUCCHIA

CON UNA TAVOLA

PREFAZIONE

La quistione sorta non è guari sulla reale utilità ed efficacia del turbine idroforo orizzontale applicato alla essiccazione artificiale dei terreni palustri, è una quistione che a mio avviso merita di essere maturamente esaminata.

Sorta al primo apparire di questa nuova macchina, invenzione del reputato meccanico Schlegel di Milano, tra la schiera delle ruote a schiaffo, unicamente impiegate prima nel prosciugamento dei terreni palustri del Polesine, divenne tosto fomite di un conflitto di opinioni controverse tra i proprietarii di quelle maremme, i quali si divisero a parteggiare chi per le ruote e chi pei turbini: e le molte cose che si dissero e si stamparono pro e contro quelle macchine, e le molte ragioni opposte prodotte dagli animi concitati dallo spirito di parte, anzi che arrecare alcun lume atto a chiarire la verità, conducono a così disparate sentenze, che spargono la confusione e l'incertezza anche in chi, spoglio da ogni preoccupazione e con mente tranquilla, si faccia a considerarle diligentemente.

Dal che non verrebbe alcun danno se la controversia si consumasse in dispute e polemiche di nessuna conseguenza; ma il male procede dall' alta

importanza dell'argomento cui si collegano molti ed eminenti interessi pubblici e privati, i quali non permisero che rimanessero indifferenti alla quistione molti proprietarii di estese paludi, ch' erano proclivi a seguitare l'esempio dei benemeriti che primi si accinsero a queste salutari imprese, e che sopraffatti dalle diverse opinioni e dalle esagerazioni spacciate dai contendenti, vennero ritenuti dal mandare ad effetto il loro divisamento, e procrastinano imprese che poche ve ne hanno di più efficace e di più pronto profitto al ben essere ed alla prosperità del nostro paese.

Il che quanto gran male sia, lo convince il vedere la maravigliosa ubertà e l'abbondanza delle messi in que' terreni che furono già per sì fatto mezzo conquistati alle acque, e convertiti da squallidi ed insalubri paduli in floridissime e liete campagne; e lo prova concludentemente il considerare che, se l'asciugamento venisse esteso a tutta quell'ampia zona maremmana che circonda l'Adriatico dal confine Illirico fino alle foci del Po, coperta da pochi prati limacciosi, da canneti e giuncaje, e che misura la superficie di tornature 95300, oltre al notevole aumento di ricchezza territoriale, che può stimarsi, senza esagerare, più di 20 milioni di lire, si conseguirebbe l'inapprezzabile benefizio della migliorata igiene, delle promosse industrie, e di tutti gli altri vantaggi economici che ne derivano.

Per le quali cose, tutto ciò che può valere ad agevolare e favorire il rapido progresso di un'impresa di tanto momento, non dev' essere pretermesso: ond'è che il rimuovere i dubbii e le perplessità che ritengono dall'operare, spogliando la quistione dai vani discorsi e dalle disorbitanze dei partiti, e recandola svestita da ogni superfluità alle indagini di una rigorosa analisi, sembrami cosa di qualche rilievo, e che inviti ad applicarvi diligentemente lo studio.

Queste considerazioni congiunte all'aver io rimarcato nel turbine molte qualità meccaniche e molte comodità che non hanno le ruote a schiaffo, e che sono: la semplicità dell'istrumento, la piccolezza delle dimensioni anche quando abbia a produrre grandi effetti, la robustezza dell'organismo, la leggerezza, la durabilità, la regolarità del moto senza scosse e dringolamenti, la facilità con cui può essere in tutti i luoghi collocato con eguale comodità e modica spesa; tutte queste cose, dico, mi stimolarono d'indagare la legge del moto dell'acqua in questa ingegnosa macchina, a fine di conoscere le proprietà dinamiche di cui è dotata, l'effetto utile che se ne può ritrarre, e

mettere così quasi avanti agli occhi tutti gli elementi necessarii per farsi di essa un esatto e giusto concetto.

Sulle prime però io mi accinsi a questa ricerca più per mio studio e diletto e per appagare la mia curiosità, che per intenzione ferma ch'io avessi di fare cosa che potesse in qualche modo servire all' importante scopo ch' io le aveva legato; se non che accortomi poi, che i risultamenti generali ai quali fui condotto dall' analisi istituita sull' azione del turbine, rispondono molto bene alle osservazioni ch' ebbi campo di fare sull' effetto utile e sull' indole di questa macchina, nell' occasione ch' io mi recai a visitare alcune paludi sanate col mezzo dei turbini, presi animo di raccogliere in poche pagine il mio lavoro; ed ardisco ora presentarlo a codesto illustre Consesso, persuaso ch' esso vorrà benignamente guardare non alla rozzezza e tenuità dell' opera mia, ma all' utilissimo ed importante fine cui mira.

DESCRIZIONE DEL TURBINE IDROFORO

DELLO SCHLEGEL

E RICERCHE SULL'AZIONE DI QUESTA MACCHINA

Il turbine dello Schlegel è una specie di ruota idraulica orizzontale a palette curve girevole intorno ad asse verticale: è un tamburo schiacciato formato da due dischi di ferro, uno superiore costituente il coperchio, nel cui centro è fermato l'albero verticale di rotazione, l'altro inferiore costituente il fondo del tamburo, nel cui centro è aperto un ampio foro circolare pel quale entra l'acqua nel turbine. I due dischi sono collegati insieme indissolubilmente da una serie di diaframmi o piastre di ferro per coltello, equidistanti, disposte in giro al foro del fondo, e piegate in arco, le quali dal perimetro esterno del tamburo si protendono verso il centro, e scompartono in altrettanti canali ricurvi lo spazio anulare interno del tamburo compreso tra il coperchio, il fondo e la periferia del foro per cui entra l'acqua nella macchina.

Questo tamburo è collocato in una cassa rettangolare a fondo orizzontale, che pesca per poca parte della sua altezza nell'acqua del bacino di corrivazione in cui termina il condotto di scolo della palude che si vuol essiccare. Il fondo di questa cassa è formato da una grossa piastra di ghisa che ha nel mezzo una apertura circolare eguale al foro aperto nel fondo del turbine, il quale vi si adatta per di sopra a capello. Dalla parte di sotto il foro aperto nel fondo della cassa è guernito di un imbuto o cilindro di ferro accampanato all'ingiù, che pesca ancor più profondamente della cassa stessa nel bacino di corrivazione, e serve di veicolo all'acqua per passare dal bacino nel turbine, e da questo nella cassa che lo contiene.

Questa cassa è in diretta comunicazione col recipiente di esaurimento sul di cui pelo l'acqua innalzata dal turbine si spiana.

Il tamburo è collegato liberamente al fondo della cassa mercè accomodati ingegni facili a immaginarsi, di guisa che gli si può imprimere un movimento di rotazione rapidissimo intorno al suo asse, senza che si sposti minimamente dalla sua positura.

Ora è facile comprendere il modo di agire di questa semplicissima macchina idrofora. Quando il turbine è fermo sono abbassate le saracinesche di una cateratta che chiude l'apertura di comunicazione della cassa col recipiente di esaurimento; e allora l'acqua nella cassa, in cui è sommerso il turbine, si trova allo stesso livello dell'acqua nel bacino di corrivazione. Quando si vuole far agire il turbine gli s'imprime un rapido movimento di rotazione, e nello stesso tempo si alzano le saracinesche della cateratta per aprire la comunicazione della cassa col recipiente di esaurimento; allora l'acqua ch'empieva i canali del turbine viene rapita in giro, e dalla forza centrifuga lanciata fuori dalla periferia del tamburo; intanto il turbine in continua rivoluzione succhia l'acqua del sottoposto bacino di corrivazione, la quale subentra per l'imbuto ad occupare il luogo abbandonato da quella discacciata, e rapita questa pure dalla vertigine del turbine viene alla sua volta spinta dalla forza centrifuga nella cassa; e così continuamente, di guisa che rigonfiando senza intermissione l'acqua nella cassa fluisce per l'aperta cateratta e si perde nel recipiente di esaurimento.

Le due figure disegnate nella Tavola posta in fine di questo scritto, servono a spiegar meglio le cose discorse.

Per trovare la legge del movimento dell'acqua in questo apparato idroforo, sia:

A l'area della luce immissaria aperta nel fondo del tamburo per la quale vi entra l'acqua da espellersi;

a l'area collettiva delle sezioni contratte dell'acqua uscente dal turbine per le luci emissarie;

u la velocità dell'acqua in queste luci;

h ed h_1 le rispettive altezze dell'acqua nel recipiente di esaurimento, e nel bacino di corrivazione, sopra il centro delle luci emissarie medesime;

H la caduta del pelo dell'acqua nel recipiente sopra il pelo nel bacino di corrivazione;

π la pressione atmosferica sull'unità superficiale;

Q la portata del turbine, o sia il volume di acqua attinta ed espulsa in un minuto secondo sessagesimale;

V la velocità di rivoluzione della circonferenza del turbine che passa pei centri delle luci emissarie;

$2R$ il diametro di questa circonferenza;

e l'angolo che la direttrice dei canali idrofori del turbine fa con la circonferenza medesima;

p il peso dell'unità di volume dell'acqua;

g la gravità.

Consideriamo innanzi tutto il movimento dell'acqua nell'interno del turbine, servendosi del noto principio delle forze vive, che consiste nello stabilire l'eguaglianza tra l'aumento di forza viva acquistato dall'acqua nell'unità di tempo, più la forza viva perduta, ed il doppio della somma di tutti i lavori motori meno il doppio della somma di tutti i lavori resistenti, sviluppati nello stesso tempo da tutte le forze motrici e resistenti che operano sulla massa di acqua in movimento.

Or la massa di acqua ch'entra ed esce dal turbine nell'unità di tempo è $p\frac{Q}{g}$; entra per la luce immissaria A con la velocità $\frac{au}{A}$, ed esce dalle luci emissarie a con la velocità u, quindi acquista nell'unità di tempo l'aumento di forza viva

$$p\frac{Q}{g}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)u^2.$$

D'altra parte le forze motrici che velocitano l'acqua nell'interno del turbine sono: la pressione dell'acqua esterna nel bacino di corrivazione, la pressione atmosferica e la forza centrifuga generata dalla rivoluzione del turbine: le due prime nell'unità di tempo sviluppano il lavoro motore

$$pQ\left(\frac{\pi}{p}+h_1\right),$$

e la forza centrifuga nello stesso tempo sviluppa il lavoro motore

$$p\frac{Q}{2g}.V^2 \quad (*).$$

(*) Si consideri la molecola d'acqua di massa m posta alla distanza x del centro del turbine; la velocità angolare del turbine è $\frac{V}{R}$, e però la velocità della molecola nella direzione del raggio

Le forze resistenti poi sono: la pressione dell'acqua esterna nel recipiente di esaurimento e la pressione atmosferica; le quali sviluppano insieme nell'unità di tempo il lavoro resistente

$$pQ\left(\frac{\pi}{p}+h\right).$$

Dunque, supposto che nell'interno del turbine l'acqua non cangi repentinamente di velocità, e non si facciano violenti agitazioni con moti opposti e bollimenti, che cagionino perdite di forza viva, si avrà per l'accennato principio delle forze vive l'equazione

$$(1)\ldots\frac{pQ}{g}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)u^2=\frac{pQ}{g}.V^2+2pQ\left(\frac{\pi}{p}+h_1\right)-2pQ\left(\frac{\pi}{p}+h\right).$$

La quale avvertendo che

$$h-h_1=H$$

si riduce alla

$$\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)u^2=V^2-2gH\ ,$$

che dà

$$u=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}}\cdot\sqrt{V^2-2gH}\,.$$

sarà $\frac{V.x}{R}$, la forza centrifuga $\frac{V^2x}{R^2}$ e la forza motrice $\frac{mV^2x}{R^2}$. In un istante infinitesimo la molecola percorre nella direzione del raggio lo spazio infinitesimo dx, e quindi il lavoro motore elementare sviluppato dalla forza motrice in questo brevissimo transito della molecola sarà $\frac{mV^2x.dx}{R^2}$; e tutto il lavoro motore sviluppato nel transito per l'intera lunghezza del raggio sarà

$$\frac{mV^2}{R^2}\int_o^R x.dx=\frac{mV^2}{2}\ ,$$

e sostituendo ad m l'intera massa dell'acqua che passa pel turbine nell'unità di tempo, si ottiene il sopra esposto lavoro motore sviluppato dalla forza centrifuga

$$\frac{pQ}{2g}.V^2\ .$$

E posto

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}} = f\,;\ 2gH = v^2\,,$$

si avrà

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ u = f\sqrt{V^2 - v^2}\,.$$

e la portata del turbine sarà

$$(3)\ \ldots\ldots\ldots\ Q = a.u = af\sqrt{V^2 - v^2}\,.$$

Lo stesso principio delle forze vive ci somministrerà il lavoro motore occorrente per espellere col turbine il volume di acqua Q all'altezza H in un minuto secondo sessagesimale.

Sia in fatti F la forza applicata alla circonferenza del turbine che ha per raggio R, capace di produrre nell'unità di tempo questo effetto utile; il lavoro motore da essa sviluppato sarà FV.

Il lavoro resistente della gravità sulla massa di acqua sollevata all'altezza H nell'unità di tempo sarà pQH.

L'acqua nel bacino di corrivazione è in quiete, ed entra nel recipiente di esaurimento, passando pel turbine, con una velocità assoluta, ch'è la risultante delle due velocità V ed u, le cui direzioni comprendono un angolo eguale a $180° - e$, entra dunque nel recipiente con la velocità assoluta

$$\sqrt{V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e}\,.$$

E perciò l'acquisto di forza viva che avrà fatto nel passare dal bacino di corrivazione al recipiente di esaurimento sarà

$$\frac{pQ}{g}\left(V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e\right).$$

E supposto anche qui, che nell'imboccatura del turbine non succeda contrazione di vena, e sieno nulle le perdite di forza viva, si avrà l'equazione

$$\frac{pQ}{g}\left(V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e\right) = 2FV - 2pQH,$$

dalla quale si ricava

$$(4) \ldots\ldots FV = pQ\left(H + \frac{1}{2g}(V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e)\right).$$

Se ora indichiamo con k il rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore sviluppato a produrlo, sarà

$$k = \frac{H}{H + \frac{1}{2g}\left(V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e\right)};$$

al quale notando che $2gH = v^2$, si può dare anche la forma

$$(5) \ldots\ldots k = \frac{1}{1 + \frac{1}{v^2}\left(V^2 + u^2 - 2uV.\cos.e\right)}.$$

Le tre formule (2), (3), (5) servono a risolvere tutte le quistioni che si possono proporre intorno al turbine.

Così, a modo di esempio, con un dato turbine si voglia estrarre in un minuto secondo, ad una determinata altezza, un dato volume di acqua; e si cerchi la velocità con la quale si dovrà girare il turbine ed il lavoro motore che si spenderà nel muoverlo.

Sono note le quantità f, Q, H, p, v, e si cercano le quantità V ed FV.

La formula (3) ci somministrerà

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots V = \sqrt{\frac{Q^2}{a^2 f^2} + v^2}.$$

E posto questo valore di V, e quello di u somministrato dalla equazione (2) nella formula (5), si avrà

$$(7) \ldots k = \frac{1}{2 + \frac{Q}{fav}\left\{(1 + f^2)\frac{Q}{fav} - 2f\cos.e\sqrt{\frac{Q^2}{a^2 f^2 v^2} + 1}\right\}},$$

e quindi si avrà

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots FV = \frac{pQH}{k}.$$

Potrebbe darsi il caso che le dimensioni del turbine non rispondessero al bisogno, caso di cui non ci avverte quelle tre formole, perchè anzi esse farebbero credere nel primo ingresso, che con un dato turbine si potesse estrarre nell'unità di tempo qualunque volume di acqua per grande che fosse, purchè si girasse il turbine con una velocità più e più grande conforme al bisogno.

Ma rimontando all'equazione (1) si vede in quali circostanze questo caso succeda; imperocchè posto nel secondo membro della medesima

$$V^2 = 2g\left(\frac{\pi}{p} + h\right),$$

ch'è quanto dire, impressa al turbine una velocità di rivoluzione che renda la forza centrifuga eguale all'intera pressione esterna sulle luci emissarie, si ha

$$\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) u^2 = 2g\left(\frac{\pi}{p} + h_1\right).$$

E posto per brevità

$$2g\left(\frac{\pi}{p} + h_1\right) = w^2,$$

si ha

$$u = f \cdot w,$$

ch'è la massima velocità possibile dell'acqua nelle luci emissarie, che assumerebbe quando dinanzi ad esse si operasse il vuoto.

E quindi la portata massima che possa fornire un dato turbine sarà

$$(9) \ldots\ldots\ldots Q = af\sqrt{2g\left(\frac{\pi}{p} + h_1\right)} = afw;$$

e la velocità massima con cui possa girarsi sarà:

$$(10) \ldots\ldots\ldots V = \sqrt{2g\left(\frac{\pi}{p} + h\right)}.$$

D'altra parte la formula (2) mostra che, la minima velocità di rivoluzione che si possa imprimere al turbine è $V = v$, alla quale corrisponde la portata $Q = 0$. Il che vuol dire che, imprimendo al turbine questa minima velocità, il lavoro motore speso a muoverlo viene tutto impiegato ad equilibrare la pressione costante dell'acqua nel recipiente di esaurimento sulle luci emissarie del turbine.

Trovata così la legge del moto dell'acqua nel turbine, trovati i limiti delle velocità con cui può essere mosso, e delle portate che può somministrare, non che il rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore occorrente a produrlo: veniamo ad indagare le peculiari affezioni di questa macchina, per dedurne la migliore disposizione che le si possa dare nell'applicarla al prosciugamento dei terreni palustri: al che ci servirà la discussione della formula (7).

Ritornando dunque a questa formula, che dà il rapporto tra l'effetto utile prodotto dal turbine ed il lavoro motore speso a produrlo, si vede che il valore di k varia al variare del rapporto $\frac{Q}{v}$.

Assumasi v costante, e si ponga la portata $Q = 0$, alla quale corrisponde la minima velocità del turbine $V = v$, si avrà $k = \frac{1}{2}$.

Pongasi poi la portata $Q = af\omega$, alla quale corrisponde la massima velocità del turbine $V = \sqrt{2g\left(\frac{\pi}{p} + h\right)}$, e si avrà

$$k = \frac{1}{2 + \frac{w}{v}\left\{(1+f^2)\frac{w}{v}2 - f.\cos.e\sqrt{\frac{w^2}{v^2}+1}\right\}};$$

frazione minore di $\frac{1}{2}$ e che può diventare piccolissima se v è molto piccola in confronto di ω.

Fra questi due valori limiti di k vi è un valor massimo, che si raggiunge quando si ponga

$$(11) \quad \ldots \quad \frac{Q}{v} = \frac{af}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+f^2}{\sqrt{(f^2-1)^2 + 4f^2.\,sen.^2e}} - 1},$$

valore che si ottiene assegnando al turbine la velocità

$$(12) \quad \ldots \quad V = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+f^2}{\sqrt{(f^2-1)^2 + 4f^2.\,sen.^2e}} + 1}.$$

Ed il valor massimo di k diventa allora

$$(13)\ldots\ldots k = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(f^2-1)^2+4f^2.\text{sen.}^2 e}-(f^2-1)\right\}}.$$

Noi chiameremo la velocità di rivoluzione del turbine data dalla formula (12) *velocità normale* del turbine, e la portata corrispondente data dalla formula (11) *portata normale* del turbine.

Ora assumasi in vece, nel rapporto $\frac{Q}{v}$, costante Q e variabile v, o sia assumasi variabile l'altezza alla quale l'acqua dev'essere sollevata, e costante il volume d'acqua da sollevarsi nell'unità di tempo: e si vedrà che per tutti i valori di v più grandi di quello che rende $\frac{Q}{v}$ eguale al valore dato dalla formula (11) che riduce massimo k, il valore di k diminuisce progressivamente quanto più v è grande in confronto di Q, senza poter mai discendere al di sotto del limite minimo $k = \frac{1}{2}$.

E si vedrà che per tutti i valori di v più piccoli di quello che rende $\frac{Q}{v}$ soddisfacente al massimo valore di k, diminuisce k più e più al diminuire di v avvicinandosi progressivamente al limite minimo zero.

Finalmente se nella formula (13) che dà il massimo valore di k fosse $e = 0$, si avrebbe $k = 1$, cioè a dire l'effetto utile prodotto dal turbine eguaglierebbe esattamente il lavoro motore impiegato a produrlo.

In teoria dunque il turbine sarebbe macchina idrofora perfettissima che utilizzerebbe tutto il lavoro motore impressole, meno le piccolissime perdite dipendenti dalle resistenze di attrito, e dallo agitamento e dai cozzi dell'acqua nell'interno dell'apparato: ma in pratica non è dato raggiungere intero questo ottimo effetto, e bisogna accontentarsi di conseguire il massimo valore possibile di k dato dalla formula (13) girando il turbine con la velocità normale data dalla formula (12), ed accontentandosi di avere la portata normale espressa dalla formula (11).

Nelle pratiche applicazioni pertanto di questa macchina al prosciugamento artificiale dei terreni, a fine di ritrarre da essa il maggior profitto possibile, stabilita l'altezza alla quale dovrà l'acqua essere innalzata, si dovrà assumere

come portata normale quella quantità di acqua, che le circostanze speciali dell'asciugamento richiederanno che si estragga nell'unità di tempo, e si dovrà a questa portata ed all'altezza del sollevamento accomodare la capacità e la velocità normale del turbine per mezzo delle formule (11) e (12).

Ora nel turbine, come vedremo appresso, l'area delle luci emissarie è proporzionale al quadrato del di lui diametro, e però vedesi dalla formula (11) che in parità di portata normale, quanto più grande sarà ρ, o sia quanto più grande sarà l'altezza a cui l'acqua dovrà essere innalzata, tanto più il diametro del turbine diminuirà: è quindi il turbine un apparato idroforo che gode della singolare proprietà di diminuire di mole, quanto più ad alto dovrà espellere l'acqua; ma ad un tempo che per grandi cadute diminuisce la mole del turbine, deve crescere per converso la sua velocità normale; ond'è che il limite massimo delle cadute in cui torna utile l'impiego di questa macchina, verrà determinato da quell'altezza massima, oltre la quale la velocità normale del turbine diverrebbe tanto grande, e gl'ingegni meccanici per la trasmissione del moto diverrebbero così complicati, da non potersi in pratica applicare.

Si può peraltro scostare questo limite massimo delle cadute fino al quale torna utile l'impiego del turbine, disponendo in modo la fabbrica della macchina, che l'angolo e riesca quanto più ci sia lecito grande, senza che ne venga una diminuzione incomportabile nel valore di k, perchè crescendo il valore di e diminuisce la velocità normale del turbine.

Nelle grandi cadute dunque a fine di attenuare la velocità normale del turbine, gioverà fare e quanto più grande si possa; e nelle piccole cadute nelle quali la mole della macchina diviene maggiore che nelle grandi, affinchè non cresca fuor misura, e si abbia insieme un valor grande di k, gioverà assegnare ad e piccoli valori.

Del resto determinate le dimensioni del turbine, e la velocità normale con cui dovrà essere mosso, la formula (13) somministrerà il corrispondente valore di k, e l'equazione (8) il lavoro motore occorrente per girare il turbine.

Se non che negli asciugamenti dei nostri paduli, l'altezza alla quale dev'essere innalzata l'acqua è generalmente variabile, perchè i recipienti di esaurimento sono per lo più fiumi arginati soggetti ad escrescenze; ed è in vece costante la quantità di acqua da estrarsi nell'unità di tempo, perchè è dessa determinata da quella massa d'acqua piovuta sulla superficie del padule, che nell'unità di

tempo può arrivare alla macchina nelle stagioni più piovose dell'anno, nelle quali le spesse piogge per la loro copia, e pel frequente succedersi mantengono il condotto che porta l'acqua alla macchina in piena permanente.

Ora essendo la portata e la velocità normale del turbine proporzionale a ρ, cioè a dire proporzionale alla radice quadrata dell'altezza a cui dev'essere l'acqua innalzata, si fa manifesto che in questi casi di portata costante e di caduta variabile, è impossibile ottener sempre col turbine il massimo effetto utile col minimo dispendio di lavoro motore.

Così, a cagion di esempio, se le dimensioni e la velocità normale del turbine fossero state accomodate alla massima caduta del pelo del recipiente di esaurimento sopra il pelo del condotto di corrivazione, in questo solo stato dei due peli si avrebbe il massimo rapporto tra l'effetto utile prodotto ed il lavoro motore impiegato a produrlo, ma a mano a mano che la caduta scemasse, e si volesse tuttavia mantenere eguale la portata del turbine, allora il rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore andrebbe progressivamente diminuendo, finò a ridursi molto piccolo quando i peli del condotto e del recipiente si fossero assai ravvicinati. Che se per ovviare questo inconveniente, si regolasse di volta in volta la velocità normale del turbine proporzionandola alle decrescenti cadute, è bensì vero che si otterrebbe sempre il massimo rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore, ma s'incorrerebbe nell'altro inconveniente che le portate andrebbero progressivamente diminuendo, rendendo fiacca e manchevole l'essiccazione per tutto il tempo che i peli durassero a poca distanza.

E non minori inconvenienti si produrrebbero anche quando da principio si accomodassero le dimensioni e la velocità normale del turbine alla minima caduta, perchè prima di tutto in questo caso si verrebbe ad assegnare al turbine dimensioni molto più grandi, e poi a mano a mano che la caduta andasse crescendo, e si volesse tuttavia mantenere costante la portata del turbine, il rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore andrebbe successivamente diminuendo fino a ridursi ad $\frac{1}{2}$ per cadute grandissime.

Che se anche qui per ovviare questo inconveniente, e per ottenere in ogni stato dei peli il massimo rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore, s'imprimesse al turbine le velocità normali corrispondenti alle crescenti cadute, allora si aumenterebbero progressivamente le sue portate, e si estrarrebbe nell'unità di tempo dal condotto più e più acqua assai di quella che sia abilitato a portare,

e sarebbe inoltre mestieri impiegare una macchina motrice assai più potente senza verun bisogno.

Non è a credere però che queste affezioni del turbine lo rendano meno adatto al prosciugamento dei terreni palustri nei casi in cui è variabile la caduta del recipiente di esaurimento sull'inferiore bacino di corrivazione: conciossiachè accomodando la capacità del turbine alla portata ed alla velocità normale corrispondenti alla caduta ordinaria, a quella caduta cioè che per più lungo tempo si mantiene, ed alla quale ritornano prontamente i peli dell'acqua, dopo le accidentarie e poco durevoli oscillazioni sopra e sotto di essa, accomodando, dicesi, la capacità del turbine a questa caduta ordinaria, si ottiene di abilitarlo a portare in ogni stato dei peli la stessa quantità di acqua nell'unità di tempo, senza che per questo il rapporto tra l'effetto utile ed il lavoro motore varii troppo, e troppo si scosti dal valor massimo che ha quando il turbine lavora sotto la caduta ordinaria alla quale venne esso aggiustato.

Vero è che varierebbe ancora notevolmente il valore del detto rapporto, quando le corse delle oscillazioni sopra e sotto la caduta ordinaria fossero molto grandi, e particolarmente quando la corsa inferiore si estendesse fino a ridurre quasi a nulla la caduta; ma così fatti accidenti non possono accadere nelle bonificazioni artificiali dei nostri paduli, la cui giacitura rispetto ai recipienti di esaurimento è generalmente tale, che le dette oscillazioni si tengono dentro termini non molto discosti, e il pelo delle più grandi magrezze del recipiente si mantien sempre alquanto più alto del pelo nel bacino di corrivazione.

Dal congiungimento pertanto delle cose fin qui discorse si conchiude, essere il turbine idroforo una eccellente macchina acconcia al prosciugamento artificiale dei nostri terreni palustri, e per la semplicità del suo organismo, che la rende leggera, robusta, durevole, non soggetta a guasti, di facile applicazione, e di modico costo; e molto più per le proprietà dinamiche di cui è dotata, che la rendono potente a produrre grandi effetti senza notevole sprecamento di forza inutile.

Ma d'altra parte raccogliesi, richiedere lo stabilimento e l'andamento dei turbini applicati alla essiccazione artificiale dei nostri paduli, molta oculatezza e maestria, affinchè non abbia a mancare l'effetto utile di cui sono capaci: dipendendo questo essenzialmente dalla giusta posizione della macchina, e dalla esatta determinazione delle sue dimensioni, accomodate al volume di acqua che si deve espellere nell'unità di tempo, ed all'altezza ordinaria alla quale dev'essere innalzata.

Del che si fa manifesto quanto importi in queste imprese, affinchè abbia pieno effetto l'opera meccanica, studiare attentamente e risolver bene prima la quistione idraulica; alla trascuranza della quale vuolsi soltanto attribuire il mancato buon effetto dei turbini in una delle nostre recenti bonificazioni artificiali.

Per illustrare con qualche saggio pratico le conclusioni alle quali ne condusse l'esposta teoria, e mostrare come esse rispondano ai risultamenti della esperienza, passiamo ad applicare la teoria stessa ad alcuni casi particolari.

Poniamo che le palette o diaframmi del turbine sieno piegate in archi dell'evolvente di un cerchio concentrico alla periferia esterna del turbine, così che i canali idrofori interposti abbiano per tutta la loro lunghezza la stessa sezione uniforme: ed assumiamo le proporzioni e l'ordinamento comunemente assegnato alle parti di questa macchina dal suo inventore.

Detto $2R$ il diametro della circonferenza esterna del turbine, la quale può ritenersi senza errore valutabile confondersi con la circonferenza che passa pei centri delle luci emissarie;

m il rapporto del diametro del foro immissario al diametro 2R;

m^1 il rapporto dell'altezza interna del tamburo al di lui diametro $2R$;

r il raggio del cerchio, evoluta della curva assegnata ai diaframmi;

n il numero dei diaframmi;

e^1 l'angolo che questi diaframmi fanno con la periferia esterna del tamburo;

μ il coefficiente di contrazione della vena nelle luci emissarie;

π il rapporto della circonferenza al diametro.

Si troverà facilmente: la larghezza della luce dei canali idrofori interposti ai diaframmi essere eguale $\frac{2r\pi}{n}$;

l'altezza della luce medesima eguale a $2Rm_1$;

il raggio del cerchio, evoluta dalla curva dei diaframmi $r = R.\text{sen.}e_1$;

l'angolo che la direttrice dei canali idrofori fa con la circonferenza che passa pel centro delle luci emissarie

$$e = \text{Arc. tang.} \frac{1}{\text{cotg.}e_1 - \frac{\pi}{n}}.$$

La lunghezza della direttrice dei canali tra le due sezioni estreme normali alla direttrice medesima essere eguale a

$$\frac{1}{2} R \left\{ \frac{1-m^2}{\text{sen.}e_1} - \frac{2\pi}{n} \left(\cos.e_1 + \sqrt{m^2 - \text{sen.}^2 e_1} \right) \right\}.$$

E si avrà

$$a = 4\pi\, m^4 \mu\, .\, \text{sen.}e_1\, .\, R^2$$

$$A = \pi m^2 R^2$$

$$\frac{a}{A} = \frac{4\mu m_1}{m^2}\, .\, \text{sen.}e_1$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16\mu^2 m_1^2}{m^4}\, .\, \text{sen.}^2 e_1}}\, .$$

E detto ρ il rapporto tra la lunghezza della direttrice del canale idroforo, e la larghezza del canale medesimo, si troverà

$$\rho = \frac{n(1-m^2)}{4\pi\, \text{sen.}^2 e_1} - \frac{1}{2} \left(\text{cotg.}e_1 + \sqrt{\frac{m^2}{\text{sen.}^2 e_1} - 1} \right).$$

Ora generalmente nei turbini dello Schlegel, i canali idrofori sono sei: la distanza del coperchio dal fondo del tamburo è $\frac{1}{7}$ del di lui diametro, ed il foro immissario dell'acqua aperto nel fondo del tamburo ha il diametro eguale alla metà del diametro del tamburo, per cui si hanno i seguenti valori:

$$n = 6\,,\quad m = \frac{1}{2}\,,\quad m_1 = \frac{1}{7}\,.$$

Con questi valori calcolato il rapporto ρ della lunghezza dei canali idrofori alla loro larghezza, per due valori particolari dell'angolo e_1, cioè per $e_1 = 6°$, ed $e_1 = 16°$; si troverà pel primo in numeri rotondi $\rho = 25$, e pel secondo $\rho = 2$.

E se dentro questi limiti di lunghezza consideriamo i canali idrofori come tubi addizionali; il coefficiente di contrazione della vena uscente per essi non discenderà al di sotto di 0,70.

Assunti pertanto que' due valori di e_1, come limiti che non convenga oltrepassare coi valori assegnabili ad e_1, e dato al coefficiente di contrazione μ il valor minimo 0,70 a cui dentro que' limiti può esso discendere; si calcolino procedendo di grado in grado i valori che assumono le formule (11), (12), (13)

per tutti i valori di e_1 compresi dentro gli stabiliti limiti; e si formerà il quadro seguente:

e_1	e	k	$\frac{V}{v}$	$\frac{Q}{v}$	R
6°	6°.21′	0.910	2.2325	$0.2660\,R^2$	$1.939\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
7°	7°.29′	0.897	2.0732	$0.2835\,R^2$	$1.878\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
8°	8°.38′	0.885	1.9456	$0.2995\,R^2$	$1.827\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
9°	9°.48′	0.873	1.8405	$0.3141\,R^2$	$1.784\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
10°	11°	0.861	1.7511	$0.3266\,R^2$	$1.750\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
11°	12°.13′	0.850	1.6748	$0.3386\,R^2$	$1.718\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
12°	13°.27′	0.839	1.6086	$0.3489\,R^2$	$1.693\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
13°	14°.43′	0.828	1.5502	$0.3591\,R^2$	$1.669\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
14°	16°	0.871	1.4985	$0.3677\,R^2$	$1.649\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
15°	17°.19′	0.807	1.4520	$0.3762\,R^2$	$1.630\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$
16°	18°.38′	0.797	1.4110	$0.3842\,R^2$	$1.613\sqrt{\frac{Q}{\nu}}$

Il quale mette davanti agli occhi le conclusioni generali che abbiamo superiormente dedotte dalla esposta teoria del turbine; mostra cioè palesemente che, in parità di portata Q, diminuisce il diametro $2R$ del turbine a misura che cresce ν, vale a dire a misura che cresce la caduta o sia l'altezza H, alla quale l'acqua dev'essere innalzata; ma che la diminuzione del diametro si fa progressivamente minore a misura che cresce l'angolo e: mostra che la velocità normale V del turbine cresce al crescere di ν o sia al crescere di H; ma che il crescimento si fa progressivamente più piccolo a misura che cresce l'angolo e: mostra finalmente che il rapporto k dell'effetto utile del turbine al lavoro motore occorrente a girarlo con la velocità normale, diminuisce al crescere di e; ma che la diminuzione è piccolissima dentro gli assunti limiti di e_1. E quindi si fa manifesto quanto superiormente si è detto, che, cioè, nelle grandi cadute per diminuire la velocità normale del turbine giova assegnare all'angolo e^1, e conseguentemente ad e valori, che si accostino al di lui limite maggiore, e che nelle piccole cadute

affinchè il diametro del turbine non riesca soverchiamente grande, giova assegnare ad e_1 valori che si accostino al di lui limite inferiore.

Resta di vedere ora, con un esempio, che nei casi in cui è variabile la caduta, e costante la portata, accomodando la capacità e la velocità normale del turbine, alla caduta ordinaria compresa tra i termini estremi delle sue escursioni, i valori del rapporto k tra l'effetto utile ed il lavoro motore, corrispondenti alle cadute superiori ed inferiori, non differiscono incomportabilmente dal valor massimo che ha quando il turbine lavora sotto la caduta ordinaria alla quale venne aggiustato.

E a questo fine rechiamo un esempio che risponda ai più comuni accidenti che si veggono occorrere nella essicazione dei nostri paduli.

Poniamo dunque che il turbine debba costantemente espellere in un minuto secondo sessagesimale metri cubici 0,6 di acqua; che la minima altezza alla quale debba essere innalzata questa massa di acqua nelle grandi magrezze del recipiente sia di metri 0,90; che l'altezza massima nelle turgidezze del recipiente sia di metri 2,20; e che l'altezza dell'innalzamento nello stato ordinario permanente del recipiente sia di metri 1,20.

Per ciò che si è detto sopra, la capacità del turbine dovrà essere accomodata a quest'altezza ordinaria del sollevamento; avremo dunque

$$v = \sqrt{2g \times 1^m,2} = 0^m,6859,$$

e fatto $e^1 = 10°$, il quadro superiormente esposto dà $R = 1,75\sqrt{\frac{Q}{v}}$, nella quale espressione posto $Q = 0^{m.c},6$, $v = 0^m,6859$, si avrà il diametro del turbine $2R = 1^m,231$.

Lo stesso quadro ci somministra ancora la velocità normale con la quale, sotto questa caduta ordinaria, dovrà il turbine girare; in fatti per $e^1 = 10°$, si scorge doversi assumere $\frac{V}{v} = 1.7511$, o sia sostituendo a v il suo valore $0^m,6859$, diverrà $V = 8^m,496$, o sia dovrà il turbine compiere in un minuto primo 132 rivoluzioni.

Accomodate a questo modo le cose, il quadro ne mostra che il valor massimo del rapporto tra l'effetto utile, ed il lavoro motore che s'impiegherà a girare il turbine con la trovata velocità normale, sarà $k = 0,861$.

Per vedere adesso di quanto diminuirà questo rapporto, quando sbassatosi

il pelo del recipiente al segno delle maggiori magrezze, dovrà il turbine muoversi con la velocità occorrente per espellere ancora metri cubici 0,6 di acqua per minuto secondo, si ricorra alle formule (6) e (7); la prima delle quali ci somministrerà la nuova velocità con la quale dovrà girare il turbine; e la seconda ci darà il corrispondente valore di k: e posto in esse

$$v = \sqrt{2g \times 0^{m}.9} = 4^{m}.202,$$
$$Q = 0,6,$$
$$f = 1.041,$$
$$a = 0.08264.$$

Chè tali sono appunto i valori di f e di a corrispondenti a

$$e_1 = 10^{\circ},\ n = 6,\ \mu = 0,70,\ 2R = 1.231,\ m^1 = \frac{1}{7},\ m = \frac{1}{2};$$

si avrà $V = 8^{m}.142$, vale a dire il turbine in questo stato del recipiente dovrà compiere in un minuto primo giri $126\frac{1}{3}$, e sarà $k = 0,856$.

Finalmente le stesse formule (6), (7) ci somministreranno pure i valori di V e di k corrispondenti alla massima altezza dell'innalzamento, che occorre quando il recipiente è gonfio; in fatti posto

$$v = \sqrt{2g \times 2^{m}.20} = 6^{m}.569,$$

la prima darà $V = 9^{m}.581$, cioè dovrà il turbine fare in questo stato del recipiente giri $148\frac{2}{3}$ in un minuto primo; e la seconda formula ci darà $k = 0,845$.

Confrontando ora insieme questi tre valori di k, si fa palese il piccolissimo divario dei due valori estremi, da quello massimo che si ottiene quando il turbine lavora colla velocità normale corrispondente alla caduta ordinaria alla quale le sue dimensioni furono assestate, ch'è quanto rimaneva a dimostrare.

I valori del rapporto k corrispondenti alla velocità normale del turbine offerti dal quadro, superano tutti il valor massimo k dato dalle esperienze. Lo Schlegel trovò questo valor massimo di k eguale a 0,75, ed eguale lo si riscontrò pure in parecchi altri esperimenti ed osservazioni diligenti che si son fatte sui di lui turbini.

Ma io non credo che questa differenza debbasi attribuire a difetto della esposta teoria, per essersi in essa trascurato il lavoro resistente degli attriti, e

la perdita di forza viva dipendente dall'agitazione dell' acqua nel turbine, o dal rapido cambiamento di velocità; ma stimo piuttosto ch' essa provenga principalmente da una curvatura dei diaframmi diversa da quella da noi supposta, la quale non consenta di poter fare l'angolo e così piccolo come si ottiene colla disposizione da noi immaginata. E che questa differenza di curvatura dei diaframmi sussista in fatto nei turbini dello Schlegel, me lo fa sospettare il sapere positivamente, che i diaframmi ne' suoi turbini sono piegati in modo che tagliano la circonferenza esterna sotto un angolo che varia da 2° fino a 18° gradi, e la circonferenza interna del foro immissario sotto un angolo che varia da 27° a 39° gradi, il che non potrebbe stare piegando i diaframmi in archi di evolvente di un cerchio concentrico alla periferia del turbine.

Io penso però che i diaframmi nei turbini dello Schlegel sieno piegati in archi di cerchi eguali, aventi i centri sulla circonferenza di un cerchio concentrico colla periferia del turbine.

Ammessa questa nuova disposizione dei diaframmi, la teoria esposta risponde meravigliosamente ai risultamenti delle esperienze, come passiamo a dimostrare.

La figura 4.ª rappresenti la pianta del tamburo. Sieno gli archi di cerchio GBF, CIN, ecc. i diaframmi, ed abbiano i loro centri nella periferia del cerchio A, H, che ha il centro comune O col foro immissario $FNPQ$, e colla circonferenza esterna del turbine $GCRS$.

Sia R il raggio del tamburo;

m il rapporto del raggio del foro immissario al raggio R del tamburo;

r il raggio del cerchio dei centri dei diaframmi;

A sia il centro del diaframma GBF;

H quello del diaframma $CI'N$.

I raggi con cui sono descritti questi diaframmi e gli altri successivi, sieno $AG = AF = HC = HI' = \theta$.

Dicasi i l'angolo $\widehat{AOH}$ sotteso dall'arco interposto tra i centri dei diaframmi;

α l'angolo $\widehat{AGO} = \widehat{HCO}$ che i diaframmi fanno con la circonferenza esterna del turbine;

β l'angolo $\widehat{AFO}$ che i diaframmi stessi fanno con la circonferenza del foro immissario;

e l'angolo $\widehat{AMO}$ che la direttrice dei canali compresi dai diaframmi fa con la circonferenza che passa pei centri M delle luci emissarie:

BC rappresenta la larghezza delle luci emissarie;

FI' quella delle luci d'imboccatura dei canali;

Finalmente sieno ancora m_1 il rapporto dell'altezza interna dei canali al diametro $2R$ del turbine, μ il coefficiente di contrazione della vena.

Si troverà facilmente:

$$\theta = \frac{1}{2} R \frac{1 - m^2}{\cos.\alpha - m \cdot \cos.\beta},$$

$$r^2 = \theta^2 + R^2 - 2R\theta \cdot \cos.\alpha,$$

$$\text{sen.}\,\widehat{AOG} = \frac{\theta \cdot \text{sen.}\alpha}{r}.$$

$$\widehat{AOC} = i + \widehat{AOG},$$

$$AC = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos.\widehat{AOC}},$$

$$\text{sen.}\,\widehat{ACO} = \frac{r \cdot \text{sen.}\,\widehat{AOC}}{AC},$$

$$\cos.\,\widehat{OAF} = \frac{r^2 + \theta^2 - m^2 R^2}{2r\theta},$$

$$HF = \sqrt{4r \cdot \text{sen.}\frac{i}{2}\left\{r \cdot \text{sen.}\frac{i}{2} - \theta \cdot \text{sen.}\left(\frac{i}{2} + \widehat{OAF}\right)\right\} + \theta^2}.$$

E quindi si avrà

$$BC = AC - \theta,$$

$$FI' = \theta - HF,$$

$$\text{cotg.e} = \frac{R \cdot \cos.\widehat{ACO} - \frac{1}{2} \cdot CB}{R \cdot \text{sen.}\,\widehat{ACO}}.$$

Ciò posto, ritenuto $m = \frac{1}{2}$, 6 il numero dei canali idrofori o sia $i = 60°$; si calcolino i valori delle quantità BC, FI, cotg.e, corrispondenti ai valori estremi di α e di β adottati dallo Schlegel ne' suoi turbini; cioè si

calcolino i valori delle dette quantità per $\alpha = 2°$, $\beta = 27$; e per $\alpha = 18°$, $\beta = 39°$.

Si avrà per la prima coppia

$$BC = 0.1838 . R ,$$

$$FI = 0.3022 . R ,$$

$$e = 19°.58' .$$

E per la seconda coppia si troverà

$$BC = FI = 0,4\, R ,$$

$$e = 28°.33' .$$

Quindi ritenuto ancora $m' = \frac{1}{7}$, $\mu = 0,70$, troveremo pei minimi valori di α e di β essere

$$\frac{a}{A} = 0.281 , f = 1.042 .$$

E la formula (13) ne darà

$$k = 0,76.$$

E pei massimi valori di α e di β troveremo

$\frac{a}{A} = 0.6112$, $f = 1.2634$; e la formula (13) ne darà

$$k = 0.73 .$$

Questi valori di k che quadrano a capello con quelli dati dalla esperienza, fanno che si possa concludentemente argomentare, reggere l'esposta teoria al cimento dell'esperienza, e insieme importare essenzialmente pel miglior effetto del turbine, la natura della curva alla quale la piegatura de' suoi diaframmi vuol essere accomodata.

FIG.a I.

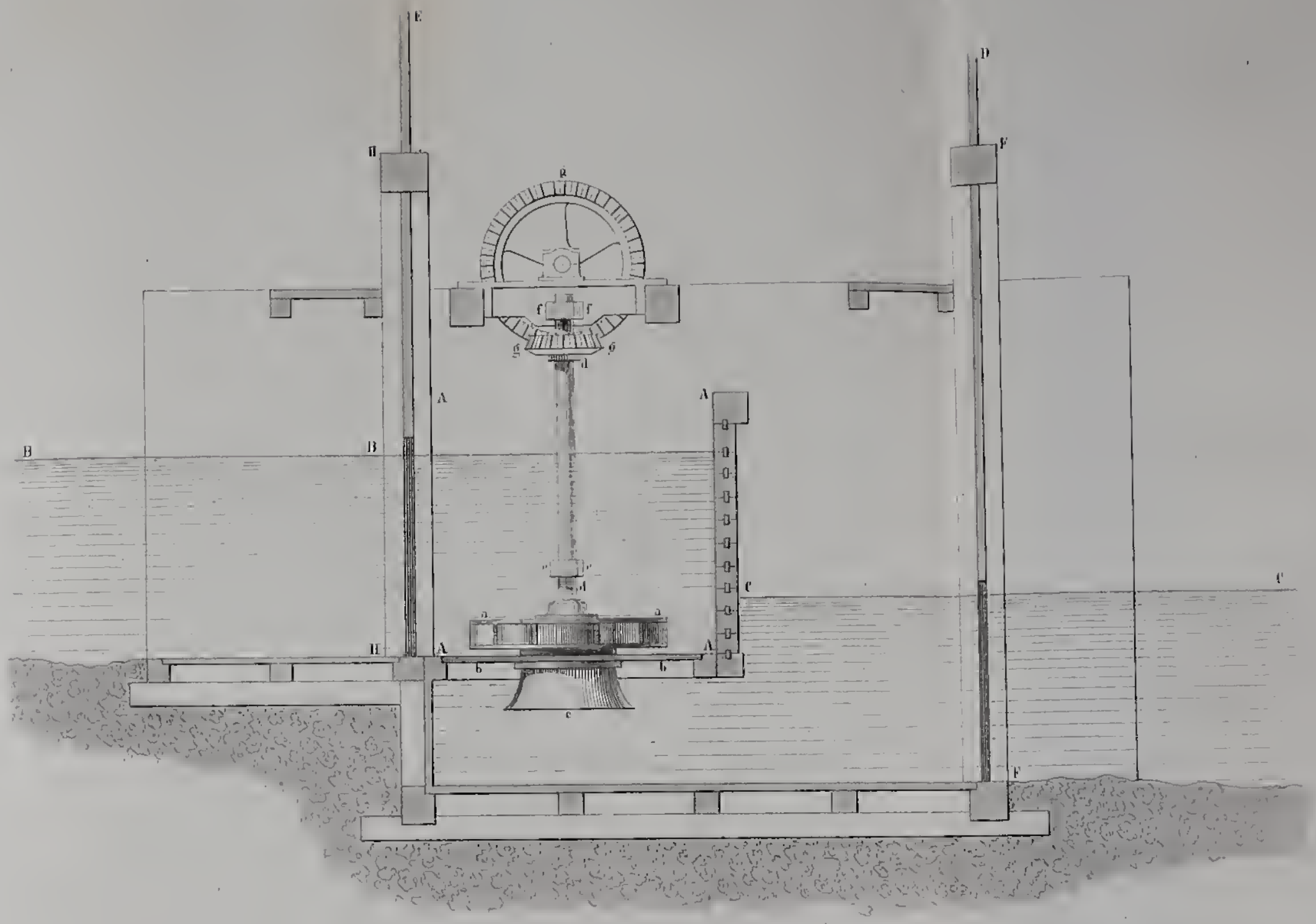


FIG.a II.

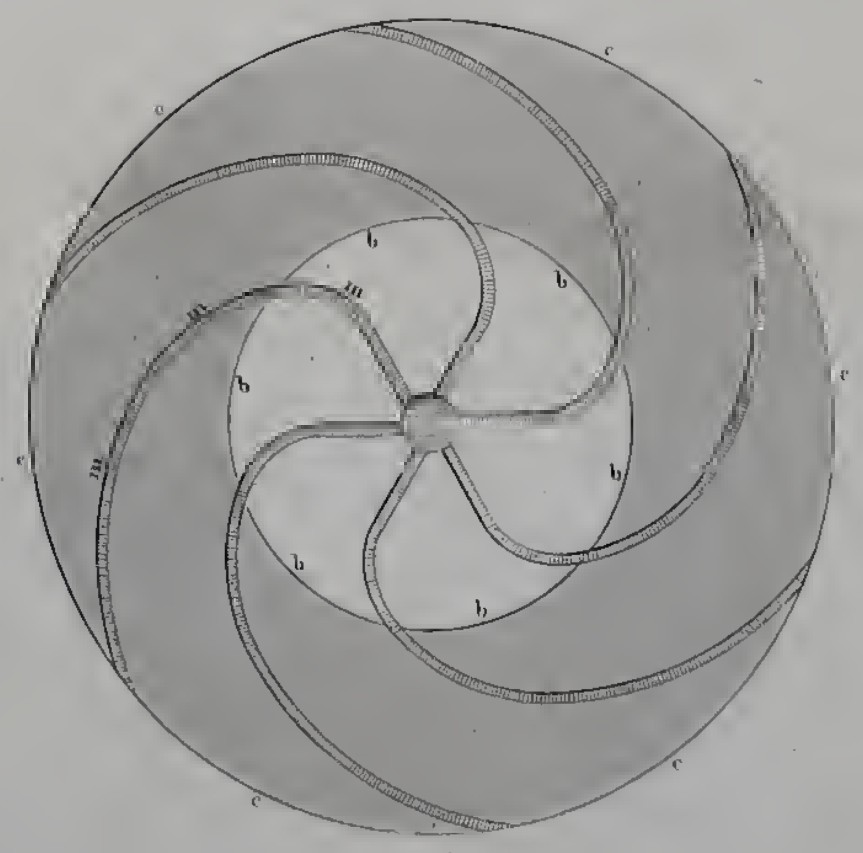


FIG.a IV.

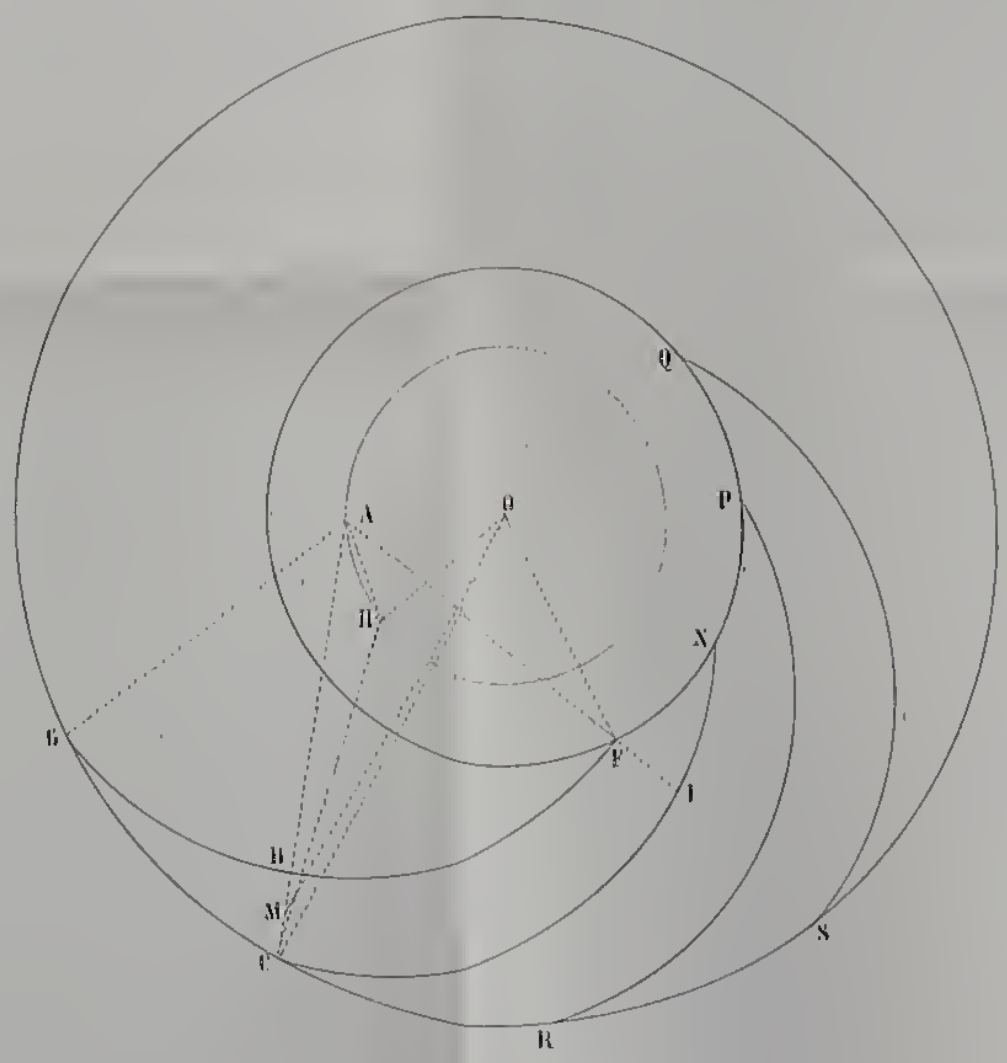
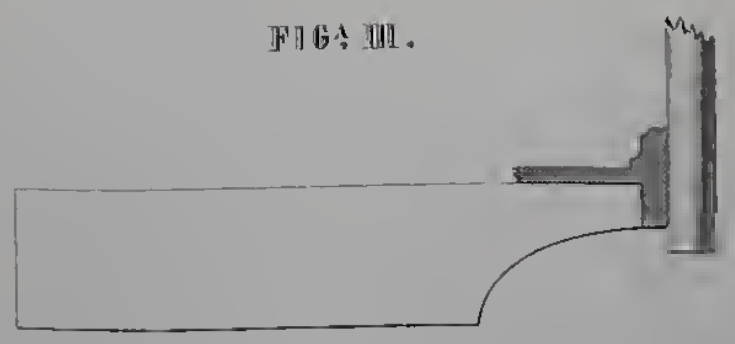


FIG.a III.



SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Figura I. — Veduta laterale del turbine.

aa, Tamburo del turbine.

dd, Albero fermato al coperchio del tamburo.

ee, *ff*, Collarini che ritengono l'albero, dentro ai quali gira liberamente.

gg, Ingranaggio conico che serve ad imprimere il moto rotatorio al turbine.

AA, Cassa contenente il turbine.

bb, Piastra di ghisa che forma il fondo della cassa.

c, Imbuto di ghisa unito per di sotto al fondo forato della cassa, per mezzo del quale entra l'acqua nel turbine.

BB, Recipiente di esaurimento dell'acqua innalzata dal turbine.

IIII, Cateratta a canale, che separa la cassa contenente il turbine dal recipiente di esaurimento, essa si apre e si chiude alzando ed abbassando la saracinesca *E*.

CC, Canale di corrivazione in cui raccogliesi l'acqua del padule, e la mena sotto la cassa del turbine.

FF, Cateratta che attraversa il canale di corrivazione, per mezzo della quale a volontà si dà o si toglie l'accesso all'aqua che corre al turbine, aprendo o chiudendo la saracinesca *D* scorrevole verticalmente entro canali o gargami aperti nelle spallette della cateratta.

Figura II. — Veduta interna del turbine, tolto il coperchio.

ccc, Fondo del tamburo.

bbb, Foro immissario aperto nel centro del fondo per cui entra l'acqua da espellersi.

mmm, Diaframmi o palette curve che uniscono il fondo al coperchio del tamburo, e dividono la di lui capacità interna in altrettanti canali *bc*, *bc*, *bc*.

Figura III. — Veduta di una paletta spiegata e distesa sopra una superficie piana.

Figura IV. — Tracciamento geometrico delle palette del turbine piegate in archi circolari.

(*Letta il* 13 *febbraio* 1859.)

INDICE DELLE MATERIE

CONTENUTE NELLA PARTE I DI QUESTO VIII VOLUME

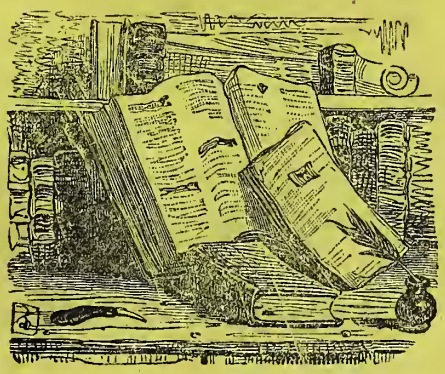
Teoria dinamica del calorico. Memoria del m. e. Domenico Turazza . . . Pag. 1

Sulle cause che resero finora infruttuose le misure prese per abolire la tratta dei Negri, e come un tale scopo si potrebbe raggiungere. Riflessioni del m. e. cav. ab. Lodovico Menin . . . . . » 87

Della materia e delle forze. Considerazioni del m. e. prof. Giusto Bellavitis . . » 101

Ricerche sul moto dell'acqua nel turbine idroforo dello Schlegel, e sull'effetto di questa macchina applicata al prosciugamento dei terreni palustri, del m. e. prof. Gustavo Bucchia (con una tavola). . » 135

VENEZIA - NEL PRIVIL. STABIL. DI G. ANTONELLI - 1859



RELAZIONI

DI

ALLINEAMENTO NEI PUNTI DELLE CURVE ALGEBRICHE

NOTA

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

1. Nell'anno 1854 ebbi l'onore di presentare a questo i. r. Istituto e di pubblicare nei suoi Atti una nota *Intorno alla teoria degli allineamenti* data dal Grassmann: soltanto in questi giorni venni a conoscere che questo Geometra avea pubblicato nel *Giornale di matematica* del Crelle (1856) una nuova memoria *Sulla generazione lineale delle curve del* 3.° *ordine*, nella quale data l'occasione di esaminare la mia predetta nota, aggiungeva importanti osservazioni sulle varie maniere di allineamento che possono qualificare in tutta la generalità una qualunque di quelle curve. — Io debbo prima di ogni altra cosa riconoscere che la ragione è dalla parte del Geometra di Stettino quand'egli impugna una troppo estesa asserzione contenuta nella mia nota; ecco in che consisteva il mio errore: in quel tempo il Chasles aveva data una costruzione della curva del 3.° ordine *(tritoma)* passante per 9 punti dati comunque; le costruzioni precedentemente pubblicate dal Grassmann insegnavano a costruire una tritoma conoscendone 9 punti, ma questi erano tra loro legati da speciali condizioni, che toglievano parte della generalità; sicchè se io mi fossi limitato ad osservare che il Chasles diede la prima soluzione del problema di costruire la tritoma di 9 punti, credo che avrei detto il vero, poichè il Grassmann pubblicò la sua soltanto nel 1856; fu, al contrario, inesatto il dire che le formule da lui proposte non fossero abbastanza generali per rappresentare qua-

lunque tritoma; infatti data una di queste curve (non già 9 suoi punti) si possono in infinite maniere determinare gli elementi di alcuna delle formule del Grassmann, la quale rappresenterà poi tutti i punti della curva.

2. Quantunque non possa occuparmi di un esteso lavoro sull'argomento, pure credo utile di richiamare su di esso l'attenzione dei Geometri Italiani; cercherò di darvi la maggior semplicità allontanando ogni idea ed ogni segnatura, che dipendendo da teorie più generali esposte dal Grassmann in apposita opera, potrebbero dare un aspetto di stranezza o di oscurità a considerazioni rigorosamente geometriche.

3. *Convenzioni.* Se colle lettere majuscole A B ecc. s'indicano dei punti, con AB si segnerà la retta indefinita, che passa pei punti A B , senza badare alla lunghezza della porzione compresa tra i due punti; così pure se a b ec. sono altrettante rette, il segno ab indicherà il punto d'intersezione delle due rette, senza badare all'angolo ch'esse comprendono. Queste due convenzioni adoperate più volte di seguito danno origine a formule più complicate, il cui significato si apprenderà facilmente dai seguenti esempi: ABc significa il punto d'intersezione della retta AB colla retta c , abC è la retta, che passa pel punto ab e pel punto C , ABcD indica la retta del punto ABc precedentemente definito e del punto D . AB(CD) è il punto d'intersezione della retta AB colla retta CD ; hlM(ABcD) indica il punto comune alla retta, che congiunge il punto hl col punto M , ed alla retta ABcD ; per costruire A(bc)[de(fg)]H colla retta, che unisce A con bc, si taglia la retta, che unisce de con fg , e dal loro punto d'intersezione si tira una retta al punto H ; ecc. — Le due *parti* di una formula sono quelle che furono riunite in ultimo luogo; così le due parti di ABc sono le rette AB c ; quelle di A(bc)[de(fg)]H sono i due punti H A(bc)[de(fg)], e questo si decompone ancora nelle due parti A(bc) de(fg) , le parti delle quali sono A bc , de fg .

4. Due punti sono *coincidenti* quando formano un solo punto; due rette le diremo *coincidenti* quando una cade sull'altra, e ciò senza menomamente badare alle loro lunghezze. Così con abC || DE , che leggeremo abC *coincidente* DE indicheremo che la retta abC cade sulla DE , cioè che i quattro punti ab C D E sono in una medesima retta, sieno d'altronde quali si vogliano le loro distanze rispettive.

5. Una *formula* risulta (§ 3) dalla successiva unione di due punti o di

due rette: se avvenga che due punti che debbono unirsi, o due rette che deggiono intersecarsi, sieno coincidenti, la formula diventerà *indeterminata*. Così, per es., la formula abC(DE) sarà indeterminata se sia abC||DE, ed anche se sia a||b, oppure ab||C, oppure D||E. Infatti è palese che nel primo caso la formula esprime un punto qualunque della retta DE; nel secondo caso ab è un punto qualunque della retta a, quindi abC è una retta qualunque passante per C, ed abC(DE) è un punto qualsivoglia della retta DE; ecc.

6. Dico che un punto è *congruente* ad una retta, e questa è *congruente* a quello, quando il punto appartiene alla retta, ossia la retta passa pel punto. — Tre o più punti si diranno *congruenti*, ossia allineati, quando appartengono ad una medesima retta; così pure tre o più rette si diranno *congruenti*, quando concorrono in un medesimo punto. — Una congruenza si supporrà soddisfatta anche se uno dei suoi due membri è una formula *indeterminata* (§ 5). Così sarà abC *congr.* M non solo se la retta abC passi pel punto M, ma anche se abC sia indeterminato, cioè se a||b, oppure se ab||C.

7. *Canoni.* Bisogna rendersi abituali alcuni canoni, la cui verità riesce evidente dalle cose dette e da figure di facile costruzione.

I. Le due *parti* (§ 3) di una formula che deggiono insieme unirsi possono a piacere tra loro permutarsi senza che la formula cangi di significato. Così, per es., alla ABcD sono identiche le BAcD, c(AB)D, D[c(AB)], ec.

II. Una coincidenza separando un membro nelle sue due parti dà due congruenze. Così, per esempio, se ABc(de)||MN sarà ABc *congr.* MN ed anche de *congr.* MN. In generale diremo che (II) PQ||r dà P *congr.* r, Q *congr.* r; intendendo con P Q r tanto semplici elementi quanto formule comunque composte.

III. Viceversa, un elemento congruente con due altri (non coincidenti) coincide coll'unione di questi. Cioè se P *congr.* r e Q *congr.* r sarà (III) PQ||r, purchè non sia P||Q.

IV. Se in una congruenza si separa un membro nelle sue due parti si hanno tre membri tra loro congruenti. Così se (IV) AB *congr.* C, saranno *congruenti* A. B. C; cioè questi sono (§ 6) tre punti in linea retta. Per altro esempio se abCd *congr.* efG saranno *congruenti* le tre rette abC. d. efG, ed anche i tre punti abCd. ef. G. Non si potrebbe separare ab da Cd perchè queste non sono (§ 3) le due parti della formula abCd.

La congruenza di tre punti o di tre rette è segnata dal Grassmann così

$$A.B.C \,||\, 0 \quad , \quad abC.d.efG \,||\, 0 \;;$$

noi scriveremo invece A . B . C *congruenti* , ecc.

V. Viceversa, una *congruenza* di tre membri (cioè (§ 6) tre punti *allineati* o tre rette *concorrenti* insieme) porta la congruenza tra un membro e l'unione degli altri due. Così se (V) P . Q . R *congruenti* si ha P *congr.* QR , Q *congr.* PR , R *congr.* PQ . Per altro esempio abC . d . efG *congruenti* darà abC *congr.* efGd , d *congr.* efG(abC) , ec. — Al calcolo delle congruenze servono in principal modo i tre canoni seguenti.

VI. In ogni congruenza fra due membri una delle due parti di un membro può trasportarsi a ultimo termine dell' altro membro; questo trasporto può ripetersi più volte. Così (VI) PQ *congr.* R dà P *congr.* RQ , che pel I canone è identico con QR . Per esempio ab(CDe) *congr.* F dà ab *congr.* F (CDe).

VII. Una formula, che non sia (§ 5) *indeterminata*, può semplificarsi quando una delle sue due parti sia congruente ad una delle due parti dell' altra parte, giacchè la formula si riduce a questa parte della seconda parte ch' è congruente colla prima parte, cioè se (VII) P *congr.* p si ha PQp || P , purchè non sia PQp indeterminata. Questo canone riesce evidente (come tutti i precedenti) osservando che la retta PQ incontra la retta p nel punto P ad essa appartenente. Altri esempii di questo canone, premettendo sempre la supposizione che la formula sia determinata, sono AB(CB) || B , ABcD [E(ABc)] || ABc , ABcDeD || ABcD , ABcD(DE) || D .

VIII. Separando una formula nelle sue due parti, e la prima di esse ancora in due, e finalmente la prima di queste ancora in due, avremo ciò che, per l' ordine con cui sogliono scriversi, diremo 1.°, 2.°, 3.° e 4.° elemento della formula; ciò posto, se una formula determinata sia congruente al primo elemento, questo sarà congruente al terzo, oppure all'unione del secondo col quarto. Cioè se (VIII) A *congr.* ABcD sarà A *congr.* c , oppure A *congr.* BD , purchè non sia ABcD *indeterminata.* — Viceversa, se A *congr.* c il canone VII darà ABc || A , poscia ABcD || AD *congr.* A ; che se invece A *congr.* BD sarà (VI) AB *congr.* D , e poi (VII) ABcD || AB *congr.* A .

8. Per dimostrare il *teorema fondamentale sulla generazione delle curve algebriche* ricordiamo da prima i principii generali relativi alle coordinate.

Esprimiamo con (x, y, z) il punto, che ha per coordinate parallele riferite a due assi i rapporti $x : z \quad y : z$; sarà $ux + vy + wz = 0$ l'equazione di una retta, che sarà data ove si conoscano i rapporti tra le quantità $u\ v\ w$; noi la indicheremo con $[u, v, w]$. Supponiamo che i due punti X A sieno rispettivamente espressi da $(x, y, z) \quad (a, b, c)$, la retta XA determinata dai medesimi sarà $[u, v, w]$ essendo

$$u = cy - bz \quad , \quad v = az - cx \quad , \quad w = bx - ay \quad .$$

E se la retta b sia espressa da $[d, e, f]$, il punto d'intersezione XAb sarà espresso da (x', y', z') purchè $x' = fv - ew$, $y' = dw - fu$, $z' = eu - dv$, che se ora vogliamo determinare la retta XAbX espressa da $[u', v', w']$ sarà

$$u' = yz' - zy' \quad , \quad v' = zx' - xz' \quad , \quad w' = xy' - yx'$$

e, fatte le sostituzioni, le $u'\ v'\ w'$ risulteranno funzioni omogenee del secondo grado delle $x\ y\ z$ (che possono considerarsi come le coordinate del punto X) , e sarà pure omogenea del secondo grado l'equazione $lu' + mu' + nw' = 0$ esprimente la condizione che la retta XAbX passi pel punto (l, m, n) ; sicchè, segnando con C quest'ultimo punto, il luogo di tutt'i punti X , che soddisfanno alla congruenza XAbX *congr.* C sarà dato da un'equazione omogenea del secondo grado tra le coordinate $x\ y\ z$.

9. Le considerazioni del § precedente estese ad una congruenza quanto si voglia complicata dimostrano che: *Una congruenza la quale contenga* n *volte il punto variabile* X , *oltre punti e rette costanti, spetta a tutti i punti* X *di un luogo dell' n.esimo ordine.* Similmente: *Una congruenza contenente* m *volte una retta variabile* y *spetta a tutte le tangenti di una curva, od inviluppo, dell' m.esima classe*, cioè alla quale si possono da ciascun punto condurre *m* tangenti reali od immaginarie.

10. *Ditome*, cioè luoghi che sono tagliati da ogni retta in due punti. Le congruenze spettanti ai luoghi di secondo ordine sono tutte riducibili mediante i canoni I e VI alla forma XAbCd.... *congr.* X . — La più semplice (1) XAbC *congr.* X appartiene pel canone VIII al complesso delle due rette b ed AC . — La (2) XAbCdE *congr.* X comprende i cinque punti che ora determineremo; primieramente la congruenza è soddisfatta se XA è *indeterminata* (§ 5), cioè se $X \,||\, A$; — 2.° e 3.° supposto X *congr.* b pel VII canone è $XAb \,||\, X$, ed allora la XCdE *congr.* X dà (VIII) X *congr.* d oppure X *congr.* CE , quindi abbiamo gli altri due punti $X \,||\, bd$, $X \,||\, CEb$,

che chiameremo M||bd e Q||CEb ; — 4.° supposto XA *congr.* C , abbiamo (VII) XAbC||XA , e la (2) diviene XAdE *congr.* X da cui (VIII) X *congr.* d oppure X *congr.* AE ; la prima combinata colla (VI) X *congr.* AC dà il nuovo punto X||ACd||P . Siccome pel VI canone alla proposta congruenza può darsi la forma X *congr.* XEdCbA , così avremo il quinto punto X||E , ed i tre già trovati db||M CAd||P , ECb||Q.

11. Presi ad arbitrio i cinque punti A E M P Q possiamo determinare gli elementi della precedente congruenza (2) : giacchè pei canoni I e II si ha b||MQ , d||MP , poscia CE *congr.* Q , CA *congr.* P danno C||AP (EQ) . Viene da ciò che la *ditoma* (sezione-conica) passante pei cinque punti è data dalla congruenza (2) cioè

(3) XA(MQ)[AP(EQ)](MP)E *congr.* X .

12. Una congruenza più semplice è la

(4) XA(EM)C(AM)E *congr.* X

essa dipende da quattro soli elementi A E M C , sicchè non può servire a costruire la ditoma che passa per cinque punti dati; ma peraltro è ancora abbastanza generale per poter rappresentare una ditoma qualunque. Per semplicità scriviamola così (4) XAeCaE *congr.* X , ritenendo sempre che A *congr.* a ed E *congr.* e : quando supponiamo XA *congr.* C la XAaE *congr.* X ci dà (VIII) X||AC(AE) , e X||ACa , i quali sono due punti della retta AC tutti due coincidenti nello stesso punto A , dunque CA è tangente della curva ; dicasi lo stesso di CE . Pertanto data una ditoma se ne potranno scegliere ad arbitrio tre punti A E M , ed essi insieme alle tangenti AC EC dei due primi saranno i cinque elementi, col cui mezzo la (4) darà la costruzione della curva.

13. Tutte le rette XA (supponendo al solito che X sia variabile, ed A un punto fisso) e tutte le rette XAbC formano intorno ai punti A e C due *stelle* (fasci di raggi) tra loro *omologhe*, perchè i loro raggi corrispondenti s'incontrano nei punti della retta b . (Una serie di punti in linea retta formano ciò che io dico una *punteggiata*, ed una serie di rette passanti per un punto formano una *stella ;* se i raggi della stella sono rispettivamente congruenti ai punti della punteggiata, la stella e la punteggiata sono tra loro *prospettive ;* due stelle prospettive ad una medesima punteggiata le dico *omologhe*, ed omologhe sono pure due punteggiate prospettive ad una medesima stella :) (potrebbe vedersi il mio *Saggio di Geometria derivata*). — Invece le

rette XA e le rette XAbCdE formano due stelle soltanto tra loro *collineari (projettive* od *omografiche* che voglian dirsi), perchè tanto l' una come l' altra è omologa colla stella formata dalle rette XAbC (la prima incontrandola nella punteggiata b , e la seconda nella punteggiata d , cioè questa è prospettiva tanto colla stella XAbC , che ha il centro C , quanto colla stella XAbCdE , che ha il centro E) . È noto che l'*intersezione* di due stelle collineari (cioè dei loro raggi corrispondenti) è sempre una ditoma che passa pei loro centri A E ; ed infatti abbiamo or ora veduto che i punti di intersezione X di ciascuna XA colla corrispondente XAbCdE , cioè tutti i punti soddisfacenti alla congruenza (2) appartengono ad una ditoma (sezion-conica). — La precedente osservazione ci dispensa dal considerare formule più complicate ; giacchè le rette espresse, dicasi per esempio, da XAbCdEfG formano intorno al punto G una stella, la quale è collineare con quella delle rette XA , sicchè l' intersezione delle due stelle sarà una ditoma, e scegliendo su di essa tre punti, oltre i A G , potremo (§ 11) rappresentare la seconda stella colla formula più semplice XAhKlG || XAbCdEfG .

14. Le date congruenze servono a determinare, mediante semplici allineamenti, quanti si vogliano punti di una ditoma qualunque. Si può anche trovare il secondo punto, nel quale la curva è tagliata da una retta condotta per un punto già conosciuto della ditoma. Così, per esempio, se si voglia il punto in cui la ditoma è di nuovo tagliata dalla retta CM si muterà A in M , e gioverà cangiare eziandio M in E ed E in A , perchè allora la (3) diventa

$$XM(EQ)[MP(AQ](EP)A \text{ } congr. \text{ } X$$

che essendo XM || CM diventa (VII) , a motivo di EQ *congr.* C , C[MP(AQ)](EP)A *congr.* X , perciò il punto cercato è C(AQd)(EP)A(CM) .

15. Le precedenti formule danno facili costruzioni anche delle *tangenti* alle curve descritte ; così nella ditoma espressa dalla (2) XAbCdE *congr.* X, la tangente a nel punto A è subito data, osservando che quando X è infinitamente vicina ad A la retta XA è appunto la tangente a , e perciò la (2) dà abCdE *congr.* A , da cui pel canone VI si ottiene a *congr.* AEdCb , e perciò a || AEdCbA . Similmente la tangente in E è e || EAbCdE .— La m tangente alla ditoma nel punto M || bd si trova essere m *congr.* ACb(CED)(AE) ; ma non veggo come essa si possa dedurre dalla (2). Così pure nei punti P || ACd , A || CEb le tangenti sono p *congr.* ACb(AEd)(CE) , q *congr.* CEd(AEb)(AC) . Per un qualunque altro

punto X della ditoma la tangente si determina mediante l'una o l'altra delle congruenze x *congr.* XAb[CEbX(AC)]d , x *congr.* XEd[ACdX(CE)]b.

16. *Tritome.* Le congruenze che, secondo il § 9, esprimono una *tritoma* (curva del terzo ordine) possono ridursi pei canoni I, IV, V, VI alla congruenza fra tre formule, ciascuna delle quali abbia per primo elemento il punto X della curva; così le varie congruenze delle tritome possono distinguersi mediante i tre numeri che indicano quanti elementi costanti susseguono alla X in ciascheduna delle tre formule; essi sono pari se la congruenza è fra tre punti, e tutti tre dispari se si hanno tre rette insieme concorrenti. — Secondo l'osservazione fatta al § 13, se uno di questi numeri fosse 7, la formula si potrebbe semplificare riducendola a contenere 5 soli elementi costanti, continuando ad esprimere la medesima stella. — Similmente la formula XAbCDEf esprime una serie di punti posti sulla retta f che è *correlativa* coi raggi della *stella*, che ha il centro A, (vale a dire la *punteggiata* f potrebbe trasportarsi in posizione *prospettiva* rispetto alla stella A, in guisa che ciaschedun raggio di questa passasse pel punto corrispondente di quella), e determinata una stella C_1 che sia prospettiva colla punteggiata f, e nello stesso tempo *omologa* colla stella A, cioè tale che i suoi raggi incontrino i corrispondenti della stella A nei punti di una retta b_1, alla formula XAbCdEf potrà sostituirsi la XAb_1C_1f contenente quattro soli elementi costanti.

17. Quanto abbiamo superiormente asserito ammette peraltro eccezione; infatti si supponga che la retta f sia tagliata dai raggi della stella A, avremo sulla medesima retta due punteggiate tra loro collineari; esse hanno, generalmente parlando, due punti *comuni*, ognuno dei quali coincide col proprio corrispondente; e se per uno di essi si tiri comunque la retta b_1, la stella A segnerà su di essa una punteggiata collineare alla f ed anche omologa, perchè esse si tagliano in un loro punto comune, e il loro centro d'omologia sarà il cercato punto C_1. Ma può avvenire che i due punti *comuni* alla due punteggiate sovrapposte sulla f sieno immaginarii, ed in tal caso la supposta riduzione della XAbCdEf alla XAb_1C_1f sembra impossibile.

18. Non considereremo la tritoma espressa dalla *congruenza* dei tre punti XAbCd. XFe. X, giacchè pei canoni V, VII essa diventa:

$$XAbCd \text{ } congr. \text{ } XFeX \,||\, X$$

purchè non sia XFeX indeterminata, e quindi comprende la ditoma

XAbCd *congr.* X , e la retta e . — Così una delle formule più semplici è quella distinta dai tre numeri 4, 4, 0, cioè

(1) XAbCd. XHgFe. X *congruenti.*

Determiniamo parecchi punti di questa tritoma. La formula XAbCd non può in generale divenire indeterminata se non nel caso di X||A , e questo è un punto della tritoma. Se supponiamo X *congr.* b il VII canone riduce la formula XAbCd ad XCd , e ponendola coincidente al terzo membro X risulta dal II canone che X *congr.* d , sicchè abbiamo un altro punto della tritoma che segneremo con M||bd . Se XA *congr.* C la formula si riduce a XAd , che posto coincidente con X dà un altro punto P||ACd . Cerchiamo il terzo punto R della tritoma posto sulla retta d ; quando X *congr.* d è XAbCdX||d , perciò la (1) diviene (VI) X *congr.* deFgH ed il punto cercato è

R||deFgHd .

Operando in simil maniera sulla formula XHgFe si trovano gli altri quattro punti della tritoma

H , N||ge , Q||HFe , S||deCbAe .

Altri punti si possono trovare sulle rette che tagliano la tritoma in due punti già dati ; così pel terzo punto sulla retta AH si porrà X *congr.* AH , allora XA ed XH sono coincidenti colla AH , e la (1) diventa X *congr.* AHbCd(AHgFe) , che combinata colla X *congr.* AH dà il punto cercato.

19. Il Grassmann considera il caso particolare che g||b , allora è facile determinare anche il terzo punto sulla b||MN ; infatti quando X *congr.* b la

(1') XAbCd.XHbFe.X *congruenti*

diventa XCd *congr.* XFeX||XF , cioè XCdF *congr.* X , che dà (canone VIII) X *congr.* d oppure X *congr.* CF , così abbiamo un nono punto L||CFb . Ora data una qualsivoglia tritoma si scelgano su di essa ad arbitrio i punti M N , coi quali si supponga che coincidano R ed S , le rette d e , che contengono due punti infinitamente vicini M ed R , N ed S , saranno perciò le tangenti della tritoma in M N , le quali la taglieranno in altri due punti, che chiameremo P e Q . La retta MN è la b , ed essa taglierà la curva anche nel punto L , pel quale dee passare la CF , ed a motivo delle R||M , S||N prenderemo ad arbitrio sulla d il punto F che ora chiameremo D , onde ricordare ch' esso appartiene alla

d , e la LD taglierà la retta e nel punto C , che ora chiameremo E : le rette PE , QD taglino di nuovo la curva nei punti A ed H , ed avremo la congruenza (1″) XAbEd . XHbDe . X *congruenti* , la quale è come sopra soddisfatta dai punti A H ; poscia se X *congr.* b la (1″) diviene XEd *congr.* XDeX || XD , perciò è soddisfatta anche da X || L || DEb , ed anche da M || db ; e siccome X || bd riduce il primo membro della XAbEdX *congr.* XHbDe indeterminato ed il secondo membro a de , così la d sarà tangente in M ; la (1″) è pure soddisfatta da P || AEd . Similmente abbiamo il punto N || be colla tangente e , ed il punto Q || HDe . — I punti della tritoma ch' entrano nella (1″) sono tre sulla retta MP (due sono riuniti in M) e tre sulla NQ , e si possono scegliere gli A H , in guisa che non sieno in linea retta con L , dunque essi nove punti sono sufficienti ad individuare la tritoma; giacchè se infinite tritome potessero passare pei nove punti vi sarebbe anche un sistema di tre rette.

20. La *tangente* a nel punto A della tritoma espressa da (1) XAbCd . XHgFe . X *congruenti* si ottiene subito ponendo a in luogo di XA , ed A in luogo di X , sicchè si ha poi (canoni V e VI)

a *congr.* AHgFeAdCb .

Per aver la tangente m nel punto M || bd si osservi che posto MHgFe || E la XAbCDE *congr.* X per un punto X infinitamente vicino ad M non differisce dalla (2) del § 15, e quindi valerà la congruenza

m *congr.* ACb(CEd)(AE) allora trovata. In simil modo potrebbe operarsi pei punti N P Q .

21. Vedemmo al § 13 che l' intersezione dei raggi corrispondenti di due stelle collineari, ma non omologhe, è una ditoma; similmente *l' intersezione di una stella e di un fascio di ditome dà una tritoma.* La congruenza del § 18 può scriversi (1) XAbCdX *congr.* XHgFe , nel secondo membro tutte le rette XH formano una stella col centro H , la quale è omologa colla stella di centro F , ch' è prospettiva colla punteggiata e ; sia E un punto di questa retta , la (1) diverrà XAbCdX *congr.* E , ossia XAbCdE *congr.* X , ed esprimerà una ditoma, che (§ 10) passa pei punti fissi A , M || bd , P || ACd , inoltre pel punto S || edCbAe seconda intersezione della retta e colla ditoma, e finalmente anche pel punto E variabile da una ditoma all' altra. Così tutt' i punti della retta fissa e danno un fascio di

ditome passanti pei quattro punti fissi S A M P ; ciascuna ditoma è tagliata in un punto X della tritoma dal corrispondente raggio della stella H : la corrispondenza tra la ditoma e il raggio XH essendo stabilita da ciò che la ditoma taglia la retta e , oltre che nel punto fisso S , nel punto variabile E , da cui dipende il raggio EFgH . Potrà dirsi che il fascio di ditome SAMPE è *iperprospettivo (höhere Perspectivität)* colla punteggiata e (cioè colla serie dei punti E) condotta per uno S dei suoi punti fissi e tagliata dalle ditome; questa punteggiata e è a sua volta prospettiva colla stella F , ch'è omologa alla stella H , sicchè la punteggiata e è *correlativa* colla stella H ; diremo che il fascio delle ditome è *ipercorrelativo (höhere Projectivität)* colla stella H ; dunque: *Le intersezioni di una stella e di un fascio di ditome tra loro ipercorrelativi formano una tritoma, che passa pel centro* H *della stella e pei quattro punti* S A M P *comuni a tutte le ditome ;* l'ipercorrelazione si stabilisce mediante la correlazione della stella colla punteggiata formata dalle intersezioni delle ditome con una retta e condotta ad arbitrio per uno dei quattro punti; e potrà pure stabilirsi mediante la collineazione tra la stella H e quella costituita dalle tangenti alle ditome in uno dei loro punti comuni.

22. Mediante la legge di continuità dal caso di un fascio di ditome con quattro punti comuni si passa al caso di un fascio di ditome con due punti reali comuni ed una secante-ideale comune; colla prospettiva si fa andare all'infinito questa secante e le ditome si riducono a circoli aventi due punti comuni: prendendo uno di questi per centro d'*inversione* il fascio di circoli è *inverso* d'una stella, i cui raggi formano angoli eguali a quelli sotto cui si tagliano i circoli (cioè la stella è uguale a quella formata dalle tangenti in uno dei due punti comuni); dunque ogni stella ipercorrelativa col fascio di circoli è collineare colla stella *inversa* del medesimo. Ritorniamo col pensiero alla figura primitiva, e ricordando che la *trasformazione*, di cui l'*inversione* è un caso particolare, è quella (Saggio di Geom. derivata § 110) per la quale ad ogni retta corrisponde una ditoma, che passa per tre punti *cardinali*, sicchè le trasformate dei raggi di una stella formano un fascio di ditome con quattro punti comuni (cioè i tre cardinali e quello ch'è trasformato del centro della stella), vedremo che ogni stella ipercorrelativa di un fascio di ditome è correlativa anche colla stella, che mediante la trasformazione dà il fascio di ditome.

23. L'osservazione fatta al principio del § precedente dà una costruzione

facilissima: un fascio di circoli con due punti comuni viene tagliato da una stella ad esso ipercorrelativa (qual è, per esempio, una stella i cui angoli sieno eguali a quelli sotto cui si tagliano i circoli), cioè ogni circolo del fascio taglia il raggio corrispondente della stella, e si ottiene una tritoma, la quale passerà pel centro della stella e pei due punti comuni ai circoli, ed avrà all'infinito un solo punto reale, la retta all'infinito essendone inoltre secante-ideale comune con un circolo qualunque. Sicchè se avvenga che la tritoma si decomponga in una retta ed una ditoma, questa sarà sempre un circolo.

24. Una congruenza alcun poco più semplice della (1) è la

(2) XAbC . XDeF . XK *congruenti*

indicata dai tre numeri 3 , 3 , 1 . Questa congruenza di tre rette può esprimersi dicendo che X è il vertice di un quadrilatero, i cui lati e la diagonale passante per X girano ripettivamente intorno ai punti A C F D K , mentre i due vertici adjacenti ad X scorrono sulle rette b e . Appartengono evidentemente alla tritoma i tre punti A D K , che sostituiti in luogo di X rendono indeterminato uno dei tre membri della (2) . Per determinare i punti che sono sulla retta b porremo X *congr.* b , il che rende (VII) XAbC || XC ; poscia se XC(XK) è indeterminato si ha X *congr.* CK e quindi abbiamo il punto M || CKb , altrimenti è (VII) XC(XK) || X ed allora la (2) diventa X *congr.* XDeF , quindi pel canone VIII si hanno gli altri due punti L || be , P || DFb . Precisamente nello stesso modo si trovano sulla retta e i punti N || FKe , Q || ACe . I sei punti A D K M N P Q sono sufficienti a determinare gli elementi della congruenza (2) , giacchè

b || MP , e || NQ , C || KM(AQ) , F || KN(DP) ;

nulladimeno la (2) può dare, come lo dimostrò il Grassmann, una tritoma qualsivoglia. Ponendo XA *congr.* C si ha XDeF *congr.* XK(XA) || X perciò (VIII) si ha un altro punto della tritoma I || AC(DE) . Sopra la data tritoma si scelgano ad arbitrio i punti I L P Q K e le rette IP IQ LP LQ taglino di nuovo la curva nei punti D A M N ; saranno come sopra determinati gli elementi della congruenza (2) ; i nove punti I L P Q D A M N K sono sufficienti ad individuare la curva, bastando a tal uopo scegliere K altrove che nel punto AM(DN) ; infatti se infinite tritome potessero passare per quei nove punti, vi sarebbe compreso anche il sistema di tre rette L.M.P I.A.Q D.N.K , il che è contro

la supposizione che K sia fuori della retta DN . — È facile verificare che il punto AM(DN) || CKbA(FKeD) appartiene alla tritoma, giacchè per esso la (2) diventa KC.KF.XK *congruenti* ch' è identica ; si possono pur determinare mediante semplici allineamenti i terzi punti sulle rette KA KD KM KN AD .

25. Nel caso particolare di b || e e di A.D.K *congruenti* la congruenza (2′) XAbC.XDbF.XK *congruenti* comprende le due rette b , AD , ed una terza retta che passerà pel punto I || AC(DF) ed inoltre pei due R || CFbD(KC) , S || CFbA(KF) .

26. Il Grassmann dimostra che alla forma (2) può ridursi qualunque altra congruenza rappresentante una tritoma, e prende, per esempio, quella che io diedi (Atti, 1854, tom. VI, pag. 66) come rappresentante la costruzione del Chasles per la tritoma che passa per nove punti dati arbitrariamente; essa è un caso particolare di quella indicata dai numeri 6, 2, 2 , cioè

(3) XAbCDEf.XEh.XFe *congruenti* ,

essendo F *congr.* f , ed E *congr.* e : i nove punti dati sono E F K L M N P Q R , A è un decimo punto determinato in ispecial modo mediante i nove punti; si ha e || LE , f || FK , h || LK , e le rette b d nonchè il punto C sono pure determinabili col mezzo dei nove punti. È facile verificare che a questa tritoma appartengono i punti A , E , F , L || eh , K || fh e coi soliti processi di calcolo si determinano i terzi punti posti sulle quattro corde AE , AF , EL || e , ed FL ; essi sono

A_1 || AEbCdEf(EAh)eF(AE) , D_1 || AFbCdEf(AFe)hE(AF)

U || edCbAe , V || hfEdCbA(ehF) .

Ponendo b_1 || FL || ehF , C_1 || AE(KV) , F_1 || AF(KU) la congruenza (2) $XA_1b_1C_1.XD_1eF_1.K$ *congruenti* ha il medesimo significato della (3) , perchè anch' essa comprende (veggasi il § 24) i novi punti A_1 , D_1 , K , L_1 || b_1e || eh || L , M_1 || KC_1b_1 || V , N_1 || KF_1e || U , Q_1 || A_1C_1e || E ,

P_1 || $D_1F_1b_1$ || F , I_1 || $A_1C_1(D_1F_1)$ || A

(queste riduzioni che dipendono dai soliti canoni si rendono palesi disponendo i punti sulle rette come viene espresso dalle precedenti formule), e perchè fra i nove punti tre A . E . A_1 sono in linea retta, così pure F . L . V , e non lo sono i tre F . K . U .

27. Una congruenza più semplice della precedente è la

(4) XAd.XBe.XCf *congruenti* ,

il Grassmann giunse a dimostrare che essa è abbastanza generale per rappresentare qualunque tritoma; a tal uopo egli premette il teorema che se ABC è un triangolo inscritto in una tritoma, i cui lati non la tocchino, esiste sempre un altro triangolo inscritto anch'esso nella tritoma, i cui lati d e f incontreranno i lati del triangolo ABC in tre punti BCd ACe ABf , che appartengono essi pure alla tritoma. È poi facile riconoscere che tutti nove questi punti soddisfanno alla (4) : infatti X||A rende indeterminato il membro XAd ; X||de riduce XAd||X e XBe||X ; e finalmente X||BCd rende XAd||X e la (4) diventa X *congr.* XBe(XCf)||BC ch'è soddisfatta.

28. *Tritoma per nove punti arbitrarii.* È degna di speciale osservazione la congruenza indicata dai numeri 5 , 3 , 1 , cioè la

(5) XAbC . XDeFgH . XK *congruenti*

colla quale il Grassmann esprime la tritoma, che passa pei nove punti A D K B E G L M N affatto arbitrarii; la cosa è intanto palese rispetto ai tre primi. In quanto agli altri tre B E G , che supponiamo rispettivamente congruenti alle rette b e g (le quali vedremo concorrere tutte tre in G), basterà che sia

C||BK(AE) , b||BG , e||EG , H *congr.* EF

poichè la (5) si riduce identica ponendovi uno dei B E G in luogo di X ; infatti pel solito canone VII si ha

BAbC.BK||BC.BK , EA(EK)||E , EDeFgH||EF , GAbC||GC , GDeFgH||GH . Per ciascuno degli altri tre punti poniamo, a brevità di calcolo XAbC(XK)||X_1 , XDe||X_2 ;

rispetto al punto L la (5) diverrà L_1 *congr.* L_2FgH , ossia L_1Hg *congr.* L_2F , alla quale si soddisfa ponendo g *congr.* L_1 , perciò g||GL_1 , ed F *congr.* L_1L_2 . Ci rimane da compiere la determinazione di H F in guisa che sieno soddisfatte le due M_1 *congr.* M_2FgH , N_1 *congr.* N_2FgH , ossia H *congr.* M_2FgM_1 , H *congr.* N_2FgN_1 , e siccome abbiamo trovato anche H *congr.* EF , così il punto F dovrà rendere

FM_2gM_1 . FN_2gN_1 . FE *congruenti* ; pel § 25 questa congruenza appartiene a tre rette, di cui due sono la g e la M_2N_2||e , ma il punto F non può trovarsi nè sull'una nè sull'altra di queste rette, che gli stanno vicine nella formula (5) , rimane adunque che F sia l'intersezione della L_1L_2 colla terza retta, la quale passa pei punti

$I \,||\, M_2M_1(N_2N_1)$, $R \,||\, M_1N_1gN_2(EM_1)$, $S \,||\, M_1N_1gM_2(EN_1)$.

Trovato così il punto F , sarà poi H l'intersezione delle tre rette EF , FM_2gM_1 , FN_2gN_1 . — Con soli allineamenti si può costruire il terzo punto sulle corde AD , AK , DK , ec.

29. *Curve algebrico-razionali.* Tra le linee dell'*n.esimo* ordine meritano essere distinte quelle che possiamo dire algebrico-razionali, perchè le loro coordinate sono esprimibili razionalmente in funzioni di una sola variabile; queste curve, come osservò il Möbius (*Calc. baryc.* § 70), sono determinate mediante soli (3 *n*—1) punti, e possono costruirsi col mezzo di semplici allineamenti; sicchè invece che il punto generico X entri *n* volte in una congruenza, il punto X sarà dato da una formula contenente un punto arbitrario di data retta, od una retta arbitraria passante per dato punto. Così la ditoma espressa dalla congruenza XAbCdE *congr.* X dà $X \,||\, abCdEa$, essendo a una retta qualsivoglia condotta pel punto A ; oppure $X \,||\, BCdE(BA)$, essendo B un punto arbitrario della retta b , ecc.

30. *Coincidenze con un elemento semiarbitrario.* Supponiamo che nella congruenza del § 28 sia $K \,||\, D$ ed indicando con d una retta arbitraria passante per D la congruenza

(4′) XAbC . XDeFgH . XD *congruenti*

potrà scriversi XAbC *congr.* deFgHd , e la $X \,||\, deFgHdCbAd$ mostra come si possa con soli allineamenti determinare il punto della curva che cade su ciascuna retta d . Se x è la tangente nel punto D , la (4′) dà xeFgH(DAbC) *congr.* x ; questa congruenza esprime una *diattomena;* cioè l'inviluppo di tutte le rette x. è una curva della seconda classe (e perciò anche del secondo ordine, sezione-conica); se questa curva avrà due tangenti passanti pel punto D , questo sarà un punto *doppio* della tritoma ; e se nessuna tangente della diattomena passi per D , questo sarà un punto *isolato* della tritoma; finalmente se la diattomena passi per D , cioè se questo sia il punto di contatto della x , la tritoma avrà in D un punto di regresso, e quindi la curva apparterrà al genere delle parabole cubiche.

31. *Ordine delle predette curve.* Nella predetta coincidenza $X \,||\, deFgHdCbAd$ tutte le rette e i punti sono fissi eccettuata la retta d , la quale è soggetta alla condizione di passare pel punto fisso D ; perciò tra $[u, v, w]$, che servono (§ 8) a specificare la retta d vi sarà una relazione della forma $d'u+d''v+d'''w=0$, dove d' d'' d''' sono le quantità,

i cui rapporti individuano il punto D ossia (d', d'', d''') ; perciò possiamo supporre che v sia costante e w sia funzione della u . Il punto d' intersezione della retta $[u, v, w]$ colla $[e', e'', e''']$ sarà $(e'''v - e''w, e'w - e'''u, e''u - e'v)$. Continuando a combinare i punti e le rette successive vedremo che il punto X sarà espresso da (x, y, z) essendo $x\ y\ z$ tre funzioni razionali-intere della u non superiori al terzo ordine, sicchè il luogo dei punti X è precisamente una delle tritome algebrico-razionali, di cui facevamo parola. Peraltro può accadere che la curva sia di ordine inferiore al numero di volte che la retta indeterminata d , od un punto indeterminato, entrano nella coincidenza; e ciò perchè le $x\ y\ z$ abbiano un fattore comune, tolto il quale si abbassino di grado.

32. Serva d'esempio il modo, con cui il Möbius insegna a descrivere una qualunque delle tritome algebrico-razionali. Si abbiano le tre punteggiate tra loro collineari ABEPP'P''... , BCFQQ'Q''... , CDGRR'R''... e si ponga U || AQ(PC) , X || UD(PR) ; mentre P si muove sulla retta AB , U descrive una ditoma avente in A C le tangenti AB BC , ed X descrive una tritoma, che passa per A D ed ha le tangenti AB CD . Acciocchè i punti Q R si muovano sulle rette BCF CDG *collinearmente* al punto P sulla ABE , posto

a || AF , c || CE , e || EG , H || ACe , K || BDe , b || BC

sarà Q || PCaBcA(BC) , R || PHbK(CD) (ed infatti è facile verificare che quando P coincide successivamente con A B E , Q ed R coincidono successivamente con B C F , e con C D G) ; perciò sarà U || PCaBcA(PC) , X || PHbK(CD)P[PCaBcA(PC)D] ,

nella prima di queste coincidenze il punto P , ch' è un punto arbitrario della retta AB , entra due sole volte, ma nella seconda esso entra quattro volte, e nulladimeno la curva dei punti X è algebrico-razionale del solo 3.° ordine.

33. *Convenzioni da adottarsi.* Desidererei, che quanto sono venuto esponendo mostrasse l' importanza di comunemente adottare una teoria, che con tanta semplicità di mezzi conduce a generali conseguenze: la segnatura è sopra ogni altra comodissima per indicare la costruzione di una figura geometrica; io mutai il segno $\equiv$ adoperato dal Grassmann nel segno || , appunto per togliere la confusione, che facilmente nascerebbe se in uno stesso luogo si adoperasse uno stesso segno ora per indicare l' eguaglianza delle quantità, ora la coin-

cidenza dei punti o delle rette; anzi proporrei di adoperare *coinc.* invece del $||$, che qui usai soltanto perchè meglio saltasse all'occhio la sua differenza da *congr.*

34. *Figure intorno ad un punto.* La teoria degli allineamenti può trasportarsi dal piano alla superficie della sfera, ossia applicarsi alle figure formate intorno ad un punto (centro della sfera). Le rette ed i punti della figura piana si cangiano in piani ed in raggi (ossia, sulla superficie della sfera, in circoli massimi ed in punti), le punteggiate e le stelle divengono stelle e *ruote*, denominando così i fasci di piani, che hanno una comune intersezione. A queste figure formate intorno ad un punto si applicano tutti i canoni del § 7.

35. *Figure nello spazio.* Il Grassmann estende la sua teoria anche allo spazio; allora ci bisogna considerare tre sorta di elementi, i punti A $B\ldots$, le rette a $b\ldots$ ed i piani α $\beta\ldots$; le coincidenze fra gli elementi della stessa specie conservano (§ 4) lo stesso significato; in quanto alle congruenze diremo che un piano ed una retta sono *congruenti* quando il piano passa per la retta, ossia la retta è posta nel piano. Ma la relazione tra un piano ed un punto gioverà distinguerla col nome d'*incidenza*, così diremo che un piano ed un punto sono *incidenti* quando il punto è situato nel piano; diremo pure che due rette sono tra loro *incidenti* quando esse sono situate in uno stesso piano, nel qual caso la loro unione determinerà a piacere un piano od un punto. Un punto può unirsi con una retta o con un altro punto, nel primo caso determina un piano e nel secondo una retta: ed un piano unendosi con una retta o con un altro piano determina un punto od una retta. — Il calcolo di queste coincidenze, congruenze ed incidenze è soggetto a canoni, di cui è sempre facile conoscere l'esattezza.

36. Il Geometra di Stettino dimostra che ogni superficie algebrica è esprimibile col mezzo di una *incidenza*, le due formule tra loro incidenti essendo costituite dal punto generico X della superficie e da elementi fissi; il numero delle volte che il punto X entra nelle due formule è, generalmente parlando, eguale all'ordine della superficie (non può mai esserne minore). Se invece del punto variabile X l'incidenza contenga un piano variabile ξ, l'inviluppo di tutti i piani ξ è una superficie algebrica, la cui classe eguaglia il numero delle volte che ξ entra nell'incidenza. È noto che l'*ordine* di una superficie algebrica è il numero dei punti reali od immaginarii, in cui è tagliata da ogni retta, mentre la *classe* è il numero dei tangenziali reali od immaginarii, che

possono condursi per ogni retta data. (Oltre a ciò merita esser osservata la *classe* d'ogni sezione piana della superficie, e l'*ordine* d'ogni cono circoscritto alla superficie; a questo ultimo il Cayley diede il nome di rango della superficie.)

37. L'incidenza di 2.° grado rispetto al punto X è riducibile alla forma (1) Xabc... *incid.* X , essendo a b c ... un numero dispari di rette fisse. Ed anzi la semplicissima Xabc *incid.* X rappresenta ogni superficie del secondo ordine rettilinea, che si cangia nel sistema di due piani se due delle tre rette fisse sieno tra loro incidenti. L'incidenza può anche convertirsi in coincidenza con un elemento semiarbitrario; infatti se α sia un piano passante per la data retta a sarà (2) x *coinc.* $\alpha bc\alpha$ l'espressione di ciascuna delle rette x costituenti la superficie. — Tutti gl'infiniti piani α formano intorno alla retta a una *ruota*, un'altra ruota è quella costituita dai piani αbc, i quali passano tutti per la c, ciascuna di queste ruote è *prospettiva* colla punteggiata b, ossia i piani corrispondenti delle due ruote tagliano la retta b in un medesimo punto; perciò le due ruote αbc, α, la cui intersezione costituisce la superficie del 2.° ordine rettilinea, sono tra loro collineari.

38. Per esprimere una superficie del 2.° ordine convessa bisogna ricorrere ad un'incidenza contenente quattro volte il punto variabile X, il che introduce due volte il piano situato a distanza infinita. — Come le incidenze esprimono le superficie, così forse le congruenze esprimeranno le curve gobbe. — I Geometri troveranno in tutto ciò un vasto campo di studio.

Aggiungo la nota delle Memorie citate nei precedenti paragrafi e di altre di oggetto affine:

§ 13, 22. Bellavitis, *Saggio di Geom. derivata*. Acad. di Padova, IV, 1838.
§ 2. Grassmann, *Ausdehnungs-lehere oder Wissenschaft der extensiven Grösse*. Leipzig, 1844. J. Crelle, 1854, IL, N. 9, pag. 123.
§ 10, 18, 19, 24, 27, 30, 31. Grassmann. J. Crelle, 1846, XXXI, N. 7, pag. 111.
§ 18, 24, 27. Grassmann. J. Crelle, 1848, XXXVI, N. 11, p. 177.
§ 21. —— —— 1851, XLII, N.ri 19, 20, 21, pag. 187, 193, 204.
—— —— 1852, XLIV, N. 1, pag. 1.
§ 1. Chasles, *Comptes*, 30 Mai 1853, XXXVI, pag. 943, 16 Août 1853, p. 273.
Woepcke, *Journ.* Liouville, Nov., Déc. 1854, XIX, p. 345, 407.
§ 35, 36, 37. Grassmann. J. Crelle, 1854, XLIX, N.ri 1, 2, 3, 4, 5.
Chasles. J. Liouv. Nov. 1854, XIX, p. 366.

§ 1, 26. Bellavitis. *Atti Istituto Veneto.* Dic. 1854, V, p. 53.
Brioschi. *Ann. Tortolini.* Sett. 1855, Roma, VI, p. 381.
§ 1, 24, 26, 28. Grassmann. J. Crelle, 1856, LII, N. 17, pag. 254.
§ 21. Jonquières, *Mélanges de Géometrie pure.* Paris, 1856. — J. Liouville, Nov. 1856, I, p. 411. — *Comptes* 7 Sept. 1857, XLV, p. 318.
Chasles, *Comptes* 21 Sett., 18 Dic. 1857, XLV, p. 393, 1061.

INDICE

Classe § 9, 36. Canoni § 7. Cardinali 22. Coincidenti 4, 30, 33. Collineari 13, 37. Congruenti 6, 9, 35. Convenzioni 3, 33. Coordinate 8, 31. Correlative 16, 21. Curve algebriche 8, 9, algebrico-razionali 29. Diattomene § 30. Ditome 10, 11, 12, 14. Fasci di ditome § 21, di circoli 22, 23. Formule 3, 5. Incidenti § 35, 36. Indeterminate (Formule) 5. Intersezioni 13, 21. Inversione 22. Ipercorrelativi 21. Iperprospettivi § 21. Isolato (Punto) 30. Omografiche § 13. Omologhe 13, 16. Ordine 9, 36. Parti di una formula § 3. Projettive 13. Prospettive 13, 16, 37. Punteggiata 13. Punto (Figura intorno ad un) 34. Rango § 36. Ruota 34, 37. Sfera (Figure sulla) § 34. Stella 13. Superficie 36, del 2.° ordine 37, 38. Tangenti § 15, 20. Trasformazione 22. Tritome 1, 16, 27, 28.

(*Lette il* 21 *Agosto* 1859).

DELLA VITA E DELLE OPERE

DI

FRANCESCO LOMONACO

DISCORSO

DEL M. E. GIUSEPPE BIANCHETTI

Francesco Lomonaco, mentre visse, fu certo molto lungi dal godere di quanta fama gli era dovuta e per le vicende della sua vita e pel merito delle opere sue. Della qual cosa non è motivo di stupirsene; poich' è già destino ch' egli ebbe comune in ciò con molti scrittori valentissimi di ogni tempo e di ogni luogo; particolarmente in Italia, dove tanti ostacoli vi sono, e tanti più vi furono, e tanti più se ne crearono, e tuttavia se ne creano, ad una pronta diffusione dalle guadagnate fame; e dove basterebbe ricordare il solenne e recentissimo esempio di Jacopo Leopardi. Ma a questo, com' è accaduto a più altri, fu resa la debita giustizia appena si chiuse sopra la spoglia di lui la tomba, e il nome suo è già omai universalmente conosciuto e celebrato. Quello, per contrario, del povero Lomonaco, dopo quasi cinquant' anni da ch' egli è morto, si giace tuttavia in tal oscurità, che bisogna essere con dei ben eruditi nella storia letteraria italiana del nostro secolo, per trovare chi n' abbia udito poco più che il nome; e questo stesso alla massima parte degl' Italiani è peranco ignoto. Del che, se già non l' avessi saputo in altro modo, ne avrei fatta io stesso esperienza certa, allorchè peregrinando, non è gran tempo, per varie terre italiane, il pronunciai appositamente qua e là dinanzi a molti bravi giovani dediti agli studj; nè solo dinanzi a questi, ma ad alcuni uomini maturi altresì, e più o meno conosciuti in argomento di lettere. Tremenda cosa a pensare per chi si logora e consuma con degni effetti nelle fatiche dell' intelletto! tremenda cosa a pensare!.... Che gli operaj, che gli ammassatori, che i rivenduglioli in let-

teratura, i quali cacciansi oltre a turbe; che i ciarlatani letterarj, i quali si spingono innanzi con loro mille arti, gl' ingombrino la via, e il tengano quindi indietro nell' opinione de' suoi contemporanei; oh, egli può ben tollerarlo, finchè prevegga un giorno in cui i primi cadranno nell' obblio profondo; ed i secondi saran posti nel lor luogo, ed avrà il suo anch' egli!.... Che le gelosie, che le invidie, che le persecuzioni gli rendano infelice la vita, ancora può tollerarlo, finchè gli sia dato di riposar l' animo sopra un tempo in cui si muti la scena, ed ei sia compianto di sue sciagure, ed il suo nome lodato e benedetto dai posteri!.... Ma pensare, che un tal tempo potrebbe anche non venire giammai!.... Oh, ripeto, è un tremendo pensiero, capace a svigorire qualunque sterminata forza d' animo; è tal pensiero che getta l' uomo come in un mare burrascoso senza spiaggia; poichè gli toglie ogni luogo a speranza di consolazione alcuna; non gli lascia immaginare rimedio di sorte, nè fin ch' egli vi si trovi, nè per quando sia uscito da questo mondo.

Non voglio dire per ciò, che il caso del Lomonaco, alla guisa forse di quel d' altri, debba spingere alcuno ad entrare in così fatto disperante pensiero: credo, o mi confido almeno, che se giustizia gli fu ritardata, non gli sia tolta. Benchè anche di questo sì lungo ritardo ho più cagioni di maravigliarmi. Me ne maraviglio per la qualità delle opere sue, che non sono già intorno ad astruse o recondite materie, possibili ad agitarsi soltanto nell' intelligenza di pochissimi; ma, o percorrono gli svariati campi delle storie a trarne fuori od a convalidare solenni documenti intorno alle cose della vita ed a quelle degli studj; o vanno nell' ampio campo della filosofia a ben determinare quanto può e dev' essere attuato secondo la varietà dei luoghi e dei tempi, dei casi e delle condizioni degli uomini e dei popoli. E non meno di questo mi reca maraviglia il pensare, anzi ne provo una assai maggiore quando penso, che se mai nella trascorsa metà del presente secolo, in cui tanto s' invigorì negl' italiani e si diffuse l' amore d' Italia (del quale alcuni fecer pur sempre sì mendaci prove o sì bugiarde pompe); se mai, dico, in cotale spazio di tempo comparvero lavori letterarj, dove il detto amore si manifesti, tali sono senza dubbio quelli del Lomonaco; ne' quali esso amore, non solo apparisce ovunque schietto e fervente, ma vi si scorge ovunque a padroneggiare l' animo di lui in guisa da credere per certo, ch'egli non abbia avuto ad iscrivere altra causa che questa, ch'ei non proponesse al suo scrivere altro fine che questo. E la forma stessa dello scriver suo medesimo mi dà nuovo motivo a maravigliarmi dell' accennata dimenti-

canza. Non posso certo lodare il Lomonaco per la purità della lingua, nè per la grazia dello stile, nè per l' economia del discorso: tutt' altro: mi par anzi ch' egli pecchi sovente, e molto, in ciascuna delle sì fatte cose. Ma tali difetti, di cui son pochi quelli che se ne disgustino, perchè son pochi quelli che li conoscano; da quali pregi generalmente graditi, perchè generalmente conosciuti, non vengono essi in qualche modo compensati! Che altezza, che forza di sentimento in quasi tutte quelle sue pagine! Che vivacità d' immagini! Che vigore, che nobiltà di sdegni! Che abbondanza, che varietà di cognizioni e di erudizioni! E non di rado, che potenza, che ardir di metafore!

Mi stupisco, ripeto, che tutto questo peranco non gli sia valso. Ed altresì mi stupisco che non gli valessero neppure alcune cose, le quali non entrano invero nel merito intrinseco delle opere dell' ingegno, ma che pur giovarono in qualche modo a molti, per dar un certo credito alle loro fatiche letterarie, e farle durare almeno per un certo tempo. Volete che accenniamo al favore che può venire ad esse dalle lodi che lor diedero uomini lodati? Quelle del Lomonaco se n' ebbero, non che da altri, da uno specialmente allora lodatissimo, da Vincenzo Monti. Volete che accenniamo alla voga che, appena uscite, può lor procurare le avversioni di quelli che comandano? Una delle più stimabili delle opere del Lomonaco fu fatta pubblicamente biasimare, e quindi soppressa dal governo del regno d' Italia. Volete che tocchiamo a quanto può giovare alla loro la celebrità stessa delle vite degli autori? Quella del Lomonaco fu parte, e non piccola, di uno dei fatti più solenni che accadessero in Italia sul finire del trascorso secolo; ne passò molta nell'esilio; non breve spazio tra le acclamazioni di una cattedra nuova, a quei tempi importantissima; e si terminò con tal atto, per cui alzossi un romor grande in Lombardia, e se ne discorse per tutta la penisola. Volete che guardiamo alle edizioni? Alcune opere del Lomonaco n' ebbero sul principio più di una; e furono quindi tutte raccolte, ed abbastanza bene ristampate. Volete infine che diciamo pure di quanto potè spesso far correre avidamente ricercate tra le genti anche tante inezie od esorbitanze delle penne; che 'l fece soprattutto in questi ultimi tempi, e varrà a farlo finchè, disconoscendo l' indole più manifesta della natura umana, e la incessante prova che danno gli uomini, da Eva in poi, dell' aggiustatezza di quell' antico detto: ci aggiriamo intorno al proibito, e sempre agogniamo al negato; finchè, dico, vorranno continuare nel proposito degli interdetti? Ebbene: le opere del Lomonaco non mancarono neppur di questi.

II.

Mi ricordo che nella mia gioventù (era nel 1816) vennermi vedute accidentalmente, la prima volta, le *Vite dei famosi capitani d' Italia*, e quelle *degli eccellenti italiani*, fra' libri che il barone Francesco Cortese aveva recati da Milano a Treviso, sua patria, ove tornava dal non piccolo uffizio che ivi esercitò durante il regno d' Italia. Il titolo delle opere invogliommi di dar loro un' occhiata; e, non per altro che per questo, gliele chiesi in prestito. Lettine però qua e là alcuni brani, tanto gusto n' ebbi, che fattomi subito da capo, ne continuai la lettura sino alla fine, di alcuna *Vita* ripetendola puranco. E nel leggere, non potrei dire quante volte mi sono trovato sorpreso di aver corsi tutti gli anni delle prime scuole, tutti quelli dell' Università e qualche altro ancora, senza che udissi mai alcun cenno, non che di tali scritture, ma neppur dell' autor loro.

Qualche altra opera del Lomonaco mi procurai e lessi appresso. Di che mi venne sempre più vivo il desiderio di conoscere anche qualche cosa delle vicende sue; poichè niente mai io avrei voluto allora ignorare dell'uomo di cui per alcun motivo mi piacessero gli scritti; e, d' altra parte, tengo per fermo anche adesso, che ciò agevoli molto ad entrare nell' intima natura di questi, e tanto meglio si possa farlo, quanto più si conosca della vita di quello. Ma del Lomonaco allora pochissimo mi riuscì di sapere; e tutto fu in una breve lettera, non accennante in sostanza se non al modo di sua morte, che l' avvocato L. Piantanida di Milano mandò al suddetto Cortese, in risposta ad una sua ch' ei gli aveva scritta in tal proposito a mia istanza. In qualcheduna delle opericciuole che mi avvenne poscia di comporre e pubblicare intorno a quegli anni; io, tuttavia sotto l' azione del commovimento prodottomi da alcuni suoi pensieri e sentimenti che tanto consuonavano co' miei (dico alcuni, non certo tutti, neppur allora, meno poi adesso), ricordai talvolta il nome di Francesco Lomonaco; ma fu voce perduta; mentre, ch' io sappia, non trovò eco in alcuno scrittore italiano. Certo, io non meritavo di trovarne; ma n' era ben degno il nome che mi usciva della penna.

Più tardi, un magro cenno fece di lui il Maffei nella sua *Storia della letteratura italiana;* un più magro il Ticozzi nella sua *Continuazione* dell' opera del Corniani: poco più che a nominarlo s' indusse il Pecchio nella *Vita* che

scrisse del Foscolo, di cui il Lomonaco era amicissimo; e qualche cosa di nuovo ne disse la Irene Ricciardi in un breve articolo biografico pubblicato nel nono volume del *Progresso* di Napoli. Ma chi abbia tenuto discorso della vita e delle opere di quest' uomo in guisa che valga a diffonderne alquanto la fama, che valga però a compensarlo, come or ci è dato, delle sciagure tante che 'l percossero vivente, che valga a farci perdonare un poco la lunga dimenticanza in cui fu tenuta la sua memoria, io nol conosco. Ben conosco invece gli scritti di molti che avrebbero avuto tutto il destro da rendergli in più occasioni la debita lode, od almeno di ricordarlo con onore, e nol fecero. Ed anche di quelli conosco ne' quali i loro autori, per obbligo del loro stesso argomento, sarebbero stati in certa guisa tenuti a più o meno lungamente parlarne, e tralasciarono di farlo. Con quanta colpa di essi, non so; ma questo so bene, che in sì gran numero di libretti, di libricciuoli, di libercoli, di articoli, di fogli e di foglietti pubblicati in questi ultimi tempi intorno ai destini della nostra patria, non si è mai trovato il nome di quell' uomo, a cui, pur cinquant'anni addietro, l'amore di essa fu, come dicevo, il più potente e quasi unico ispiratore di ogni sua fatica letteraria. E questo anche so, che nella Biografia universale pubblicata da poco tempo, con tante aggiunte di nomi italiani, qui in Venezia, si cerca invano quello del Lomonaco. Ed invano altresì vorrebbesi vederlo nelle *Vite* non è guari dettate con facondia e dottrina di alcuni suoi contemporanei, i quali ebbero con lui più o meno stretta relazione di studj od uffizj .... Dov' è un cenotafio, dove un' iscrizione, che ricordi il Lomonaco?.... Ah, l' Italia non fu e non è soltanto ingiusta sovente verso i suoi grand' uomini durante la loro vita; ma lo fu pure, e lo è ben anco molte volte verso di loro medesimi estinti! E però, dobbiamo tenere, non come oltrepassanti il vero, ma al di qua al di quà di esso, le acerbe parole che le volgeva un dì Alessandro Manzoni in quel suo magnifico Sonetto al povero ed esule Lomonaco, a proposito della *Vita*, che questi aveva allora allora pubblicata di Dante; che volgeva, dico, il Manzoni all' Italia, *ove spesso il buon nasce, e rado alligna;* all'Italia *di gentili alme madrigna;* che trascura sovente e disprezza talvolta, e perseguita anco i suoi migliori; e poi il *cener freddo ne adora*, e *al nome vôto vende onor divini;* all' Italia, che pur *deplorando suoi danni e sue colpe*, è *pentita sempre, e non cangiata mai.*

III.

Sul finire dell' anno 1846, io mi diedi a volgere nuovamente e di maggior proposito il pensiero alla vita ed alle opere del Lomonaco; e n' ebbi motivo dal prof. Tipaldo; il quale nella detta epoca mi richiese di dettarne un articolo da inserirsi in quella *Biografia degl'italiani illustri del secolo passato e parte del presente*, ch' ei, con tanto suo merito, andava allora pubblicando. Possedevo già intorno a' primi anni del Lomonaco alcune brevi notizie venute da Napoli; ma poich' egli partì da quella capitale non peranco raggiunti i trenta, nè più vi comparve; io, a sapere qualche altra cosa dei particolari di sua vita, ne scrissi a Milano, ne scrissi a Pavia; ne' quali due luoghi egli passò tutto il resto ed il più importante del tempo suo: e di quel non molto invero che potei ritrarre, sia dalle suddette notizie, che da queste mie seconde cure, mi gioverò qui appresso. Ma in quanto alle sue opere, ciò che meglio, anzi solo valeva, e dirò altresì ciò che poscia m' indusse ad occuparmi intorno ad esso ben oltre a' termini di un semplice articolo biografico, potevo farlo da me; ed il feci: e fu di rileggerle tutte, tenendo registro di quanto andavo trovandovi di più notevole. Il che mi diede opportunità a comporre anco di esse, per ciò che riguarda i concetti letterarj, filosofici e politici, altrettanti Sommarj; i quali potrebbero formare una ragionevole appendice al presente Discorso. In questo però egli è ben chiaro, che di sì fatte opere io non posso parlarne se non in generale. E tuttavia in tal guisa parlandone, avrò già ottenuto quanto desideravo, se avrò eccitato in alcuni il desiderio di leggerle: dico in alcuni; ed intendo di quelli che alla potenza d' apprezzare quanto veramente il merito dell' autore si sollevi per varj rispetti sopra la comune dei nostri moderni scrittori, uniscano l' altra che dia lor modo di formarsi un assennato e retto giudizio intorno a certi suoi pensieri. E ciò con tanto maggior effetto avrò ottenuto in vantaggio della presente mia fatica, che le opere e la vita di quest' uomo si ajutano, si commentano, si rischiarano a vicenda. Chi le legga, oltre che di conoscere alcune di lui idee che si riferiscono ad alcune sue azioni, s' egli è tra que' rari lettori, di cui m' intend' io, dal complesso delle materie qua e là agitate, e soprattutto dal modo del farlo, acquisterà una piena contezza del carattere e del sentimento suo.

Sì, ripeto, ne acquisterà una piena contezza: e che anche per lui non si

venga a dirmi, come molti pur dicono (e già considerando gli effetti da esso universalmente prodotti, non hanno certo il torto), che l'ingegno è un grande artista, il quale val molto ad illudere, imitando il vero; e che però dall'autore non ne viene una sicura prova a giudicar dell'uomo. Pel generale degli autori, e tanto più quanto più sono valenti, si penserà bene ch'io non ho dubbio alcuno di tal cosa; io, che nello *Scrittore italiano*, negli *Uomini di lettere*, ed anche nel Saggio sui *lettori*, parlai già, e non brevemente, di queste deplorabili contraddizioni tra il fatto della penna e quello della condotta in molti scrittori; io, che ne ho ivi recati tanti esempj, che potrei qui recarne degli altri, e soprattutto di recenti, anzi recentissimi. Ma dissi allora, e torno a dire adesso, che vi sono degli autori, pei quali lo scrivere non è tanto un' opera di letteratura, quanto un atto a cui hanno mestieri di lasciarsi andare di tempo in tempo, per aprire in certa guisa uno sfogo ai più intimi e forti e durabili movimenti dell'animo loro. Or, io non dubito di por il Lomonaco tra questi. Ed in questi l'autore è talmente confuso coll'uomo, che la natura del primo è quella medesima del secondo; e si può benissimo giudicarli reciprocamente l'uno dall'altro; mentre lo scrivere, ed il modo in ispecialtà del farlo, è in essi parte intrinseca della vita, una delle più veraci, delle meno resistibili, delle più solenni azioni della loro vita stessa. Voglio ben credere che il discernerli da quelli i quali, scrivendo, riescono molto abili ad imitare il vero, non sia facile per tutti; credo anzi che 'l sia per pochi: ma, senza dubbio, certi pensieri e certi sentimenti portano seco tali segni, onde niuna potenza d'arte nello scrittore, il quale non li provi, può valere ad esprimerli imitandoli in modo che tragga in inganno quei lettori i quali si trovano eglino medesimi in possesso di que' pensieri e sentimenti stessi .... No no, eglino distinguono ben prestamente l'artista dall'uomo; anzi tanto più prestamente, quanto più quello si è sforzato di ritrarre questo come non è, e voleva che fosse creduto .... Oh, sarebbe pure una brutta, bruttissima cosa, se l'ingegno potesse valer tanto per chi scrive da colorire l'ipocrisia in guisa che usurpasse in suo favore, oltre l'ammirazione dovuta all'ingegno medesimo, anche quell'amore e quell'omaggio a cui non ha diritto se non la virtù!

Vi ha uno stile che non si muove se non per significare quel che detta dentro l'affetto, ed esce quindi « segnato bene dell'interna stampa »; io lo chiamerei lo stile dell'anima: ve ne ha un altro che chiamerò lo stile dell'arte. Questo secondo manifesta più o meno il valore dell'artista; ma non più che 'l valor dell'artista. È lo stile dell'anima che unicamente può manifestare quello

dell' uomo. Se all' anima si congiunge l' arte (congiunzione rarissima in tutti i secoli e presso tutte le genti), quei pochi che sono abili a farlo, conoscono qual è od era l' uomo, e ad un tempo ciò ch' è l' artista. Se l' anima o poco o nulla vi entra, da chi sa discernere non si conosce, e per quant' è il suo merito, non si pregia che l' artista. Se l' arte o poco o nulla si accompagna all' anima, si può conoscere l' uomo, si può anche molto stimarlo; ma non così apprezzare l' artista. E poichè nelle scuole e nelle accademie e nei libri ed in quanti altri luoghi si tenga ragionamento dello scrivere, non si parla di esso che come di un' arte; e non potrebbesi altrimenti; mentr' è un' arte in fatto; e per chi bene ne penetri la natura, e ne consideri gli effetti, la maggiore e ad un tempo la più difficile, come la più proficua, delle arti; così quali utili a studiarsi, quali piacenti a leggersi, quali buoni ad imitarsi non si ricordano e si propongono in generale che gli scrittori più o meno distinti nell' opera dell' arte medesima. Alla qual cosa mi parve di dover puranco accennare; perch' è in essa forse, anzi non saprei come dubitarne, uno de' motivi per cui il nome del Lomonaco, nello stile del quale soprabbonda l' anima, ma è scarsa, a dir vero, l' arte; uno dei motivi per cui è tuttavia tanto universalmente sconosciuto: benchè sappia d' altronde, che niente s' ignori di lor vita, e che godano di bella e meritata fama postuma anche molti altri scrittori non tanto valenti artisti, come, a non toccar che de' più recenti e nostri, come p. e. un Vico, un Genovesi, un Filangeri, un Gioja, un Romagnosi.

IV.

Ma accostiamoci più da vicino, dirò così, alla persona stessa del Lomonaco. Egli nacque da Nicolò e Margherita Fiorentini nel novembre del 1771, nel regno di Napoli, in Montalbano; dove, nel secolo trascorso, trassero anche i natali tre o quattro altri uomini abbastanza conosciuti nelle memorie letterarie di quel regno, e neppur affatto ignoti in quelle del resto d' Italia. È Montalbano una piccola terra della Basilicata, posta sopra uno spazioso ed ameno colle, che ha di dietro l' Appenino, e guarda dinanzi il mar Jonio, da cui non è lungi più che otto miglia. Io, nel 1826, ritornando da Corfù, vi passai alcune ore; e della bellezza di quel paesaggio, uno de' più belli dei tanti belli della, pur troppo, bellissima Italia, ne conservo tuttavia fresca la memoria. Quei magri cenni intorno alla vita del Lomonaco che sono preposti al nono volume delle sue opere

stampate in Lugano (se pur non è errore tipografico) il fan nato nel 1777: ma le notizie biografiche ricevute da Napoli, e i fatti stessi dei quali toccherò appresso, non mi lasciano alcun dubbio su tal proposito.

La prima giovanezza di quest' uomo ci viene narrata come mirabile per operosità grandissima e potenza non minore negli studj. Dicono, che, non valico peranco il nono anno, egli, a Tursi, riempiè di maraviglia gli astanti nell' udirlo sì fanciullo a volgere in nostra lingua luoghi assai difficili di poeti e prosatori latini, e nel vederlo a disegnare accuratamente una carta geografica. Dicono, che l' anno appresso, non minor maraviglia ei destasse a Ferrandina, sostenendo dinanzi ad una colta udienza alcune non facili tesi in matematica. Dicono, che dai sedici anni in poi, era già tanto nelle lettere da poter assumere uffizio di maestro in patria, il qual continuò sino alla sua partenza per la capitale. Dicono, che di anni diciannove, cioè nel 1790, quand' egli se ne andò in questa per darsi alla giurisprudenza, portasse già seco, oltre a molta cognizione del latino, della filosofia, delle matematiche, delle fisiche, anche una più che mediocre nel greco e nell' ebraico. Aggiungono, che quivi divenuto avvocato, avesse intrapreso l' esercizio di tal professione, ed intrapresolo con moltissimo successo, e più che probabile speranza di sempre maggiore; quando, non per altro che per quello stimolo provato da certi ingegni non ordinarj di non potersene stare ristretti in un solo ordine d' idee, e di voler penetrare sempre più oltre nel campo dello scibile; lasciata l' avvocatura, si pose tutto nello studio della medicina. Il quale studio, e per se stesso e per quelli da cui dev' essere preceduto ed accompagnato, è puranco nel suo esercizio medesimo, più affine assai, mi sembra, alla qualità e al movimento dei pensieri necessarj nell' alta letteratura di quanto possa esserlo lo studio delle leggi, considerato specialmente nella sua pratica applicazione; mentre il primo si aggira del tutto intorno a ciò ch' è intrinseco all' uomo, quando l' altro gli sta più o meno vicino, ma pur sempre al di fuori: onde non pochi furono i medici, di cui rimane distinta memoria anche come di valenti letterati; tra' quali si possono ricordare p. e. un Fracastoro, un Redi, un Haller, un Darwin, un Amstrong, un Pignotti e varj e varj altri. E se nella giurisprudenza il Lomonaco aveva avuta la fortuna di udire i precetti ed i consigli d' un Mario Pagano; nella medicina, potè fare altrettanto di quelli di un Domenico Cirillo. Volle percorrere l' ampiezza di ambidue questi studj; ma come, dopo alcun anno, abbandonò l' esercizio dell' avvocatura, così non intraprese giammai quello della medicina. La volle percorrere una tale ampiezza soltanto,

ripeto, per inoltrarsi quanto più gli fosse conceduto nello scibile; ed avere quindi aperto dinanzi un più vasto campo, da cui sorgessero, e sopra cui si movessero le idee della sua mente, gl' idoli della sua fantasia. E ben l' ottenn' egli un tale proposto: e già la sola lettura delle opere sue, anche senza altrui testimonianza, sarebbe più che bastante a provarlo.

È grande in esse la varietà delle cognizioni e dell' erudizioni; grandissimo ad un tempo l' abito che mostrano nel loro autore ai profondi pensieri e alle nobili immagini. Il qual abito sarebbe stato impossibile a lui, come fu e sarà sempre ad ogni altro senza il possesso di quelle. Mentre (e continui pure il pregiudizio comune contro lo straordinario potere della memoria, che lo reputa in danno di quello dell' immaginazione e dell' intelligenza); mentre, non saprei come figurarmi gran forza di fantasia e di pensiero, che non sia prodotta, alimentata e sostenuta da forza grande di memoria. Le biografie di tutti gli uomini di ogni secolo e d' ogni luogo, che furono degnissimi di particolar nota per la prima, sono là per dirci che nol furono meno ad un tempo per la seconda. E così dev' essere; perchè la fantasia ed il pensiero da che altro, se non dai fatti di vario genere possono trarre le mosse, ed acquistar vigore per inoltrarsi quanto più ad essi è dato nel loro cammino? e dov' altro ritornare se non che ai fatti medesimi? Ben' è il vero, e lo si è veduto spesso, e tuttavia lo si vede non di rado, che molti non hanno potenza di sollevarsi oltre i fatti, e si contentano della raccolta di essi; e tanto più quanto avvenga loro di poterla far maggiore. Ciò però non significa altro, se non che si può possedere, e in gran numero, materiali, senza aver abilità di costruire edifizj; ma sarà pur sempre vero, che per costruire questi, è necessario il possesso di quelli.

Accennai testè, insieme alla forza del pensiero, anche a quella dell'immaginazione. Questa pure non fu scarsa nel Lomonaco: il che mi è dimostrato soprattutto dall' uso frequente ed ancor più dalla qualità delle metafore ch' egli adopera. E continui pure, ripeterò altresì in tal proposito, il pregiudizio comune, che quando una tal forza giunga ad un certo grado la reputa in danno di quella del pensiero medesimo. Io dico invece, e credo dir bene, che non vi può essere fecondità alcuna di creazioni o d' invenzioni, senza l' opera grande dell' immaginazione, che fu sì attiva nei più grandi filosofi e scienziati antichi e moderni, e che anima ancora a loro insaputa tutti gli spiriti creatori ed inventori dei nostri giorni. Sì, aggiungerò anch' io, l' immaginazione, non ostante gli sdegni di quella turba di mani d' opere, che credono edificare scavando pietre, o tut-

t' al più tagliandole ed apparecchiandole, non ostante alle loro pretensioni, che vorrebbono ridurre gl' ingegni superiori alla sola contemplazione passiva dei fatti; si, l' immaginazione sarà sempre una delle leve più potenti delle intelligenze; quella che dà loro le ali, e le fa volare di tanto sopra i pazienti particolari osservatori. E già vedete, che nella povertà delle sue espressioni, il buon senso del genere umano attribuisce a Dio il titolo di sommo geometra, e quello ad un tempo gli attribuisce di sommo poeta.

Ma quanto qui, trattovi dal soggetto, accennai intorno alla memoria ed alla immaginazione, sarà da me espressamente, e quindi più ampiamente ragionato in un Discorso *sulla forza del pensiero*, che sottoporrò in altra occasione al vostro giudizio; e farà seguito a quello *sulla forza umana*, e a quello *sulla forza dell' animo*, che già ebbi l' onore di leggere dinanzi a voi, o signori, negli anni scorsi (1). Or continuando, dico essermi anche piaciuto, che queste opere del Lomonaco comparissero a dare una nuova smentita a quelli che asseriscono (e vennero anche già da poco a ripetercelo, e a quali rispondere direttamente sarebbe non solo soverchio, ma ben anco vergognoso) una nuova smentita a quelli che asseriscono, gl' ingegni italiani essere più atti alle arti del bello che alla profondità ed estensione del pensiero; quand' egli, il Lomonaco, comparve, e non indegno, ad accrescere il numero di quei grandi pensatori e maestri in filosofia a tutto il mondo, e quindi spero anche alla Francia, che furono un S. Tomaso d' Aquino, un Campanella, un Telesio, un Bruno, un Vico, un Filangeri, un Genovesi, ed altri ed altri ancora, appartenenti a quell' estrema parte d' Italia, dove, per le istituzioni del tempo in cui vissero e per il clima, se pur fosse vero quanto vanno predicando quelli che c' invidiano anche il poco di bene che non è in loro potenza di toglierci; dove, dico, si avrebbe dovuto meno aspettarseli.

Voglio aggiungere, ch' essendomi assunto di parlare intorno a lui, assai mi piacque altresì, che il Lomonaco sia venuto ad aggiungersi anch' egli al numero di quegl' italiani i quali preferirono la disagiata e per varj modi più o meno burrascosa vita che, pur troppo, generalmente sogliono procurare a' suoi cultori in Italia i gravi ed alti studj letterarj; preferirla, dico, alla comoda, talvolta ricca, e certo sempre molto meno agitata, di cui fa pur anch' essa generalmente dono a quanti professano un abile e riputato esercizio nell' opera pra-

(1) *Memorie dell' I. R. Istituto veneto.* Vol. III e VII.

tica delle leggi. Onde, a cagione di ciò, collocossi anch' egli, tra gli ultimi per il tempo, ma non così pel merito, nella bella e non breve serie di que' nomi, tra' quali rifulgono splendidissimi quelli di un Petrarca, d' un Ariosto, di un Tasso, d' un Varchi, di un Poleni, di un Eustachio Manfredi, di un Francesco Maria Zanotti, di un Antonio Genovesi, di un Pietro Verri, d' un Alessandro Marchetti.

V.

E già la burrasca nella vita di quest' uomo cominciò ben per tempo. Siamo nel 1799 : siamo nel reame di Napoli : non occorre aggiunger altro. Ed il Lomonaco stesso, in uno scritto che non guari dopo, essendo altrove, pubblicò, già in parte narrava le vicende della capitale di quel regno, in quell' epoca tremenda. Niuno cerchi in tale suo scritto nè lingua nè stile; è più che impura la prima, è più che scorretto il secondo: egli migliorò alquanto e l' uno e l' altra poscia. Ma, se a compensare di questi difetti, certo gravi per uno scrittore, basta l' importanza somma dei fatti narrati, e ciò che tanto di lode merita nell' uomo, l' ira generosa con cui si narrano, se ne avrà un buon compenso. Ed anche varrà forse il trovarvi certi particolari che invano si cercherebbero nelle storie posteriori. Vi si potranno pur leggere molti dei più distinti nomi tra quelli che le straniere seduzioni, o gli alti pensieri loro proprj, o un troppo vivo sentimento, o l' altrui malvagità condussero ad uno sciagurato fine. Mio Dio ! Che lunga lista! e quali nomi ! Uno dei più grandi ammiragli del secolo, il principe Carracciolo : uno dei meglio scrittori, guardato con amore e rispetto grande da tutti, Mario Pagano : uno dei più valenti filosofi in medicina, il cui nome andava celebrato per tutta Europa, Domenico Cirillo : un esemplare di preti cattolici, nelle morali e nelle canoniche versatissimo, Francesco Conforti : un modello di oratori, e per ingegno e per eloquenza e per cuore, Vincenzo Russo : e quanti altri ancora, che le doti della mente e quelle dell' animo facean degni d' eterna memoria ! Tra' quali sarebbe pure stato quell' uomo, a cui tutto il mondo portava un immenso affetto pel nuovo incanto delle sue melodie, Domenico Cimarosa, se dopo avere sofferti indicibili strazi per più che quattro mesi in carcere, non ne fosse stato tolto di forza, s' indovini da chi? dai Russi; onde se ne venne a morire poco dopo di crepacuore qui in Venezia.

Mi piace altresì che il Lomonaco abbia tenuto registro in questo suo scritto anche di alcuni vilissimi ed abilissimi strumenti di quelle non so se io dica

vergogne od infamie o sciagure, o con qual altro nome me le chiami: tra quali voglio pur io qui ricordare uno Speciale e un Guidobaldi. Oh, sarebbero certuni in troppa fortuna, se potessero confidarsi di andar confusi nella generalità delle parole usate da chi scrive contro queste maggiori e più stomachevoli deturpazioni della natura umana! No, bisogna vincere il ribrezzo che sente il cuore, bisogna superare la repugnanza che prova la mano stessa; bisogna trarli fuori dalle vagheggiate tenebre, e consegnarli specificatamente e nominatamente all'esecrazione di tutti i buoni che vivono, alle perpetue maledizioni di tutti quelli che verranno. Della qual cosa vorrei pregar molto a non dimenticarsi chiunque si ponga a dettare memorie intorno a cose italiane specialmente dagli ultimi anni del secolo trascorso fino a nostri giorni. Avrà già, com' ebbe il Lomonaco, un efficace conforto al grave incarico, di cui lo prego, potendo ricordare anch' egli, a riscontro di costoro, non tanto pochi di quelli che si mostrarono meglio degni di essere conosciuti e stimati per ciò che più merita, voglio dire, per la costanza nella nobiltà e rettitudine dei loro sentimenti. Gliel daranno un tal conforto anche alcuni giovani; gliel daranno anche alcune donne, le quali, vincendo gli ostacoli tanti della natura, e quelli ancora maggiori della inetta o bistorta educazione, pur fecero, in un modo o nell' altro, una sì bella comparsa anch'esse nei nostri troppi, e troppo lunghi, e troppo sciagurati drammi.

Delle così fatte non ne mancarono alcune neppur a Napoli. E mi basti per tutte la graziosa e bella marchesa Eleonora Fonseca Pimentel; donna più che colta in ogni genere di letteratura; donna virtuosissima, ch' ebbe amicizia molta e lodi non meno, e ben meritate, dagli uomini più distinti del suo tempo, e tra gli altri in singolar modo dal Metastasio; donna, la quale fu sventuratamente distinta allora, e vuol esserlo adesso, da ogn'altra; perchè, dopo essere stata dotta compagna dello Spallanzani negli studj naturali, fattasi compilatrice del *Monitore napolitano*, scontò le generose idee che vi aveva deposte, e la fede prestata alle ciancie straniere per deporvele, le scontò col laccio del boja. Ma io ho anche un motivo affatto proprio dell' argomento di cui ci occupiamo, per nominar lei in particolare. Il Lomonaco, che aveva altresì pubblicata (primo suo lavoro) una traduzione dell' in allora specialmente tanto famoso, quanto sempre dai più non bene inteso, *Contratto sociale* del Rousseau, le era stato collaboratore nella compilazione del detto giornale, ed avrebbe pur dovuto precederla o seguirla sul palco, se un accidente non lo avesse salvato. La giunta

governativa, una di quelle giunte che ne' tempi di così fatti straordinarj commovimenti, si fanno mani e piedi e dorso agli altrui mali pensieri, e ne hanno già tanti di loro proprj, stanca non sazia di vittime, ma imbarazzata a farne strozzare tante altre quante ne aveva già di apparecchiate nelle carceri, si avvisò un bel giorno di comporre una lista di nomi. — Tutti quelli che vi sono compresi rimangano ad essere giudicati (il che quel che significava, non importa il dirlo) ; agli altri concediamo licenza che se ne vadano in perpetuo esilio. — Il Lomonaco manifestamente voleasi inchiuderlo tra' primi ; ma la penna nol permise ; scrisse invece *Lamanica* o qualche cosa di somigliante ; e un tal errore gli die' modo d' uscir di prigione. L' ardente giovane non volea trarne vantaggio ; era quasi in procinto di metterlo in chiaro ; ma i suoi compagni di sventura tanto gli furono intorno, e tanto nel pregarono, ch' ei si lasciò vincere, e tacque.

VI.

Tacque, e partì. Andò prima a Marsiglia, quindi a Parigi, poscia a Ginevra, finalmente a Milano, capitale allora della repubblica cisalpina. Era nel 1800. Quivi, la prima cosa, si mise a dettare quella scrittura sui fatti di Napoli, di cui toccai testè, e pubblicolla sotto il titolo di *Rapporto al cittadino Carnot*, già uno del Direttorio, ministro allora della guerra in Francia. Mirabile la libertà, mirabile la forza, a non dire la furia, con cui scrive questo povero rifuggito tra gli affanni dell' esilio, tra quelli del bisogno, in tempo ed in luogo dell' onnipotenza francese in Italia! Gli strali dell' ira sua giustissima sono volti, è vero, in apparenza contro il solo Mejean : è chiaro però che dovevano andar a ferire anche altri petti di alcuni allora potenti guidatori delle opere di quella nazione.

In Milano, già sotto l' acerbo dolore del primo strale che saetta l'arco dell' esilio, il Lomonaco dovette sostenere ben presto anche quello forse più acerbo che infigge lo strale secondo ; dico, il dolore di provare come riesca salato lo pane altrui, e quanto sia calle duro « Lo scendere e 'l salir per l'altrui scale. » Egli, in Milano, andò traendo come poteva sua vita, occupandola in parte a servigio de' tipografi, ed in parte nel dar qualche lezione di varie materie presso a private famiglie. Non tanto però gli fu mestieri in questo di occuparla, che siagli stato tolto di dettare in quei primi anni tre solenni opere ; delle quali : *Analisi della sensibilità e delle sue diverse modificazioni, considerate relativa-*

mente alla morale ed alla politica, la prima: *Le vite dei famosi capitani d' Italia,* l' altra: *Le vite degli eccellenti italiani,* la terza. Queste tre opere, che formano nella seconda edizione sette non piccoli volumi, basterebbero bene a mostrare quanta fosse l' estensione e l' altezza dei pensieri nell' autore, e quanta abbondanza egli avesse e varietà di erudizioni, sia nelle materie filosofiche, sia nelle letterarie, sia nelle militari, come nelle storiche, in ispecialtà d'Italia; e quanto amore egli portasse a questa sì sventurata parte d' Europa, verso cui tenne incessantemente rivolto l' animo.

Certo abbondano, ripeto, queste sue opere di pregi; ma non mancano altresì di difetti, specialmente nella forma. Certo abbondano d' alti pensieri, di belle immagini, di nobilissimi sentimenti; ma non vanno però senza qualche opinione, nella quale molti (e tra questi, confesso di trovarmi in parte io medesimo) devono essere ben lungi di potergli andare d' accordo. Que' sommarj a' quali accennai di sopra, ed in cui mi proposi, come già dissi, di entrare alquanto in alcune particolarità intorno al contenuto delle suddette opere e delle altre che nominerò appresso, specialmente per ciò che riguarda il pensiero e il sentimento, varranno a dare, io spero, qualche prova di tali mie affermazioni.

VII.

Or, ritornando alle vicende della vita dell' autore, dico ch' eravamo allora ben lontanissimi da quel tempo in cui la persona di un valente professore si riputava tanto utile, anzi necessaria persona, che un Pier delle Vigne, gran cancelliere di Federigo II, trovò mestieri di scrivere un' eloquente epistola al pubblico e agli studenti dell' Università di Napoli, per dar ad essi qualche consolazione nella morte di Gualtieri grammatico; (non è bisogno ricordare qual ampia materia di studj abbracciavasi a quel tempo sotto questo nome); mettendoli soprattutto in sicurezza, che non si ommetterebbero cure di sorte alcuna, per far in guisa che 'l mondo di sua mancanza s' accorgesse quanto meno fosse possibile. E già eravamo pur lontani da quel tempo nel quale, anche senza andare in tali singolarità, degnissime dell' animo di un Federigo II e di quello di un Pier delle Vigne, i governi generalmente ponevano un' importanza, tanto grande quanto giusta, nel grado di professore; il quale non competeva se non a quelli ch' erano prescelti ad insegnare nelle Università. Di che soprabbondano le prove: e la sola repubblica di Venezia basterebbe a darne più che molte.

Tra cui mi piace ricordare la varia e lunga contesa da essa sostenuta con Luigi XII; il quale, venuto in possesso dello Stato di Milano, richiamava ivi da Padova, ov' era professore di giurisprudenza, il suo famosissimo suddito Filippo Decio: e la Repubblica, non ostante le sollecitazioni del Decio stesso, e quelle ripetute e pressantissime dell' ambasciatore francese, non volle mai concederlo. Onde, Giovanni Rucellai, che trovavasi allora qui in Venezia, io potrò, disse, raccontare un giorno a Firenze, che per il solo Filippo Decio, ho veduto caldamente e lungamente contendere un re di Francia e la Repubblica veneta. Eravamo, ripeto, ben lungi da quel tempo; ma non peranco giunti a questo, in cui il grado e quindi il titolo di professore è sì sterminatamente diffuso, che non trae seco alcuna opinione di credito; ed in cui l' insegnamento stesso nelle Università non è tra le cose che richiamino in generale la maggior attenzione dei governi: onde il modo dello scegliere gli uomini che vi si prepongono è a un di presso affatto eguale a quello che si adopera per tanti altri e ben diversi uffizj. Io non dico, che per ciò uomini di gran valore non si trovino qua e là talvolta ad occupar le cattedre: mi sarebbe agevole di accennare ad alcuni esempj lontani; soprattutto agevolissimo di farlo ad alcuni vicini: ma sono fortunate, direi quasi fortuite eccezioni individuali, che provano piuttosto in discapito che in favor della regola. Nell' epoca invece di cui ci occupiamo, il merito grande, non poscia venuto, ma già prima acquistato; e l' opinion pubblica, non dopo a lento formatasi, ma già innanzi esistente, ed indicante essa medesima l' uomo; nell' epoca, dico, di cui ci occupiamo, un tal merito, una tale opinione vi entravano ancora per più che qualche cosa. E però credo tuttavia buono argomento in favore del Lomonaco, se in detta epoca, ei fu nominato professore a Pavia; a Pavia, ancora splendida pegl' illustri uomini che ad insegnare nel suo studio furono collocati dalle cure di un Firmian, dai decreti di una Maria Teresa, e da quelli specialmente del degno fratello di Leopoldo, del grande e sì spontaneo iniziatore di tante filosofiche e liberali istituzioni, Giuseppe II. Ma questo non è ancor tutto: fu nominato ivi professore di geografia e di storia in quel collegio militare di nuova istituzione, attinente all' Università, ed in quegli anni nei quali tutto ciò che spettava alla milizia era il più alto dei pensieri, la più grave delle cure in chi aveva allora in suo arbitrio la somma delle cose, e però in quanti più direttamente da lui dipendevano.

Di quello ch' ei fece sulla cattedra, ci rimane il suo *Discorso inaugurale*: de' suoi insegnamenti, come propriamente tali, niente ci resta: ma non è diffi-

cile ad immaginare quali dovevano uscire da una mente che aveva dettate le opere a cui accennai di sopra. E nulladimeno, perchè non di rado avviene, che l'uomo insegnando dalla cattedra, o per difetto di locuzione se parla, o per quello d'esposizione se legge, non sempre corrisponda all'idea che si si aveva formata di lui, traendone il tipo dalle opere sue; e nulladimeno, dico, sono contento di avermi procacciata in questo proposito la testimonianza di alcuni che non ha guari vivevano o che tuttavia vivono; tra' quali ultimi, ad onore di questa mia fatica, nominerò il valente Del Chiappa, che trovavasi ne' suoi cominciamenti a professare in Pavia nel tempo stesso che il Lomonaco faceva ivi altrettanto; e mi scrisse, ch'egli, come professore, era assai stimato, perchè dettava le sue lezioni (adopero le stesse di lui parole) con ingegno acceso e sapiente.

VIII.

Tra il 1807 e 1808, il Lomonaco die' fuori un'altra solenne opera: *Della virtù militare.* La qual opera non voglio tacere che in alcune notizie biografiche intorno ad esso la trovai confusa col sopraddetto suo *Discorso inaugurale:* tanto poco se ne sa intorno a questo sventurato scrittore anche da quelli che pur un poco si occuparono di lui! Essa, quest'opera, che forma un volume di non piccola mole, che agita quasi sempre filosoficamente una materia appena qua e là di volo ed empiricamente toccata (intendo per rispetto alla virtù) da' precedenti scrittori; e che l'agita, volgendone in ispecialtà le applicazioni alla sua tanto diletta Italia; essa, quest'opera, mi offrì materia, e non tanto breve, ad una parte di que' *Sommarj* di cui toccai più sopra. Ma qui non voglio passar oltre senza notare, che anche in questa, anzi in questa meglio forse che nelle altre, poich'essa per un numero non piccolo di faccie si aggira sopra il medesimo soggetto, die' una prova luminosa l'autore di possedere uno di quegl'ingegni che compariscono non tanto frequenti; i quali intorno al concetto primo e principale del lor pensiero, aggruppano una quantità grande di altri concetti, da esso, quasi da seme fecondissimo, spontaneamente prodotti, e ad esso, quasi per necessarie relazioni, spontaneamente riferentisi; senza che il lettore si accorga d'alcuna malagevolezza provata da chi scrisse nel passare o ritornare dagli uni agli altri.

Le transizioni sono di una grande difficoltà per l'opera della mente, per-

chè ricercano una mente, a dir così, unificatrice: sono di una grande difficoltà per l'opera dell'arte, perchè ricercano un'arte in cui si trovi quanto bisogna per corrispondere il più che sia possibile a così fatta mente. Tale scrittore, qual era il Rousseau, in cui la detta difficoltà tanto poco anzi nulla apparisce, che non potrebbesi nelle sue opere effettuare una divisione in capitoli che portasse seco una certa ben definita disgiunzione o separazione della materia; ne parla anch'egli, confessando quanto gli costassero a ben farle, e nel lavoro interno dell'anima, e nell'esterno della penna. La qual cosa mi piace di avere qui un poco toccata, anche perchè se ne faccia riscontro con quelli che mandano fuori pur grossi volumi; ne' quali il titolo ben poco si rapporta alla maggior parte dei pensieri che vi sono contenuti; e questi si legano tra di loro, perchè il torchio li ha impressi nella stessa faccia; e le faccie si legano, perchè il torchio le imprimeva nello stesso foglio; e i fogli, perchè l'ago li univa a formarne un volume.

Anche mi piace, poichè mi trovo in proposito d'argomento che riguarda la milizia, anche mi piace di ricordare qui, col dovutogli onore, il nome di un altro illustre italiano, il cui merito è caduto pur esso quasi nell'obblio; nel quale taluno, anche da ultimo, co' suoi scherni, si sforzava pur di tenerlo. Io dico il nome di Francesco Algarotti, che dopo aver egli, e nell'età di vent'anni, fatto generalmente conoscere all'Italia i trovati del Newton, e fattosi conoscere egli medesimo all'Europa, con quegli eleganti suoi Dialoghi dell'ottica, e dopo altri suoi scritti degni di nota, die' fuori le *Lettere militari*, a cui successero i *Discorsi intorno alla scienza militare del segretario fiorentino*. Rispetto alle quali opere, di cui tanto, senza pur nominarle al loro solito, si giovarono specialmente i francesi che impresero a discorrere sopra tale argomento; rispetto alle quali opere, io non voglio qui accennar ad altro, se non che nel primo dei suddetti Discorsi, essendo esso diretto a mostrare la ricchezza della lingua italiana in parole militari; tanta con sua bell'arte; (richiedendolo il proposito, e senza che egli avesse punto di quella continua, smaniosa e ad ogni passo ricercata affettazion parolaja, che può ben sbalordire qualche inesperto, ma che infastidisce ognuno il qual sappia quant'essa contenga di vizio, e di vizio anche assai assai agevole a farne pompa); tanta di questa nostra ricchezza in parole militari, con sua bell'arte, io diceva, l'autore ne sfoggia, da far ben vedere, che si può da noi scrivere con proprietà e purezza di voci e frasi tecniche, tratte da classici autori italiani, senza aver ricorso a' forestieri; ai quali, precipuamente in così fatta materia, sogliono i più tra noi ricorrere; quando la materia stessa eglino

la ebbero in gran parte da noi medesimi; ed in ispecialità quella che riguarda l'architettura militare; nella quale gl' italiani è già provato che furono maestri a tutti. Oh, conserviamoci almeno la proprietà della lingua!: proprietà tutta nostra; sola proprietà veramente nazionale italiana; sopra la quale, ove noi stessi nol consentiamo, anzi non vi concorriamo noi stessi, niente varrà giammai interna od esterna potenza o forza od opinione o fortuna od astuzia altrui.

IX.

Dopo l'accennata opera sulla *virtù militare*, il Lomonaco si diede a comporne un' altra, che pubblicò sul finire del 1809; e fu quella la quale legossi maggiormente, a dir così, colla sciagurata vita di lui, anzi coll' atto più solenne e tremendo, e che fu pur l' ultimo di essa. Ma prima mi è mestieri dire, che un certo numero di nemici egli si aveva procacciati colla sua nomina alla cattedra: poichè tal' è la misera condizione di noi uomini, che nel maggior numero di quelli i quali aspirano al possesso d' un uffizio o di un onore, e se ne reputano degni, sorga un certo sentimento d' invidia, non mai disgiunto in alcuni da un più o men forte stimolo d' odio, contro chi lo potè giustamente ottenere. In Italia, è pur troppo necessario di aggiungere, che non vedeasi volentieri da molti un napolitano innalzato ad una cattedra in Lombardia, quasi la si avesse fatta occupare da uno venuto da terra straniera; ed è questa la somma di nostre sciagure o colpe, e al tempo in cui mi riferisco, lo era assai più; mentre si guardano tra loro come stranieri tanti e tanti di quelli che non trassero i natali in una delle provincie comprese sotto il medesimo nome nei varj stati d' Italia. E già da per tutto, ove pur non sia questa vergogna, ed anche senza l' acquisto di qualche onore o di qualche uffizio ambito da più che alcuni, basta bene; e le biografie di tutti i preclari uomini sono là per comprovarlo; basta bene pur un ingegno distinto, per attirarsi da molti ed invidie e malevolenze.

Deggio poi altresì soggiungere, che il Lomonaco stesso dava talvolta alle invidie e alle malevolenze medesime una certa cagione di porsi in atto; quasi ch' esse non avessero abilità di trovar cagioni ad attuarsi sempre, o piuttosto d' inventarne sempre abbastanza. L' anima sua non era di quelle delle quali ad ogni piè sospinto se ne trovano tanto frequenti, e che, a guisa delle banderuole, acquistano un diverso moto, e secondo il moto diverso, mostrano una diversa faccia ad ogni mutar di vento: ma ben di quelle poche che, ferme nei loro pro-

positi, non si lasciano scuotere nè anche dai più rapidi e forti rivolgimenti delle cose esterne; e purchè coscienza, « la buona compagnia che l'uom francheggia » non li garri, alla fortuna nella guisa che vuole sono presti, e lasciano pur ch'ella giri sua ruota « come le piace e 'l villan la sua marra. » Onde questi, se pur cercano anche talvolta d'infrenarsi, non però così sanno o possono o vogliono farlo, che spesso del loro intimo pensare e sentire non ne traspiri più che molto. E più che molto del suo intimo pensare e sentire, soprattutto intorno al miglior modo in generale dei reggimenti civili, e a quello in particolare ch'ei teneva poter essere più buono per l'Italia, traspirava dalle parole del Lomonaco, in ispecialtà sulla cattedra; dove sì frequenti occasioni gli davano le storie, ch'eran una delle materie obbligate de' suoi discorsi, a dimenticarsi o a non curarsi spesso che dalla liberalità dei governi, poco innanzi qua e là goduta o pretesa godersi, era passata una sì gran parte d'Europa sotto l'autocrazia del primo Napoleone. Due o tre volte, per tal fatto, egli ebbe a ricevere delle gravi ammonizioni dal ministro della guerra del così detto regno d'Italia, da cui direttamente dipendeva; e già era manifesto essergli venuto da vario tempo molto meno il favore di cui godeva sul principio del governo: nè è mestieri, io soggiunga, che per tal diminuzione, gli fu scemato pur quello di quanti, solcando l'ondoso mare della vita, si lasciano trar a rimurchio dalle barche governative; e per lo stesso motivo, accresciuta la baldanza de' suoi invidiosi, de' suoi malevoli.

Fu in tal epoca ch'egli si diede a comporre l'ultima delle sue opere; la quale pubblicò sul finire del 1809; ed ha per titolo: *Discorsi letterarj e filosofici*. Dell'importanza dei varj pensieri e sentimenti di cui abbonda anche questa sua ultima fatica, ebbi già occasione d'accennare qualche cosa quando mi occupai espressamente su tal proposito in uno di que' Sommarj, i quali potrebbero servire, ripeto, di appendice al presente discorso. Or qui mi basta, ch'essa più d'ogni altra si risente del carattere in generale assai sdegnoso dell'autore; si risente soprattutto dello stato in cui trovavasi l'anima sua nel tempo quando la dettava. Fu stampata in Milano, e dal Silvestri; onde mi bisogna credere, non senza l'assenso di quella *Delegazione alla stampa*, in cui erasi mutato l'inviso nome di *Censura* (già vecchio costume, in certi rivolgimenti di tempi, il cambiarne i nomi, pur lasciando o ritornando, od anche peggiorando le cose). Ciò non ostante, alcune indoli di donne, intorno alle quali egli, il Lomonaco, fece un particolar soggetto di discorso in quel suo libro, e

gli uomini a moltiplici faccie, e gli scioli orgogliosi, e i letteratucci pedanti, petulanti, intriganti, ed altri ancora, contro a' quali tutti erano sovente lanciati gli strali dell' ira sua, talvolta, è vero, nello esprimersi un po' troppo eccessiva; e insieme con questi generalmente i suoi invidiosi, i suoi malevoli non mancarono di destarne un gran romore. E trovandovi qua e là certe allusioni che si trovano da per tutto e sempre, quando si cercano solo per trovarle, e facendone rapporti, e cianciandone senza misura nè fine, indussero il governo a far iscrivere, non so da chi, un violentissimo articolo, stampato quindi nel *Giornale italiano*, foglio uffiziale, diretto allora dal Gherardini, in cui si discredita quest' opera sotto ogn' aspetto in guisa che non saprei di qual altra si potesse farlo di più, che pur fosse quanto si voglia filosoficamente, moralmente e letterariamente pessima: nè ciò loro bastando, indussero altresì nello stesso tempo chi poteva ad impedirne lo spaccio.

E qui non voglio passar oltre senza notare, che anche in tal fatto è già accaduto quanto accadrà pur sempre per necessario effetto di questi interdetti; a' quali un editore, mi ricordo, applicava la forza più grande di quanta ne possano avere mai gli *annunzj* a procurare un sollecito e copioso smercio alle opere della penna. Ed invero, anche questa del Lomonaco, se prima destò in alcuni un certo desiderio di leggerla, dopo l' interdetto, destollo in più che moltissimi; se prima la si potea comperare per tre o quattro franchi, si si reputava quindi fortunati di poter acquistarla a più che venti. Dispiacerà forse di farlo; ma bisogna convenirne: è una proprietà intima inestinguibile della natura umana: la proibizione dei libri, anche rispetto a quelli che hanno poco o niun merito, produrrà sempre ciò ch' è accaduto a Roma, quando Nerone fece abbruciare i libri di Fabriccio Vejentone. Furono ricercati e letti, dice Tacito, sinchè v' ebbe del pericolo a farlo; ma quando è stato libero di averli, niuno se ne curò più. Si può anche leggere quello che narra egli stesso a proposito dei libri di Cremuzio Cordo condannati al fuoco dal Senato. Che se gl' interdetti giovano tanto ad opere, ripeto, di poco o niun merito, quali sembra che fossero queste ricordate dallo storico latino, e quali noi stessi ne abbiamo, non sono molti anni, vedute pur tante, e tuttavia ne vediam sì di spesso; ben si può pensare quello che operino, quando cadano sopra opere che per il loro merito intrinseco, con maggior lentezza si, e presso ad un numero minore di persone, pur si sarebbero aperta una più o men ampia via da loro medesime. Lo si vide p. e. pochi anni prima del tempo a cui accenno, nei *Romani in Grecia* di Vit-

torio Barzoni; il quale ha ben dovuto più che presto rifuggirsi a Malta; ma tutta l' onnipotenza dei Francesi allora in Italia non potè fare, che a centinaja a centinaja copie non se ne diffondessero anche ne' luoghi da essi medesimi allora occupati nell' Italia stessa. Ritorniamo al Lomonaco.

X.

Il mondo in generale vede assai poco, e poco più può congetturare della vita d' alcuni di quelli che sono dominati da una straordinaria potenza di fantasia. Tal vita si compie pressochè tutta negl' intimi recessi del loro interno; ed eglino unicamente ne sono attori e spettatori ad un tempo. Qualunque vivere d' uomo che si presenti il più svariato e fortunoso per mutazion di paesi, d' avventure, di condizioni sue proprie, non avria sembianza che d' una specie di quiete se lo si potesse mettere a riscontro con quello d' alcuno di questi. È la selva incantata del Tasso. Or date loro altresì una pronta intelligenza, una forza grande di astrarre ed altrettanta di rimanere più o meno a lungo speculando nelle loro astrazioni; date loro una passione irresistibile per tutto ciò che vagheggiano come giusto e bello; un cuore eccessivamente affettuoso; un' anima sdegnosa, e nervi resi ancor più mobili e di continuo oscillanti per le lunghe e gravi fatiche degli studj; e quasi il consorzio umano, già sempre e ovunque tristo qual è, non bastasse loro, poneteli in certi particolari avversi casi di luoghi e di tempi; nell' attrito delle invidie, delle calunnie, delle persecuzioni; bisognosi, non ch' altro, di un tozzo di pane; senza famiglia, senza intimi amici, fuori del luogo natale, soli, abbandonati a loro medesimi; e poi pensate al tremendo dramma che dev' effettuare nel loro interno quella gran maga della fantasia, che li tiene sotto il suo assoluto dominio, e a cui è vita il violento agitarsi e riagitarsi perpetuo. Certo, il maggior numero delle cose che tal dramma rappresenta non ha talvolta niente di più reale che i fantasmi; ma intanto esso non è meno una verità per loro; e quindi non è meno potente a metterli e tenerli quasi di continuo in tali angustie ed afflizioni, che sono affatto sconosciute al resto degli uomini.

Accennai testè alla selva incantata del Tasso. Ma qual selva incantata la sua propria fantasia non avrà ella costretto questo grand' uomo a portar in giro egli medesimo dentro di sè stesso! egli, sì variamente balestrato qua e là dalla fortuna! egli, premuto dalla fatale necessità di dipendere sovente dagli

altrui e non sempre buoni voleri! egli, pur ridotto talvolta in sì fatto estremo di miseria, disonorevole soltanto a' suoi pretesi protettori, da dover mettere in pegno, per la meschina somma di 23 lire, camicie e lenzuola e fin' anco la giubba di suo padre! Egli, tanto offeso nel giusto suo amor proprio di scrittore e poeta, che udì a scagliarsi contro da lungi acerrime e non meno incivili censure, e da vicino si vide preferito, non solo un Guarini, ma ben anco un Pigna! egli, sì offeso nella potenza del suo intelletto e nell' aggiustatezza del suo giudizio, che si trovò pur racchiuso nello spedale de'pazzi! La vita altresì tanto disagiata e del pari avventurosa di Gianjacopo Rousseau diè pur frequenti occasioni ed ampia materia alla potentissima fantasia anco di questo da spiegare tutta quanta sua forza, e da impadronirsi di esso in guisa, che per alcuni fatti, tali a cui il maggior numero non avrebbe forse niente badato, che per molti non sarebbero stati forse niente più capaci se non a muovere in loro un breve sdegno, ed in altri non più forse prodotto che un alzar di spalla; che per alcuni tali fatti, io dico, la sua fantasia il tenne, negli ultimi anni di lui, sotto il forte, continuo ed irresistibile dominio dell' immagine di una lega formatasegli contro per biasimarlo ed odiarlo. Gliene faceva vedere di continuo le prove nelle altrui parole ed azioni che interpretava a suo modo: gliele faceva vedere specialmente nei silenzi e nelle ommissioni: facevagliele trovare da per tutto. E quest' opera, nella massima parte, di sua fantasia, lo portò tant' oltre, che gli si rese affatto intollerabile la vita. L' autore dell' *Emilio*, l' autore della *Nuova Eloisa* non aspirò ad altro premio che all' amor de' suoi simili; e disperato di ottenerlo, e credendosi anzi pagato del contrario, in particolare da quella donna ch' egli aveva innalzata all' onore di essere la compagna della sua sorte, si affrettò di abbandonare questa ingrata terra.

Il Lomonaco pure, facendo sè ingiusto contro sè giusto, volle decretarsi egli medesimo il tempo e il modo di sua partenza dal mondo. In un giorno che non trovo ben determinato, ma che fu certo nel settembre del 1810, egli, essendo a Pavia, entrò nel caffè detto del *Barilotto;* chiese un bicchier di vino; e quindi uscito della porta di *Borgorato*, fatti in fretta alcuni passi, misesi a correre precipitosamente, gettando altissime grida; e giunto alla sponda di una fossa del *Navigliaccio*, ch' è a ponente della città, vicino a S. Mauro, si trasse l' abito, e vi si slanciò dentro. Fu udito e visto da alcune donne; ed un soldato che passava per di là in quell' istante, gettossi nell' acqua limacciosa, tentando di salvarlo; ma non ottenne l' effetto, e quasi vi lasciò la vita anch' egli.

Ecco la lettera che scrisse, forse il giorno medesimo, e mandò a suo fratello. — Caro ed amato fratello! Dopo l' epoca della stampa del mio ultimo libro, io sono stato il bersaglio delle maldicenze, della delazione la più infame e della calunnia. I miei fieri implacabili nemici, non contenti di tutto ciò, muovono ora tutte le macchine per perdermi; sicchè, profittando degli esami pubblici che i signori allievi di questa R. Scuola devono fare, s' ingegnano che riescano a mio svantaggio, per seppellire nella vergogna il mio nome. Le prove che ne ho son tanto lampanti che non ammettono alcun dubbio. Ma perchè ciò non accada, ho deliberato di troncarmi la vita. Se vissi sempre indipendente e glorioso, voglio morire indipendente e gloriosissimo. So che questo passo fatale vi amareggierà immensamente; ma collo fato non lice dar di cozzo. Spero che gli autori della fine de' miei giorni avranno l' umanità di farvi pervenire un po' di danaro ed un orivolo d' oro, frutto de' miei lunghi assidui studj. Saluto voi, i cari nipoti, la sorella, la cognata, i parenti, gli amici. A rivederci nell' altra vita. —

XI.

Nelle poche linee intorno a quest'uomo, premesse al nono volume dell'edizione di Lugano, e tolte dall' articolo biografico della Ricciardi, se pur non sono, come credo, l' articolo medesimo, si annovera pure un amor infelice tra i motivi che lo spinsero al tremendo atto. Tutte le mie ricerche peraltro, e furono molte, non valsero a mettermi al caso di potere affermar nulla intorno a tal fatto. Tengo, è vero, alcune poche lettere come scritte dal Lomonaco alla donna che si dice da lui infelicemente amata; ma non si sa di questa nè il nome, nè il luogo; ma le lettere sono copie di copie, nè si accenna ad autografi che abbiano mai esistito. Altrettanto si dica di alcuni brani, i quali pur possedo, e si asseriscono scritti da lui, poco prima di darsi morte, in un suo scartafaccio, che niuno seppe mai indicare dov' esso si trovi o si trovasse, e neppur se abbia mai avuto esistenza. Aggiungo, che sia nelle lettere come nei brani, e lingua e stile mi sembrano tutt' altro che quelli del Lomonaco. Onde, ogni cosa mi fa ritenere, che qualcheduno d' ingegno e di cuore, quando il caso di lui die' tanto motivo a discorrerne, specialmente in Lombardia, siesi forse posto a dettare le une e gli altri; e ne sieno quindi allora corse qua e là delle copie, che l' accidente o il voler di taluno ha poscia conservate. Io, per esercizio, dirò così, di studio psicologico, sottoposi a questi scritti alcune brevi note; e separandoli in

tre parti, vi anteposi tre *Prefazioncelle*, che lasciai uscire anche in pubblico nella *Strenna italiana* del Ripamonti pel 1857: ma di essi, poichè ho il più forte motivo di ritenerli apocrifi, mi parve bene di non farne, e non ne feci alcun uso nel presente Discorso.

E d' altra parte, qual bisogno vi era di un amore infelice del genere di cui qui s' intende, per accrescere gli episodj, ed intrigare maggiormente il nodo di quel dramma che si agitava nella fantasia di quest' uomo, e sviluppossi o piuttosto troncossi con sì terribile catastrofe!... Oh, bastava bene l' amore ch' ei sentiva per l' Italia, natogli sino dalla più verde età, cresciutogli con essa, alimentato per qualche tempo da certe speranze, resogli poscia infelicissimo per le nuove sciagure di questo misero paese, che già pochi anni innanzi, prestando malaugurata fede a ventosi o piuttosto infernali paroloni, era stato inabissato in tante stragi e di cose e di genti, che andarono quindi sino alla rapina di quanto in ogni suo luogo aveva esso acquistato per secoli o prodotto di più prezioso in opera d' ingegno e di mano; e vedealo allora tutto più o meno direttamente sottoposto alla forza straniera; ed alcuni de' suoi più nobili membri, che n' erano liberi prima, la Toscana, il Piemonte, lo Stato romano abbassati fin' anco a provincie francesi!... Oh, bastava bene l' amore ch' ei nutriva pei modi di un reggimento civile che fosse degno degl' Italiani; amore anche questo tanto prima lusingato, poscia tanto deluso, che si trovava dinanzi ridotta l' Italia sotto un arbitrio assai peggiore dei precedenti; poichè, se da un lato, era più intelligente, era dall' altro quasi tutto in quello della spada; e sottoposta la si vedeva a tale servitù, che in più luoghi era assolutamente proibito di usare negli atti pubblici altra lingua, che una lingua straniera; e solo per grazia (incredibile a dirsi!) conceduto poscia a Firenze ed a Roma di poter in tali atti far uso qualche volta anche dell' italiana!... Oh, bastava bene infine l' amore ch' ei portava alla rettitudine, al decoro, all' onestà, alla giustizia, alla dignità umana, alla virtù, in breve, tanto ingannato in sua fiducia anch' esso amore, che già vedeva umili e timorose di nuovo quelle fronti stesse le quali facevano testè pompa di andar sì alte e sicure; mutato in servile il linguaggio di molti che lo affettavano poco prima sì generoso ed elevato; le adulazioni, le simulazioni, le doppie faccie tuttavia in trionfo; i gradi, i titoli, gli onori, gli stipendj tuttavia alle preghiere, alle protezioni, agl' intrighi, ai vizi medesimi piacenti od utili ai dominanti; i meriti veri e grandi d' ingegno o d' animo, ma taciti e modesti, spesso non conosciuti, spesso non curati o disprezzati; gl' Italiani, in bre-

ve, ricaduti là d' onde avean sembianza di essersi alzati per un istante; e ricaduti tanto più bassi che per lo addietro, quanto più erano maggiori gli eccitamenti ai loro appetiti, e quanto più rese fumose e lucrose le ambizioni.

Questi tre amori (che a ben pensarvi, non sono che tre diversi aspetti di uno stesso amore) questi tre amori a cui accenno, com' esistenti nel Lomonaco, trovavansi e trovansi, senza dubbio, in tutti gl' Italiani, ne' quali ad una certa elevatezza di pensieri s' accoppiasse o s' accoppj molta nobiltà di sentimenti. Voglio anche aggiungere, creder io che di sì fatti uomini, in ciò che riguarda le loro patrie, per onore della specie umana, non ne sia o sia mai stata penuria grande in alcun luogo od in alcun tempo. Ma quando nel massimo numero di essi vi stanno in tal grado che possono più o meno piegarsi, rassegnandosi in qualche modo alle condizioni perpetue dell' umanità, ed a quelle particolari di certi luoghi e tempi, o tollerarle se non altro; in alcuni rarissimi trascorrono nel fuoco e nella forza di veementi passioni: le quali impetuosamente li portano, senza che guardino nè a luogo nè a tempo, nè a speranze nè a timori, nè a impedimenti nè a pericoli; li portano, dico, impetuosamente a correre verso la meta che il lor pensiero offre ad essi come giusta, che il loro cuore vagheggia come buona e bella. Or tutto il modo del vivere del Lomonaco ci viene narrato da quanti il conobbero di tal guisa da reputarlo uno di questi rarissimi dei quali parlo. E più che le narrazioni altrui, di così fatto numero il mostrano gli scritti suoi; che avendo egli composti e pubblicati in tanto mutarsi di potenza negli uomini e nelle cose, pur s' infuocano dello stesso suaccennato amore; il quale, continuo e forte spirandogli, a quel modo che dentro dettava, egli andò sempre dentro notando, e fuori significando dalla prima faccia del primo all' ultima dell' ultimo. Ne darò un piccol cenno, prima di chiudere, qui appresso: lo si potrebbe vedere più specificatamente in quei Sommarj di cui toccai più volte.

XII.

Intanto consideriamo in quali malagevolezze dovea trovarsi, in ispecialtà allora, una vita di sì fatto tenore, in quali ostacoli, in quali attriti, e come doveano essere riforzati e da lontano diffusi per l' opera della penna instancabile, e non che coraggiosa, arditissima. Si aggiungano le gelosie, le invidie, e peggio, le false amicizie; a tutte le quali produrre è già bastante, ripeterollo di nuovo, il solo ingegno non comune, per quanto modesto e guardingo. « Tosto ch' ebbi

un nome, dice Rousseau, non ebbi più amici, o non ebbi che falsi amici. Da che un uomo ha avuta la sciagura di distinguersi ad un certo punto, a meu che egli non si faccia temere, o non tenga a qualche partito, ei non può più contare sull' equità degli altri a suo riguardo; e sarà molto se quelli stessi che sono più celebri di lui, gli perdoneranno la piccola porzione nel grido che vorrebbono avere essi soli « Dite pure, esclama Montesquieu, (il quale l'aveva provato dopo la pubblicazione delle sue *Lettere persiane)* dite pure, che internamente offesi dalla riputazione di un uomo celebre, molti, a vendicarsene, cercano in ogni guisa di umiliarlo; e che bisogna meritare dei grandi elogi, per sopportar pazientemente quelli che si danno agli altri. » Or tra quelle malagevolezze e quegli attriti e queste gelosie ed invidie ed inimicizie e false amicizie, in cui si trovava a vivere il Lomonaco, mettete una fantasia potente, infrenabile qual era la sua, che ne tragga materiali, e più e più ne crei, da cui componga il dramma incessante che attuavasi nell' interno di lui; e non fia alcuno stupore se questo dramma siesi terminato nella catastrofe, colla quale terminarono il loro tanti altri.

E qui mi bisogna aggiungere, che non piccola parte deggiono avervi avuta anche le acri censure alle quali testè accennavo. Dee poi averla avuta, quasi non ne dubito, anche il ridicolo a cui egli sapeva che non di rado era materia, pegli sfaccendati sciocchi maligni e ciarlieri, il suo vestire più che trascurato, il suo andare solitario, il suo parlar forte con seco medesimo gesticulando, a cui traevalo di frequente il tumultuoso ondeggiare degl' interni forti ed irresistibili movimenti dell' animo. Già sappiamo che per le censure morirono d' affanno i due Scaligeri, Milton, Clerc, Addisson e varj altri. Voltaire, accennando a quelle scagliate contro l'*Atalia* del Racine, adopera queste precise parole: *egli ne fu schiacciato.* Chi legga la vita che scrisse di sè medesimo l' Hume, vedrà raccontate da lui stesso le sue proprie gravi angoscie, conoscerà l' avvilimento profondo nel quale cadde, per ciò che dissero intorno al primo volume della sua *Storia;* onde sarebbesi sentito del tutto scoraggiato, se il miglior incontro del secondo, di cui era già, alla pubblicazion del primo, quasi terminata la stampa, non gli avesse rimesso un po' di cuore. Per le censure e pei sarcasmi de' suoi emoli, non si curò più niente di sua fama e si diede ad una vita tutta scioperata quel vasto ingegno del Pacchiani; di cui ben si disse, che il primo passo nelle fisiche fu un passo da gigante, e quantunque non esattamente giusto, pur aperse la via a molte scoperte, che resero chiari tanti fisici

del nostro tempo. Non si finirebbe sì presto: a finirla, ricorderò che qui in Venezia, Antonio Broccardo morì d' ambascia per le censure dei partigiani del Bembo; per quelle specialmente più che acerrime dell' Aretino; il quale non era uomo certo, che tra un Cardinale opulento ed un povero poeta, potesse esitare, un solo un solo istante, nella scelta.

Or il Lomonaco ebbe censure, ebbe ingiurie, ebbe ridicolo. Che se pur vogliamo far un cenno anche di questo; dirò, che la natura ha creato rimedj pegli acuti dolori dell' uomo; che l' ingegno può resistere all' avversità, all' ambizione, ai pericoli; che la virtù può combattere la calunnia; ma il ridicolo, notalo bene la Staël, il ridicolo trova modo da insinuarsi nelle vie più intime della vita, e minarle con sorpresa. Il famoso pittore Giovanni Le Gros, pel ridicolo sparso sopra di lui dai giornalisti, si gettò nella Senna. Ed io non credo possibile ad alcuno di passare, senza più o men grave suo danno, dalla gloria, o dalla idea o dalla speranza che ne vagheggia, al ridicolo. Da qualunque parte venga l' insulto, si ha un bel procurarsi a disprezzarlo, esso colpisce. Qual cosa è più vile del fango! chi se ne cura! e tuttavia il fango che un biricchino fa spruzzare sopra una veste di velluto, la macchia per sempre, e ne scema, se non ne toglie affatto, il pregio.

XIII.

Ma qui, prima di terminare, e ritornando tuttavia un poco alla vita in generale e alle opere del Lomonaco, non parmi di tacere, che occupandomi di quella e ad un tempo di queste, sono entrato spesso in una considerazione, che ebbi già motivo di fare più volte, leggendo la biografia di qualche valentuomo negli studj. Ed è, quale e quanta sia la differenza tra l' alta letteratura, la letteratura filosofica, e le scienze. Non intendo già volgendo il pensiero a tali cose in sè medesime; d' onde ne risulta non certo difficile la separazion loro, per ognuno che siesi alquanto occupato intorno alla natura dei varj esercizj del nostro intelletto; ed io stesso ho avuto occasione di farne qualche cenno in più luoghi, sia negli *Studj filosofici*, che nei *Saggi Della scienza*. Intendo, allorchè si pensi alla letteratura ed alle scienze, per rispetto agli effetti ben diversi che valgono a produrre nelle condizioni della vita propria di chi professa la prima od alcuna delle seconde.

Quelli che si danno allo studio di queste, non incontrando nel loro cam-

mino nè le passioni degli uomini, nè le forme di governarli, nè le religioni, nè le vicende dei loro tempi, nè, in breve, nulla di ciò che tiene maggiormente, quasi unicamente, agitata l'umanità, possono abbandonarsi in tutta pace alle assidue loro fatiche. Aggiungo, che la profonda meditazione richiesta dal complesso delle gravi scienze, allontana in generale i dotti dal prendere alcuna parte, od almeno dal prenderne una alquanto viva, nei variabili casi del consorzio umano, e fin' anco nei più solenni del loro tempo e del loro luogo. E nulla meglio conviene in certi tempi ed in certi luoghi, che avere uomini tanto occupati intorno alle leggi fisiche, che lascino in arbitrio, senza muover querela in alcuna guisa, l'ordine morale a chi vuole e può disporne. Ma, invece, quest'ordine morale è il soggetto proprio dell' alta letteratura; perchè i pensieri filosofici si collegano necessariamente con tutti, con tutti quanti i sentimenti dell' anima. Non è dunque possibile all' alta letteratura, allorchè si ponga in esercizio, di non toccarli più o meno direttamente in qualche modo. Potrà in certi tempi e luoghi tralasciar di esercitarsi, od esercitandosi, evitare di andar troppo alla scoperta contro quanto muoverebbe taluni a maggiormente risentirsene. Sarà prudenza la sua questa: non disento di concederle un tale attributo. Ma sarebbe certo viltà, viltà grandissima, se contro i dettami del vero, se contro l' intima voce della sua propria coscienza, se contro a quanto vede o sente operato negli effetti, ella si facesse lusinghiera alle non buone passioni, ai tristi ordini civili o morali del suo luogo e del suo tempo, si facesse, in breve, satellite del vizio o della forza. Lode, per contrario, lode grande e giusta, meriterà se senza badare a ciò che le sta d' intorno, o minaccia tra poco di venirle appresso, ella espone coraggiosamente il suo proprio sentimento; e se per farlo, non solo si prevale delle occasioni che le dà la materia, ma di occasioni va appositamente in traccia; mentre deve saper bene, che lo scopo principalissimo del suo uffizio, in qualunque siesi guisa lo eserciti, dall' epigramma al poema epico, da una semplice nota alla più solenne orazione, da questa al più esteso trattato, da alcune memorie alla più ampia storia; lo scopo principalissimo del suo uffizio è quello di più o meno direttamente giovare alla rettitudine dei pensieri, alla bontà dei sentimenti; e quindi all' aggiustatezza dei giudizj, alla moralità delle azioni di tutti gli uomini, e segnatamente di quelli del suo tempo e del luogo suo.

Or io non dubito, che tale fu il principal effetto a cui mirò co' suoi insegnamenti dalla cattedra e colle sue opere il Lomonaco. Di quelli ho detto quanto potevo dirne; di queste ricorderò prima di fuga per tal proposito l' epoche in

cui furono composte e pubblicate. Egli, dopo aver dato in luce a Napoli la traduzione del *Contratto sociale* del Rousseau, e di essere stato uno dei collaboratori di quel *Monitore*, rifuggitosi quindi a Milano, die' fuori, nel 1800, il *Rapporto a Carnot;* da quest'anno al 1806, l'*Analisi della sensibilità* ec., le *Vite dei famosi capitani d' Italia*, quelle *degli eccellenti italiani;* nel 1806, il suo *Discorso inaugurale;* nel 1807, il libro *Della virtù militare;* nel 1809, i *Discorsi letterarj e filosofici.* Basta solo accennare a quest'epoche, il breve cerchio delle quali comprende, come ognun sa, tante sciagurate mutazioni nella fortuna di questa povera Italia, per aver modo di far conoscere, o piuttosto di raffermare con solenne argomento la conoscenza del Lomonaco dal lato più importante per un uomo, e soprattutto per un professore, per uno scrittore; la costanza in quanto egli ripose la rettitudine de' suoi pensieri, e trova quindi la forza de' suoi sentimenti; costanza mantenuta anche contrariando le più aperte lusinghe di utili, di uffizj o di onori; mantenuta anche in faccia al pericolo, anche al danno di se medesimo. Oh, io sono certo, che da chiunque voglia essere informato della guisa onde dettava i suoi insegnamenti cattedratici, o imprenda a leggere le opere sue, questo gran pregio, facendogli perdonare i difetti ch' egli ebbe come uomo, e quelli nell' arte non leggeri, che come scrittore, gli farà por altresì molto affetto nella sua memoria. E tanto più forte vel porrà, quanto più agitando nella mente la storia letteraria di quel tempo, gli sarà agevole di ricordare come furono pochi, ma pochi assai, i professori e gli scrittori, a' quali sia dato di poter tributare la stessa lode. Dico di quei tempi; e qual numero potremmo noi contarne al giorno d' oggi!

Ma il Lomonaco (e parlo or qui di lui soltanto come scrittore; di che le prove ne sono permanenti, e quindi facili, non che possibili, a ciascuno); ma il Lomonaco, quando il popolo dominava od almeno aveva apparenza di dominare, od almeno era mestieri di rendersegli gradito per salire; il Lomonaco non fu mai adulator del popolo; chè anzi in ogni suo scritto, e ne' primi specialmente, il giudicò forse con troppo severa giustizia; e parve ben più che persuaso anche egli di quel che già disse Omero: *fu sempre pazzo il regno di molti.* A' Francesi, potentissimi allora in Italia, non fece mai dissennato plauso; nè mai si astenne che, in un modo o nell' altro, non isvelasse co' pregi molti i vizj altresì non pochi di lor natura; ricordando anch' egli quel che già ne scrissero Cesare e Strabone e Ammiano e Vopisco e tantissimi altri. Dinanzi all'altare del generale Bonaparte, a cui gradini piegavasi pur allora numero sì immenso di ginoc-

chi, e si abbassavano tante teste anco coronate, egli passò oltre con fronte sì elevata e dignitosa, onde prima che montasse sul trono, disse chiaro, e più non disse, se non che per lodarlo, aspetteria di vedere ciò ch' egli farebbe. Montato poi sul trono, lo accompagnò all' Alfieri (e non voglio fermarmi ora ad indagare il recondito motivo che forse lo spinse a dargli una sì fatta compagnia) lo accompagnò, dico, all' Alfieri, come uno dei due più famosi italiani che vivessero di quel tempo; ma non mai nè punto incensollo come imperatore e re. Anzi tanto niente di questo egli fece, che fece piuttosto, per quanto poteva, e non poco, del contrario. L' antipatia che Napoleone nutriva, e manifestò apertissima in più occasioni contro Tacito, a cui dava pur l' accusa di aver calunniato Nerone, com' è adesso, se posso dirlo, un fatto più che storico, così era allora generalmente conosciuta e discorsa. Il suo caldo dialogo a questo proposito con Suard aveva fatto un grande strepito: si ricordava, che Dureau, avendogli detto che traduceva Tacito, Napoleone rispose, *tanto peggio*: si ricordava, che il *Mercurio* era stato soppresso a cagione dell' articolo del Chateaubriand, ov' era la celebre frase, *Tacito è già nato nell' impero*: si ricordava, che Chenier fu tolto alle sue funzioni d'ispettore degli studj, per la sua tragedia, il *Tiberio*, e soprattutto per la sua *Epistola* al Voltaire, in cui si leggevano quei due famosi versi, appunto sopra Tacito, che tuttavia durano in quella di alcuni, e corsero allora per la memoria di molti. Tutto questo e tanto più altro era universalmente saputo e discorso. Ebbene; tutto questo non distolse il Lomonaco dall' accennare spesso, e colla ben dovutagli lode, al grande storico latino, in ispecialtà dove descrive la disciplina dei Catti. Ma v' ha di più. Dominando il primo Napoleone, solito a dire, che i tempi di Roma da Tarquinio a Cesare, non furono che un episodio, e che i veri e legittimi tempi romani non devono ritenersi compresi che negli anni in cui governarono i re e gl'imperatori; dominando il primo Napoleone, che se un po' più copertamente in parole, certo più alla scoperta co' fatti, aveva detto anche egli, *lo Stato son io*; e quindi doveva essere, com' era in effetto, e già si manifestava tanto avversissimo all' Inghilterra; questo scrittore non par mai sazio di lodi verso i grand' uomini che vissero in Roma, e i grandi e sì frequentissimi esempj di virtù in ogni guisa che in generale ci lasciarono i Romani, appunto nell' *episodio* da Tarquinio a Cesare; e così del pari, fra tutti i modi di reggimenti civili, che all' epoca sua vigevano in Europa, egli non ha lode od approvazione per altro modo che per quello degl' Inglesi.

Vivendo in una Italia, che le nostre illusioni, soprattutto le nostre inter-

minabili discordie, e l' astuzia e la forza straniera tenevano anche allora sbranata in tante parti; egli manifesta ad ogni tratto nelle opere sue e vagheggia, come il più diletto de' suoi pensieri, il più caro idolo della sua fantasia, l' indipendenza, e per quant' è possibile, l' unità dell' Italia medesima. Onde, non fu se non illazione legittima di questo sì diletto pensiero, di questo sì caro idolo (io non approvo, Signori, nè disapprovo; io narro) onde, non fu se non illazione legittima, allorchè per così fatta, e forse per più altre cagioni, si mostrò avverso anch' egli ad un antico dominio fermatosi in una parte centrale d' Italia. Ma tra esse cagioni non vi entrava certo mancanza o debolezza nel sentimento della religione; con la quale molti confondono quel dominio, o si danno l' aria di confonderlo. Tanto poco vi entrava, ch' egli era anzi religiosissimo; ma di religion vera; e ne dà motivo di conoscerlo anche in più che qualche luogo de' suoi scritti. Lodator perpetuo della Bibbia; la cui lettura si lagna spesso che sia andata in disuso: lodator perpetuo del Cristo, de' suoi insegnamenti, e della sua vita; quelli sì poco nel generale ascoltati, e questa, da chi forse più dovrebbe, tanto meno imitata: scrittore in materie di scienza filosofica, che abbracciò in tutto la dottrina allora dominante dei sensualisti; ma che, con una preziosa inconseguenza, la rinega poi affatto quando parla del giusto e dell' ingiusto, quando parla della morale, dell' anima, dei premj e dei castighi futuri; in breve, quando parla della virtù.

Da per tutto, egli dispiega il più alto disprezzo contro la turba degli scrittorelli e degli scrivacchianti (e quanto maggiormente nol farebbe poi al giorno d'oggi!); scrittorelli e scrivacchianti che contaminano ad un tempo e letteratura e morale e fin'anco il senso comune: a differenza di ciò che fecero e fanno pur di presente alcuni letterati altresì di vaglia; i quali, tacendo de' vivi scrittori più distinti, o cercando di denigrarli, gettano di tempo in tempo qualche boccon di lode a quelle rane, perchè amano di sentirsene a volgere il gracidare in plauso, e sanno quant'esso giovi a diffondere tra le moltitudini il loro nome; della qual diffusione mostrano sì grande smania, onde ne tentano tutte le possibili vie in guisa ch' essa sembra l' unico intendimento de' loro studj, l' unica meta de' loro desiderj.

XIV.

Tali furono, o Signori, le vicende della vita del Lomonaco : tale l'insegnamento suo : tali le opere di penna a cui si diede : tale il carattere che manifestò, e conservò uno sempre, e come uomo e come professore e come scrittore. Ed a me parve di compiere uffizio buono, e non disutile, tentando di farne rivivere alquanto, dopo il non sì lungo tempo, la pur già quasi nel generale spenta memoria ; perchè niente di meglio e di più proficuo io stimo che possa farsi da chi non ha modo di attuare altrimenti qualche suo degno pensiero in pro' d'Italia, che ricordarle almeno le sue tante e da lei medesima obbliate ricchezze d'ingegno e di mano. Onde, non voglio finire senza esprimere quanto mi sarebbe caro di vedere istituite in qualche sua Università due o più cattedre, non ad altro intese che alla santissima opera di porre sotto gli occhi de' giovani, scavandoli, dirò così, dalla tomba dove giacciono sepolti, e per loro giaccierieno altrimenti pur sempre, come già nel generale e giacquero e giacciono per tutti, tanti e tanti dei nostri tesori, e letterarj e filosofici e scientifici ed artistici. Ebbi l'onore di dirlo già dinanzi a voi medesimi un'altra volta, o Signori, terminando un mio Discorso *sul grado che occupa la letteratura nello scibile* (1), ed ora il ripeto, e non cesserò mai di farlo : il maggior bisogno d'Italia è quello di conoscere sè medesima.

(1) *Atti dell'I. R. Istituto veneto.* Maggio 1855 ; seconda ediz. *Prose e poesie di autori viventi.* Torino 1859.

(*Letta il* 13 *novembre* 1859).

ERRATA — CORRIGE

Fac. 199, lin. 19, in cui . . . cui

ULTERIORI INDIZII

CHE AVVALORANO

LE CONGHIETTURE EMESSE IN ALTRA MEMORIA SULLE POPOLAZIONI DELL' AFRICA CENTRALE

NOTA

DEL M. E. LODOVICO MENIN

Nel giorno 27 agosto dell'anno 1856 io adempiva dinanzi a voi, onorandi colleghi, l'obbligazione accademica proponendo alcuni miei pensamenti sulle popolazioni bianche, le quali argomentava sarebbonsi un giorno incontrate dai viaggiatori europei nell'Africa centrale. Vi torna fuor di dubbio ancora in mente, com'io mi mostrassi, se non interamente persuaso, almeno speranzoso, che mercè ripetute e diligenti esplorazioni ci verrebbero rivelati i recessi dove rimpiattaronsi le misere reliquie del gran popolo che sì ferocemente e sì lungamente contese alla fortuna di Roma l'impero del mondo; e come mi sembrasse più ancora verisimile, che in mezzo a quasi inaccessibili solitudini, dovessero occorrere traccie di quella religione, cui dall'ubertosa costa settentrionale, rincacciò nel deserto la rabbia vandalica, l'intolleranza mussulmana. A così pensare m'inducevano gli scrittori di storia antichi e moderni, i quali non prima si accingono a toccare i fatti del popolo di cui intendono riferire le vicende, che non abbiano ragionato, e spesso molto a dilungo, delle genti che primitive occuparono la contrada, e di quelle che altronde da poi sopravvennero, ed i successivi accostamenti d'altre nazioni per cui quel popolo crebbe ed ordinò con lento progresso il sociale consorzio. Tutto ciò gli scrittori di storia t'additano per filo e per segno, tenendo dietro ai molteplici errori de' Jonii, de' Lidii, de' Fenicii, e ciò ch'è ancora più malagevole a quelli dei Tirreni e dei Pelasgi. Nel che certamente io lodo l'erudizione e la pazienza, concludendo dai loro dotti

ragionari, ch' essi non avrebbero mai dato luogo nelle loro pagine ad avvenimenti compresi nei nebulosi secoli dei Miti, se non avessero scorto trapelare un qualche barlume dalla notte della vetustà. Mi ripugnava quindi l'ammettere che del tutto cancellata si fosse la memoria d' emigrazioni seguite nei tempi splendidissimi del sapiente Polibio, del venerando vescovo Agostino, od anche più tardi, nel primo secolo dell' Egira. Per la qual cosa conghietturava, che se non pare consentaneo a ragione il credere sterminati affatto gli antichi abitatori dell' Africa settentrionale, se la loro fuga per la via di mare e la loro discesa su queste o quelle coste d' Asia e d' Europa non vengono confermate nè da tradizioni nè da documenti, resti soltanto a supporre, abbiano posto a schermo della vita e della libertà loro impenetrabile mare di arene, occultandosi nell' Africa centrale.

Queste idee io andava meco stesso tacitamente mulinando fin d' allora che Francia navigò all' impresa d'Algeri; nè dubitava che una nazione, meritamente famigerata per intraprendenza e nobilissimi studii, non avrebbe coronata col frutto di pacifiche ricerche la gloria delle sue armi, ed a mano a mano dal conquistato terreno addentrandosi, dotare di nuova e preziosa suppellettile l' archeologia, la storia, la geografia. In fatti presentemente si pubblicano a Parigi le antichità dell' Algeria; ma nei fascicoli fin ora dati a stampa fra scarsi monumenti architettonici e numerosissime epigrafi non v' ha briciolo di Punico; tutto è Romano. Eppure la stessa terra che oggidì sostiene le torri di Costantina prosperava un tempo all' ombra delle torri di Cartagine ed ora, pietoso uffizio che solo le resta, n' accoglie in grembo le rovine (1).

Mentre io svolgeva con ansiosa curiosità le pubblicazioni parigine, non vi trovando ciò che più stavami a cuore, comparve a Londra succintissima relazione dei primi passi dati nell' Africa centrale dall' inglese Richardson e dai due alemanni Overweg e Barth. Di questa relazione feci motto nella mia Memoria del 1856 lamentandone la magrezza, la superfizialità e l'assoluto difetto degl' indizii che spargono luce sulla vera indole, sulle idee religiose, sulle particolari costumanze delle tribù fra le quali i tre viaggiatori dovettero necessariamente perigliarsi. Ma il D.r Enrico Barth, solo superstite dei tre, dopo lungo aggirarsi fra popolazioni, altre selvaggie e feroci, altre miti ed ospitali, dopo un

(1) *Exploration scientifique de l' Algerie pendant les années* 1840, 1841, 1842 *publiée par ordre du Gouvernement et avec le concours d' une Commission Académique*; Paris, imprimerie nationale 1849.

bimestre soggiorno a Timbuctù, d'onde fu piuttosto espulso, che accomiatato, rivedeva miracolosamente Tripoli il giorno 29 agosto dell'anno 1855 ed il 6 settembre riposava tra le mura di Londra. Affralito dagli incredibili patimenti della sua quinquenne perlustrazione, durò non breve fatica a riaversi; ma tosto che gli rifiorì una leggera tinta di salute, die mano alla penna e dettò minuta storia della sua pellegrinazione africana, che doveva somministrare materia a cinque grossi volumi in ottavo, dei quali il primo venne in luce a Gotha coi tipi di Justus Perthes, l'anno 1857 (1).

Prima che vi esponga, illustri colleghi, ciò che nell'opera dal D.r Enrico Barth sembra favorevole alle conghietture da me precedentemente esternate, permettete che io premetta i brevi cenni che intorno agli antichi abitatori dell'Africa settentrionale ci lasciò Sallustio. Egli non se ne fa autore, ma li dichiara desunti dai libri punici che si custodivano nella biblioteca del re Jempsale. « Primi, così egli, s'ebbero l'Africa Libii e Getuli, gente aspra ed incolta, avvezza nutricarsi di carne ferina e di radici, disdegnosa di governo e di legge, dispersa, vagabonda, solita fermarsi dov'era colta da notte. Ma dopo che Ercole, com'è voce tra gli Africani, morì nelle Spagne, l'esercito di lui raggranellato di nazioni diverse, ridotte senza capo e d'ogni altra dipendenza impazienti, si disbandò. Di quelle nazioni i Medi gli Armeni, i Persiani veleggiarono verso le spiaggie africane e presa terra vi si stabilivano. I Persiani più addentro .... Questi legando maritaggi, co' Getuli, ad essi mischiaronsi, e perchè andando in cerca di terre più estese e più acconcie cambiarono sito presero il nome di Numidi ... I Medi e gli Armeni affratellaronsi ai Libii prossimi al mare, ed insensibilmente perduta l'antica denominazione, con barbaro vocabolo s'addomandarono Mauri. La fortuna dei Persiani sollecitamente prosperò, e quelli che si appellavano Numidi, dagli avi loro scostandosi, dominarono il territorio che presso Cartagine si chiama Numidia .... I Fenicii poi spinti da soperchianza di popolazione in casa, oppure sedotti da speranza di Signoria ... edificarono Ippona, Adrumeto, Lepti ed altre città sulla costa, le quali in breve ora cresciute furono alla madre patria d'ajuto e di splendore. Imperocchè di Cartagine reputo più dicevole tacere che dir poco .... Verso l'Egitto l'are de'Fileni segnarono il confine del dominio cartaginese. Di là erano poste l'una dopo

(1) *Reisen und Entdekungen in Nord und Central Afrika in den Jharen* 1849 *bis* 1855 *von D.r Heinrich Barth.*

l'altra le città puniche. I Numidi occupano tutto il resto fino alla Mauritania. I Mauri stanno presso alle Spagne. Addietro della Numidia ci vien riferito che i Getuli menino vita nei tugurii, od alla salvatica, vagando senza tetto e che dietro d'essi esistano gli Etiopi .... Noi perciò rileviamo dal giudizioso scrittore della guerra giugurtina, essere state nazioni asiatiche quelle che in età lontanissime popolarono la costa settentrionale dell'Africa, nè Medi, Armeni, Persiani sarebbonsi di leggeri mescolati e confusi co' Getuli e coi Libii se non li avesse avvicinati somiglianza di lingua, di consuetudini e sopra tutto conformità di colore. Nè per fermo v'ebbe mai alcun latino che scrivendo accennasse il colore o di Bocco il Mauritano, o di Massinissa il Numido, o del Massesilio Sifface. » Mentre Sallustio encomia il decoroso aspetto di Giugurta, i suoi coetanei nella voce Etiope comprendono non solo la bruttezza, ma la più goffa ebetudine e la mal augurata prerogativa di nuocere col solo aspetto. Se dunque nelle regioni abitate dalla razza chamita ci avverrà d'incontrare faccie di tipo e di tinta semitica, od in altri termini, se ci avverrà d'incontrare faccie asiatiche internate tra i Negri, non potremo non sospettare, e poco meno che persuaderci, sussistere in esse i discendenti dei popoli che nei giorni della loro prosperità, la costa settentrionale africana e 'l finitimo mare signoreggiarono.

La prepotenza romana non tollerava negli altri popoli nè opulenza nè libertà. Incesa quindi Cartagine, tutto il territorio dall'Egitto a Ceuta fu dannato a sopportare il peso dell'italiche catene. L'Africa si disse provincia dell'impero romano. Ma come in questo, così anche in quella penetrò e s'estese il cristianesimo fondandovi chiesa gloriosissima pel numero dei fedeli, per la rinomanza degli ingegni. Se dunque, dopo che questa fu spietatamente diradicata dall'impetuoso torrente degli Arabi, ci occorreranno, tra i Negri convertiti all'islamismo, non solo volti di tinta e di tipo semitico, ma segnali ancora e simboli della religione cristiana, apparirà, io spero, più ancora probabile la conghiettura enunciata nella mia precedente memoria.

Premesse queste riflessioni a ribadire gli argomenti altra volta addotti su questo proposito, eccomi al viaggio del D.r Barth. Egli nel Capitolo VIII del suo primo volume e nei seguenti parla alquanto diffusamente della nazione dei Touaregs od Imosaghs. Codesta nazione occupa il territorio che lunghesso il gran deserto dagli ultimi confini dell'impero marocchino si prolunga fin oltre Agades e Timbuctù, a un di presso dal trentesimo fino al quindicesimo grado di latitudine settentrionale. Distinguonsi ugualmente i Touaregs alla taglia ele-

vata, al portamento superbo, ai modi imperiosi. Usano raramente il cavallo. Sui cammelli siedono più volentieri e di questi possedono razza sì agile al corso, che può misurare ben cento miglia in un giorno solo. Gli addomandano *meharis*. Favoriti dalla velocità di questi animali piombano improvvisi sulle vie battute dalle carovane, ed in ogni luogo dove può invitarli speranza di abbottinare. Accolti coll'arme in pugno sostano, che non gli alletta il combattere quando loro fallisce il progetto di atterrire. Allora fanno il buon viso, simulano cortesia, s'offrono a servigio. Egualmente n'è pericolosa l'accettazione che il rifiuto. Se partono, torneranno più numerosi nel dì seguente. Se restano e vengono ammessi a famigliarità s'associano ai tristi, ai malcontenti, favoriscono la disunione, terminano col dare la legge; esigono donativi, ghermiscono di soppiatto, estorcono colla violenza. Tuttavolta il viandante, od appostatamente venuto, o smarrito in quelle solitudini è pur forza s'affidi al Targhi (1) che altrimenti ne morrebbe di stento, di fame o di sete. È raro però che della vita preservata sia tenue il prezzo od adeguato, e 'l viaggiatore che raggiunge sua meta, deve alla moderazione del Targhi quel poco che gli resta. Quando i principi arabi dominatori dei territorii adiacenti preparano la guerra, i Touarges intervengono od ausiliarii stipendiati, od alleati volontarii; ma il più delle volte non si viene a battaglia, o perchè i Touaregs disertano al nemico, o perchè nel più premuroso momento sgomberano il campo. In somma odorano a maraviglia di quella prerogativa che i Romani denominavano: *Fides punica*.

I Touaregs sono divisi in tribù, le quali non hanno capo comune. Ciascuna riconosce il suo. Potentissima è quella degli Askars e del pari presuntuosa. Questo suolo, questi campi, queste montagne, diceva un giorno a Richardson il principe degli Askars, non appartengono più nemmeno a Dio da che divennero nostra proprietà. La città di Agadés fabbricata nel 1460 da cinque tribù berbere, come scrisse Leone Africano, è capitale oggidì delle tre grandi tribù dei Touaregs Itisan, dei Touaregs Kel Gerés, dei Touaregs Kel Ovvi. Esse si concertano per eleggere il sultano della città, principe costituzionale, con ciò sia che costretto soggiacere ai comandi, e più spesso ai capricci d'intollerante aristocrazia. Secondo personaggio dello stato è il capo dei bianchi. Vengono poscia, il primo eunuco, il cadì o ministro della giustizia, il sidigalli o prefetto della milizia. Fra questi uffizii, che serbano l'impronta del sistema arabo, quello del capo dei bianchi ricorda un fatto storico. Agadés fondata, come si disse dai Berberi, fu conqui-

(1) Singolare di Touaregs.

stata da Hadji-Mohammed-Askia, principe nero, il quale colle genti della sua razza introdusse nella vinta città una differenza di tinta. In fatti la popolazione attuale presenta i caratteri fisiologici del sangue berbero misto col sangue nero. I Touaregs, costretti rispettare la consuetudine ond'è chiamata al trono una famiglia di sangue nero, esigono d'essere rappresentati, ed occorrendo anche protetti, dal primo personaggio dello stato dopo il sultano.

La tribù degli Askars possede il paese di Ghat. La terra esclusivamente appartiene alla nobiltà, classe feudale cui è riserbato il diritto di sfoggiare, di maneggiar lancia, di cingere scimitarra. Non palesa origine diversa la popolaglia, ma l'alterazione prodotta dal commercio delle negre del Soudan, modificò d'assai la vivente generazione. Addetta alla gleba, lavora per conto de' suoi padroni e 'l nome d'Imghad che le si suole applicare manifesta la condizione servile.

Bazzicano i Touaregs a Timbuctù e lungo le rive del Niger, per lo che avviene in quella città abitata da ogni genere di genti africane che qualsiasi prescrizione o decreto viene specificatamente intimato ai Negri ed ai Bianchi (1).

(1) La città di Timbuctù, della quale si è tanto parlato, di cui finora tanto poco si seppe, dovette la sua fondazione alle tribù dei Touaregs stabilitisi nel deserto nel sesto secolo dell'era cristiana. Non molto dopo conquistaronla i sovrani di Songhay, già divenuti seguaci dell'islamismo e soggetti alla supremazia spirituale del califfo d'Egitto. I principi di Songhay furono costretti combattere incessantemente le tribù de'Mori loro vicine dalla parte di mezzogiorno, tribù guerriere, e del paganismo africano anche al dì d'oggi indomite sostenitrici. Nel corso di siffatte guerre gl'idolatri vittoriosi presero Timbuctù e l'abbandonarono ad un sacco spietato; ma ne la rifece il signore di Songhay per nome Sonny Ali, di maniera che sotto i suoi successori potè tornare popolosa e fiorente. Corsero i giorni della sua maggiore prosperità sotto il celebre Hadji-Mohammed-El-Askia, le cui conquiste da Kachna e Kano all'Atlantico, dalle sorgenti del Niger s'estesero sino a Touat. Gogho, città situata sulla sinistra del Niger fra Timbuctù e Say fu la capitale di quest'immenso impero e strinse relazioni di commercio coi Portoghesi. Se non che i figli di Mohammed Askia, rovesciandolo dal soglio, ne ruinarono la grande monarchia, così che Mulay-Hamed imperatore di Marocco, il quale contava nel suo esercito tremila seicento moschettieri, disperse le schiere del Songay sprovvedute d'armi da fuoco e n'occupò le principali provincie, ond'è che della passata grandezza di Gogho oggidì non resta che la rimembranza. Mulay-Hamed trapassò nel 1603 lasciando ai suoi discendenti non conservabile conquista a cagione dell'enorme distanza. Cominciò allora per Timbuctù quell'anarchia che tuttora sussiste. Essa non fu mai capitale di veruna provincia. Collocata sul punto più settentrionale del Niger divenne naturalmente il centro commerciale del Soudan col deserto e cogli stati barbareschi. Le tribù adiacenti se ne disputarono a gara il possesso e n'annichilirono la prosperità. Nel 1826 signoreggiavanla i Touaregs: discacciati poscia dai Fellani, vi rientrarono nel 1844. Ma siccome i Fellani padroni dell'alto Niger possono impedire la discesa dei grani dal Soudan a Timbuctù ed affamare il deserto, così divenne indispensabile una transazione tra le parti con-

Ciò riferito in generale degli uomini Touaregs non dispiacerà io spero che anche alle loro donne conceda poche linee colle parole del medesimo Barth. Scrive da Agadés a dì 24 ottobre 1850: « Questa sera m'accadde far saggio » dei costumi d'Agadés. Cinque o sei giovanette vennero a farmi visita e colla » più schietta semplicità di questo mondo mi proposero di passare con esse piace- » volmente il tempo. Non aveavi alcun motivo di contenersi, ripetevano quelle » seducenti creature essendo il sultano in quella sera fuori di città. Parvemi as- » sai ridevole la candida conclusione. Due delle visitatrici, di giuste ed eleganti » proporzioni potevano dirsi veramente belle. Capellatura lunga nera, graziosa- » mente intrecciata, tinta della pelle chiarissima. Libere delle maniere, non » l'erano dell'abbigliamento decente e non scevero di bel garbo. Componevasi » di due vesti bianche. L'una allacciata al collo cadeva sino ai malleoli, l'altra » sovrapposta a foggia di mantello poteva rivoltarsi sulla testa come cappuccio. » Io rimasi sopra me stesso, ben intendendo di quanta prudenza in così sdruccio- » lente posizione dovessi far uso. Imperocchè guai allo straniero che non man- » tiene in quelle contrade la più stretta austerità coll'altro sesso. Quindi è che » le dame d'Agadés indispettite del mio riserbo, fino a tal punto mi tormenta- » rono, che dovetti rinchiudermi nelle mie stanze e per più giorni rendermi in- » visibile. » Mi piacque riferire questo fatto non per iscemare riputazione alle troppo sensitive dame d'Agadés, ma per richiamare l'attenzione sul colore generale delle femmine Touaregs ed anche per collegarlo con un altro fatto di cui ci volle istrutti il medesimo Barth. Trattenendosi egli a Zinder sotto il grado quattordicesimo di latitudine settentrionale addivenne che conversando co'Negri il discorso cadesse sul colore della pelle, cagione principalissima per cui i bianchi non simpatizzano cogli Africani e viceversa, e qui uno degli astanti dichiarò al viaggiatore che s'egli fosse vago d'aversi in balìa donne bianche, com'egli era, in poco d'ora ne l'avrebbe soddisfatto. Io, riflette Barth, naturalmente un

tendenti. L'incerta loro fede spiega la difficoltà provata finora dagli Europei di visitare una città, dove non si conosce autorità valevole a proteggerli.

I principali monumenti di Timbuctù si stringono a tre moschee. Quella detta di Lankoré risale colla sua fondazione ad un'epoca ignota. Quella di Jingere Ber, la più vasta, fu edificata nel 1326 dell'era nostra. Le case, di forma rettangolare d'un solo piano, raramente di due, non superano il migliaio. A queste denno aggiungersi alcune centinaia di capanne col tetto di forma conica, quali si vedono nel Soudan. La popolazione permanente somma tredici mila individui; la mobile dai cinque ai dieci mila. Il massimo concorso si fa alla stagione delle innondazioni, ch'è in pari tempo la stagione dei contratti e d'ogni convenzione commerciale.

poco bronzino ed abbrustolito dal sole del tropico, non poteva dare gran pregio di candore ad una donna che m' uguagliasse in bianchezza. Tuttavia sospetto, che più verso il mezzo giorno dalla parte del mare v' abbia una qualche popolazione di tinta bianca. Il sospetto però di Barth potrebbe non avere veruna relazione colle mie conghietture. Conciossiachè si possa rendere ragione di tale singolarità con un naufragio o con una dimenticata colonia portoghese.

Fin qui dell' origine semitica e del relativo colore. Aggiungerò sulla religione brevi parole. Gli Arabi, vinto e soggiogato l' Egitto, aspirarono alla conquista di tutta la provincia africana. Fu lunga la lotta e malgrado la loro intrepida perseveranza, più volte i prodi dell' islamismo, diffidando dell' impresa, indietreggiarono. Al cadere soltanto del primo secolo dell' Egira ebbe fine l' alta contesa, sterminati compiutamente gli eserciti indigeni. Se non che l' Arabo piantò sue tende alla costa come locusta su campo divorato ed ignudo. I Berberi sopravvissuti alla distruzione delle loro città, comperata coll' esilio e coll' apostasia una miserabile esistenza, ripararono nel deserto. V' hanno però delle tradizioni, degli usi domestici, dei sentimenti che non si vendono mai. Essi viaggiano coi popoli fuggiaschi e se il cambiamento di sito e 'l volgere degli anni n' altera le primitive condizioni e l' originale significazione, pure mantengonsi, oscura memoria di luttuosi rivolgimenti e di prosperità che dileguò per non più ritornare. Quindi è che, sebbene anche per l' Arabo dell' Africa sieno sorti giorni infausti, sebbene abbia dovuto egli pure soggiacere alla preponderanza turchesca, sebbene, rifugiandosi nel deserto, sia venuto a contatto colle antiche sue vittime, pure nè prossimità, nè ragione di reciproco interesse potè mai tanto sui Berberi, che quelle tradizioni, quegli usi, quei sentimenti dimenticassero. La Croce, ai tempi di Tertulliano e d' Agostino, era per essi pegno di salute e perchè tale, la scolpivano sui loro scudi, dispiegavanla sulle loro bandiere. Oggidì quella croce istessa fregia i loro scudi, ed i Touaregs non temono porla in mostra sugli occhi dei Mussulmani che l' abborriscono. Ossia che scortino il viandante, o per ragione di commercio si tramutino da luogo a luogo, o s' accingano ad imprese guerresche, recano sempre in mano una piccola croce, la quale adesso è certamente per essi simbolo di cosa dimenticata, ma serba ancora parte della sua antica efficacia, credendola eglino valevole a salvare chi la porta indenne del fascino od a procacciargli la buona ventura.

Il Targhi ripara il capo con un inviluppo che prende forma di celata, quale fu in uso nel medio evo. La gioventù moderna v' innesta un berrettino di colore

scarlatto, innovazione dai seniori riprovata. Sotto degli occhi s'allaccia un velo detto *litham* che gli ricopre il resto della faccia, non già per modestia, nè per alcuna superstiziosa credenza, ma per guarentire dalla finissima polvere del deserto l'organo della respirazione. Indossa sopravveste tinta di colore azzurro cupo, ed occorrendo il mantello guarnito di cappuccio, conosciuto in Europa sotto la denominazione di *bournous*. Armato di sciabola stringe colla destra una lancia, ne tiene altra in riserva agli arcioni del suo meharis, non che il fucile, ch' egli ritira col commercio da Tripoli. A fianco gli pende lo scudo rettangolare. Il nostro Barth dovette acconciarsi con uno di costoro che gli servisse di guida, e poichè la qualità del compagno non dava al dialogo sufficiente materia, così, tratta di tasca la matita, combattè la noja della silenziosa marcia delineandone il ritratto. M'onoro, illustri colleghi, di sottoporlo ai vostri occhi (1) esattissimamente copiato dal primo volume del suo viaggio. In iscritto poi ecco cosa egli pensa dell' intera nazione: « I Touaregs, che possedono non solamente il » paese di Gath, ma tutte le contrade situate fra questa città ed il Soudan, sono » evidentemente di razza berbera e sembrano essere i resti dall' antica popola- » zione del litorale rincacciata nell' interno del continente dalla conquista degli » Arabi. Tutto mi porta a credere che un tempo professarono il cristianesimo, » del quale conservarono molti segni tradizionali, come per esempio la croce » che adorna i loro scudi. Gli Arabi loro ereditarii nemici, li dichiarano pessi- » mi mussulmani e li dicono a sfregio: *Cristiani del deserto.* Queste opinioni di Barth, siccome è verisimile, non denno differire da quelle di Richardson che gli fu compagno nella spedizione africana, ch' ebbe l' opportunità di trattenersi fra i Touaregs più lungamente, e che trasmise a Londra un giornale dato poscia a stampa in inglese, ma che non m'avvenne ancora di possedere. Del resto, signori, è tanto malagevole l' arte dello indovinare che spero darete venia al mio amor proprio se avendo rinvenuto alcun che di favorevole alle mie predizioni non ebbi la modestia di dissimularvelo. Nutro intanto fiducia essere vicino il giorno in cui verrà tolta ogni dubbiezza sulla origine delle diverse popolazioni che albergano l' Africa centrale, dovendosi tra poco effettuare l' annunzio dato dal carteggio privato di Londra 1.° novembre del corrente anno, riportato dalla veneta Gazzetta il giorno 8 dello stesso mese colle seguenti parole:

« Oggi tanto il sig. Grey, quanto il sig. Gladstone debbono trovarsi insieme

(1) Ved. la tavola.

ad Oxford e pronunziare discorsi nella così detta sala di quella università, relativamente alla congiunta spedizione anglo-americana nell'Africa centrale, di cui è alla testa il dott. Livingston.

«Il Missionario Livingston acquistossi già meritata celebrità per le sue esplorazioni dell' Africa meridionale. Dobbiamo quindi sperare che la veterana perizia di un tale condottiero sarà guiderdonata dai più importanti successi. »

(*Letta il 14 novembre* 1859.)

Premiata Lit Kirchmayr

BENEFICENZA E AMORE

MEMORIA

DEL M. E. GIROLAMO VENANZIO

Nel generale ordinamento del mondo Dio diede agli uomini eguali diritti e simili facoltà: diritti, che sono la capacità di avere e godere ciò che a cadauno di essi è mestieri; facoltà, che sono i mezzi di acquistare tal possesso e tal godimento. L' esercizio di questo diritto e l' uso di queste facoltà con una grande applicazione generica chiamasi lavoro; onde l' uomo, ch'è un animale essenzialmente produttivo, non produce che lavorando. Ma se havvi una perfetta eguaglianza ne' diritti che Dio, secondo l' eterno ed incorruttibile suo pensiero, concesse all' uomo, havvi però una immensa disuguaglianza nelle facoltà di cui l' uomo fa uso secondo la indole sua ed il suo libero arbitrio; ed havvi in fatto una varietà infinita non solo nella forza e nella eccellenza di queste facoltà, ma eziandio nelle moltiplici loro tendenze e modificazioni e nelle attitudini che ne risultano. La qual varietà inevitabilmente proviene dalle native costituzioni organiche, dalla qualità della educazione ricevuta, dalle sorti diverse e mutabili della vita, soprattutto dalla maggiore o minore potenza della volontà. Per tutte queste ragioni l' uomo effettivamente lavora, e lavora o colla virtù della mente e dell' animo, o colla forza e desterità del braccio e della mano; e taluno efficacemente ed attentamente lavora, taluno fiaccamente e senza cura, e taluno eziandio in nessun modo lavora. Da questa disuguaglianza delle umane facoltà, a cui, se il mondo novellamente non si crea, è impossibile por modo o riparo, dipende che l' uomo faccia un più o meno utile lavoro, dia una più o meno feconda produzione e raccolga per sè una maggiore o minore copia di beni; e così egli è fatale che tutti gli uomini, sebbene privilegiati di eguali diritti, pur battano

una diversa via e giungano a fini diversi: a guisa di macchine che sebbene formate dello stesso metallo e fornite degli stessi congegni, pure per la varia qualità di quel metallo e per le varie tempre di esso sviluppano nell'atto del lavoro una diversa forza e producono effetti diversi. Come di cosa al mio subbietto non attinente lascio di parlare di ciò che a tal condizione di cose aggiungono le complicazioni sociali, i civili provvedimenti e le viste del reggimento politico degli Stati.

In siffatta disuguaglianza, che il corto nostro discernimento stima sovente che sia una grande e funesta sventura, sta invece un sapientissimo ordinamento, poichè la differenza delle umane facoltà, da cui proviene la differenza dei lavori, produce eziandio un saldo vincolo che unisce gli uomini in un solo consorzio e in una sola famiglia, e la cui forza resiste sempre alle ardenti aspirazioni di coloro che anelano a romperlo. E questo vincolo è il bisogno, che è la espressione della differenza che havvi tra gli uomini che sono validamente produttivi e quelli che nol sono. Pel bisogno gli uomini si avvicinano più volonterosi e più pronti gli uni agli altri, e si fanno patti e si stringono alleanze, e la vita si adorna di liete convivenze e di cittadinanze onorevoli; ed aggiungendosi alle primitive inclinazioni che la natura pone nel cuore umano il bisogno, spinge vieppiù le mogli, i figli, le sorelle, gli amici a stringersi tenacemente ai mariti, ai padri, ai fratelli, agli amici, e i men veggenti agl' illuminati, e i deboli ai potenti, ed i poveri ai ricchi. E manutentore di tali avvicinamenti e di tai vincoli è l'amore; l'amore, che da tutte le create cose piove negli animi umani, che dà ad essi nuove qualità e nuove tempre e li dispone a considerare l'umanità come una grande consolidazione d'affetti e d'interessi, a partecipare di ogni dolore e di ogni bisogno, a non essere mai indifferenti a cosa alcuna che in qualsivoglia modo alla umanità appartenga e riguardi. Per tal modo l'amore si fa preside e promovitore della grande opera di soccorrere e beneficare.

Ma di questa nobile opera l'amore non solo è stimolo, ma eziandio ricompensa; poichè quando esso muove a soccorrere e a beneficare, tale fa sorgere un gaudio nell'animo del benefattore, che ogni altro gaudio, che possa quaggiù essere ai mortali largito, vince d'assai. Perciò, se pei malvagi la coscienza è come una selvaggia foresta irta di spine e di vepri e piena di ombre paurose, di tetre visioni, di orridi fantasmi, pei buoni, cui il ben fare alletta, è un ridente giardino dove spuntano fiori d'immortale bellezza e spiranti le più soavi fragranze. Anzi si può dire che questo sia il solo raggio che valga a stenebrare la

nostra esistenza così oscura, così misera; e quegli che può dire: oggi ho provveduto ad un bisogno, ho calmato un dolore, ho asciugato una lagrima, può certo contare un giorno felice nella vita. Perciò giustamente Tito imperadore chiamava giorni perduti quelli nei quali non gli era dato impartire alcun benefizio.

Fra i quali benefizj il più bello, il più utile, e per somma ventura anche il più comune, è quello con cui il ricco soccorre ai bisogni del povero; ed anzi la parola beneficenza, parola che onora la lingua di cui fa parte e la nazione che la formò e la pose nel suo vocabolario, serve propriamente a significare questo genere di soccorsi e comprende tutte quelle diverse maniere di essi che dalla varietà dei bisogni sono richieste. Segue da ciò che principio vero e sostanza intima della beneficenza è l'amore, e che il divider questo da quella sarebbe come disgiunger l'effetto dalla sua causa efficiente e la forma dalla sostanza che interiormente la regge; onde quell'effetto svigorirebbe e presto andrebbe in dileguo, e quella forma resterebbe vanità e non altro. Ed appunto per venire a tal sentenza e per poterne con sicurezza dedur le conseguenze che formano il subbietto di questa Memoria, premisi i ragionamenti esposti finora, i quali come un necessario fondamento della sentenza stessa, e non come un vano apparato di dottrine estetiche vogliono esser considerati.

Pertanto se la beneficenza è tutta sostanza d'amore, ne segue ch'essa dev'esser necessariamente libera. Poichè l'amore non soffre legami, e la libertà è l'aura che sola quella sacra fiamma alimenta e per cui può bella e pura risplendere e indirizzarsi al cielo. Da questa libertà, la quale consiste nella facoltà di prestar soccorsi a chi si crede averne più di mestieri e di adottare quei provvedimenti che si reputa esser i più salutari ed opportuni senza trovar nè impedimenti nè ostacoli, nè pubbliche o private opposizioni, da questa libertà, io diceva, la beneficenza ritragge e liberalità d'intendimenti, ed energia di azione, ed ampiezza di mezzi; e per averla piena e compiuta ella non si cura di quelle regole, di quegli scrupoli, di quelle cautele di cui pur troppo nei casi comuni suole la prudenza far uso, non ad altro nelle opere sue generose ponendo mente che al bisogno che scorge ed all'amor che la muove. « Perciò tutta l'umana gente è per essa una sola famiglia e tutte le umane miserie sono un argomento di dolore e di sollecitudine; e per commuoversi non chiede a qual paese od a qual consorzio l'afflitto appartenga, nè quali sieno le condizioni di lui od i meriti od i pregi, ma vola incontra a lui per consolarlo e sollevarlo pietosamente, non

per farselo amico pe' tempi migliori, non per secondare un calcolo d'interesse, ma per calmare quel movimento del cuore che non posa finchè vi sia un bene da farsi e nol si faccia. » Con siffatti procedimenti potrà forse qualche volta la beneficenza andar lungi dal segno, potrà cadere in qualche insidia che le venga tesa, potrà esser tratta in errore dalle arti menzognere di coloro che fingono miseria ed infermità per eccitare l'altrui compassione, e sottrarsi alla legge del lavoro. Ma, in primo luogo, la beneficenza nel suo diuturno esercizio acquista un occhio così acuto e penetrante, e si forma un così fino discernimento, ed aggiunge a questo ed a quello una così assidua attenzione, una premura così sollecita e vigilante che nella utilità degli effetti supera di gran lunga lo zelo di cento arghi e di cento inquisitori, poichè amore è del pari promovitore indefesso ed oculatissimo osservatore. In secondo luogo, quand'anche la libera beneficenza nell'adempiere la parte che si elegge commettesse qualche errore, questi errori sarebbero certo un nonnulla a fronte di ciò che opera la beneficenza, quando sia dal solo amore ispirata, del modo franco e spedito con cui tratta gl'interessi dell'umanità, dei provvedimenti moltiplici e diversi che sa adottare ed impartire nei singoli casi e che fanno uno strano contrasto colle grette misure e colle insufficienti disposizioni, che prende la beneficenza quando sia da qualche vincolo impedita e fatta da altri dipendente.

Sotto questo punto di vista la beneficenza di cui parliamo grandemente dalla moderna filantropia si distingue. La quale derivata da nobili principj e da lodevolissimi intendimenti diretta, attiensi però non poco agli ordini governativi, ed ha certe forme di costituzione e di amministrazione da cui ella non si diparte giammai. Perciò mentre la beneficenza segue sempre le ispirazioni dell'amore e gl'impulsi della pietà, e non è quindi mossa che da impressioni e da sentimenti, la filantropia, posta per così dire in una sfera superiore, mira a segni più elevati ed intende ad opere più solenni e luminose, e sovente ragiona, e specula sottilmente, e si arma di cifre e di calcoli. E non v'ha dubbio che le sue cure sono spesso coronate da ottimi successi e che degni di amplissime lodi sono i promotori di siffatte imprese. Ma non può negarsi eziandio che la filantropia talvolta nelle sue speranze s'illuda ed esageri ne' suoi tentativi e non sempre le ragioni del bene da altre ragioni cautamente distingua; come facilmente avviene a chi troppo si compiace dei concetti ideali e non abbastanza dà retta alla reale natura delle cose. Ciocchè darebbe larga materia al discorso, se il trattare di ciò fosse al mio proposito conveniente.

Pertanto credo che per l' esposte ragioni e per la natura stessa delle cose ritener si debba, che la beneficenza nasce dall' amore e soltanto nella scuola d' amore si educa a compier degnamente la sua missione. Perciò ogni altro potere che intervenir volesse ad attuarla e dirigerla, non farebbe, limitandone la libertà, che affievolirne l' efficacia ed impedirne gli effetti. Il Cristianesimo stesso adottò questo principio ed offre in tal materia un esempio solenne che merita di essere considerato. Esso santificò l' amore e col nome di carità lo pose in cima a tutte le virtù, dichiarando che se questa manca, a nulla valgono le altre. Quindi esso insegna che soccorrere agli altrui bisogni è dovere di ogni cristiano, ed esorta tutti a dare ciò che avanza ai poveri. Ma il Cristianesimo non determina nè il tempo nè il modo di adempiere questo ammirabile insegnamento. Esso raccomanda l' elemosina come l' opera più santa, come quella di cui si terrà maggior conto nella ricognizione suprema; ma non ne fissa in alcun caso la misura, nè prescrive intorno ad essa una tassativa disciplina e lascia che, secondo le rispettive condizioni, l' atto sia regolato sempre dalla coscienza e dal buon volere. Persino nei primi secoli della Chiesa, quando sì grande era il primo fervore dei fedeli e così sollecita la loro pietà, non vi erano in tale argomento ordinamenti positivi; ed ognuno alla propria congregazione portava liberamente le sue offerte, colle quali provveder dovevasi al culto ed a' suoi ministri ed al mantenimento dei poveri. Nè ad onta di siffatta libertà mancò giammai il soccorso all' indigenza, nè vennero meno l' elemosine ai bisogni. « In ciò, scrive uno storico, la cui testimonianza non sarà certo da alcuno rifiutata, il celebre Gibbon, in ciò tutto era rimesso alla discrezione del Vescovo, il quale apriva il tesoro della Chiesa per mantenere le vedove, gli orfani, gl' impotenti, gl' infermi e i vecchi della Comunità, per soccorrere ai forestieri ed ai pellegrini e per mitigare i patimenti dei prigionieri e degli schiavi, quando soprattutto erano questi patimenti cagionati da ferma devozione alla religione. Un commercio generoso di carità univa le provincie più lontane e le piccole congregazioni trovavano abbondanti ajuti nell' elemosine delle società più opulenti che sovvenivano con gioja ai loro fratelli. Questa provvida istituzione, che non guardava ai meriti, ma ai bisogni, molto contribuì ai progressi del Cristianesimo; e i pagani animati da un sentimento di umanità, mentre spregiavano le dottrine della nuova setta, ne ammiravano la beneficenza. »

I Governi, parlando in generale, dovrebbero adoperare come la Chiesa, non per imitarne l' esempio, sebbene sia questo più d' ogni altro grave ed auto-

revole, ma per seguire le ragioni che dalla natura delle cose, dallo studio dell'umanità e dalle lezioni della sperienza sono dimostrate. Essi dovrebbero quindi inculcare la beneficenza, ma non prescriverne l'esercizio, onorare i benefattori, ma non costringerli con leggi tassative, raccomandare la elemosina, ma non determinarne la misura. Se invece per riparare ad una straordinaria calamità o ad uno straordinario bisogno i Governi comandano straordinarj sacrifizj e chiedono ai Comuni od ai privati determinati sovvenimenti in denaro, o determinate prestazioni, o qualsivoglia altra maniera di ajuto, impartendo ordini e ponendo per base agli ordini calcoli e cifre, e convalidandoli con sanzioni positive, allora la santa opera della beneficenza si trasforma e si guasta, e falliscono le buone intenzioni, e i provvedimenti divengono insufficienti e inadeguati all'uopo. E che ciò debba inevitabilmente accadere lo provano le osservazioni e i fatti seguenti:

I. Si deve innanzi tutto rammentare che, siccome si è detto da principio, la beneficenza nasce dall'amore, da quell'amore puro e semplice di cui nella creazione furono posti gl'impulsi nella natura e i germi e gli svolgimenti nel cuore dell'uomo, e quindi essa è essenzialmente libera, poichè la vita dell'amore è la libertà. La beneficenza ordinata dai Governi muove anch'essa dall'amore; ma da un amore che tiene del teorico e dello speculativo e ch'è sempre misto ad altre viste di politica e di economia. Quella prima beneficenza che chiameremo spontanea, si adorna di bellissimi sentimenti, splende di carità, intende sempre ad alleviare i mali degli sventurati e sembra aprire ad essi i tesori della provvidenza, che sono inesauribili; laddove la seconda beneficenza, che chiameremo ufficiale, muove da un comando, si circonda d'interessi di vario genere, ed ha da un lato il regolamento che la tiene obbligata a certe forme e dall'altro il conto preventivo che la costringe ad osservare certi limiti. Perciò si può qualificare l'una un atto di umanità, l'altra piuttosto una operazione d'amministrazione; ed ognuno comprende quali differenze vi sieno tra quest'atto e questa operazione rispetto alle condizioni dei poveri. Chè il primo è libero, generoso, pronto, larghissimo, e la seconda è manchevole e gretta ne' suoi principj e spesso tarda ed insufficiente negli effetti.

La beneficenza uffiziale, oltre ad essere dalla spontanea affatto diversa nei principj e nei risultamenti, sembra altresì che adoperi a spegnere quell'amore da cui pure tutte le opere buone ed ogni desiderio di ben fare procedono. Poichè attentamente considerando si scorge, che gli atti di beneficenza, quando

siano liberi e volontarj, come sono frutto, così sono nel tempo stesso alimento dell' amore; e la testimonianza della coscienza che sa, che quell' atto nasce nell' intimo animo e che non v' è altra cagione che lo produca, e la sicurezza ch' esso provvede ai bisogni di un fratello e vale eziandio talvolta a salvarlo da estrema perdizione, e la riconoscenza stessa del beneficato ch' è un sentimento così dolce per quello che lo prova e per quello a cui lo si rivolge, tuttociò fomenta l' amore e lo alimenta e lo cresce. La beneficenza ufficiale toglie ad un tempo e la testimonianza della coscienza, la quale trattandosi di essa non può all' intervento altrui non attribuirla, e le soddisfazioni che l' atto del beneficare procaccia al benefattore e fa nascere invece quel senso grave, astioso, e, direi volentieri, ribelle che si prova quando si obbedisce ad un comando, o si sopporta un aggravio, o si paga un' imposta; onde se l' un senso alimenta l' amore, l' altro lo spegne. Egli è vero che quel comando, quell' aggravio, quell' imposta sono diretti al soccorso dei miseri e che ciò bastar deve ai cuori generosi, senza che sia mestieri di altre soddisfazioni. Ma egli è vero altresì che la nostra povera umanità fu creata con tal legge e ch' è pur troppo fatale che la volontà della maggior parte degli uomini più si muova per una impressione, che per qualsivoglia più forte ragionamento. Perciò vuolsi che nell' atto di beneficare, il benefattore e il beneficato si uniscano in una piena comunione di affetti, che i loro cuori battano a vicenda l' uno di pietà, l' altro di riconoscenza, che la mano che porge si congiunga alla mano che riceve, e che lagrime di amore spargano insieme ambedue. E tolga il cielo che si pensi a rimuovere la occasione di queste lagrime! La lagrima, che fra disperati pensieri e fra moti iracondi e scompigliati spunta sul ciglio del misero, è come una fonte che sgorga nel deserto, che feconda le terre che la circondano, e forma una oasi intorno a sè; e la lagrima di chi si commuove beneficando è tal consolazione che chiunque la provi ringraziar deve in ginocchio l'altissimo Iddio di avergliela concessa.

II. Un carattere distintivo della beneficenza spontanea quello si è che ogni mezzo da essa usato raggiunge il suo scopo e tutti i benefizj impartiti vanno dirittamente al segno prefisso, nè parte alcuna se ne perde o rimane inutile. Ciocchè al magistero dell' amore si deve precipuamente attribuire. I pagani in quella loro imperfetta civiltà rappresentavano l' amor cieco, come quello che per la passione che fa velo alla ragione si reputava sempre esposto ad errori, a traviamenti, a pericoli. Ma l' amor primitivo che dalla pura natura è ispirato ha occhio linceo e vede assai da lungi e molto acutamente discerne. E di tal

tempra, come già dicemmo, è l' amore da cui la beneficenza ritragge qualità ed impulsi. Perciò gl' individui che all' esercizio di questa sublime virtù sono per bella ventura chiamati, si danno ad una incessante investigazione e fanno sottili e diligentissime ricerche sulle condizioni e sui bisogni dei loro sventurati fratelli e nulla sfugge di ciò che ad essi riguarda, e quindi della necessità, della opportunità e della misura dei soccorsi da concedersi giudicano secondo il fatto e la verità, e con un accorgimento ch' è piuttosto frutto di una sollecitudine amorosa, che di uno speculativo partito. Ed in questa impresa grande vantaggio dei pietosi benefattori quello si è di poter farsi accosto agli oggetti delle loro cure e poter esser consapevoli e spesso testimonj dei casi di ciascheduno, delle loro sorti e delle loro sciagure, di ogni vicenda, di ogni distretta. Invece nella beneficenza uffiziale i benefattori sono di un lungo tratto divisi dai beneficati, e il benefizio per arrivare a quello a cui è destinato deve percorrere molte vie e passare per molte mani; e in tanti passaggi di rado avviene che non si assottigli e non vada in gran parte in dileguo. È questo un grande scapito della beneficenza uffiziale, la perdita di una parte dei sovvenimenti che da essa si concedono. E di siffatta perdita la prima cagione si è, che per questa bisogna, per la distribuzione cioè dei soccorsi, egli è d' uopo istituire uffizj e valersi dell' opera di agenti. Ora si deve bensì credere che per le attente cure dei Magistrati e offizieri e agenti saranno dotati di quella scrupolosa probità che si richiede in tutti quelli che amministrano le sostanze altrui e quelle specialmente dei poveri. Ma ritenuta questa pia credenza, e ritenuto che abbiano tutti l' animo retto e incontaminata la mano, bisogna però sempre assegnare una somma non lieve per pagare gli stipendj degli agenti e soddisfare le spese degli uffizj. E per comprendere a quale importo possano elevarsi questi stipendj, basta osservare i conti che in Inghilterra presentano gli amministratori delle tasse dei poveri, nei quali, anche dopo le riforme operate nel 1832, i dispendj stessi ammontano a tal somma che si direbbe favolosa, e che io non riferisco, seguendo l' insegnamento dell' Alighieri che ammonisce a chiuder le labbra a quel vero che ha faccia di menzogna. Certamente si deve sperare che in tale argomento non si giunga fra noi a quegli eccessi a cui si giunge in Inghilterra, dove tutto trascende e virtù e vizio e ricchezza e miseria; ma, salve le debite proporzioni, l' esempio dell' Inghilterra è sempre solenne ed istruttivo; e ad ogni modo egli è un fatto, che tutti più volte abbiamo potuto vedere coi nostri proprj occhi, che nella beneficenza uffiziale una quota considerabile esser deve sottratta dalla cassa dei poveri ed applicata

al pagamento di spese e di stipendj. Un'altra cagione della perdita suindicata è la condizione speciale degli agenti ed impiegati, i quali avendo relazioni più o meno estese e simpatie più o meno vive ed una maggiore o minore propensione a cedere alle altrui istanze, facilmente condiscendono alle diverse loro inclinazioni e sovente prestano soccorsi che nessun bisogno richiede, o li prestano in misure al bisogno superiori. Questi atti d'improvvida parzialità, questi mal collocati benefizj sono vere dispersioni della sostanza dei poveri, sono acque che deviano dai loro canali, sono forze che non concorrono a muover la macchina a cui sono applicate; ed è un disordine irreparabile, poichè non havvi attenzione nè oculatezza che basti ad avvisare questi atti sì frequenti e sì minuti, ed anche assiduamente sopravvegghiandoli non si può impedire che si commettano. Una terza cagione della perdita sopra lamentata si è il modo, con cui generalmente parlando, gli agenti di cui parliamo adempiono le loro incombenze. Ben considerando questo modo, si direbbe che una gran parte di essi non abbiano mai conosciuto od abbiano totalmente dimenticato quella verità, che quanti viviamo sulla terra siamo tutti fratelli ed abbiamo tutti lo stesso diritto alle dispensazioni del gran Padre della famiglia. Poichè fallacemente reputando che le classi indigenti siano vili ed abbiette e non meritino alcun particolare riguardo, esercitano l'uffizio loro assegnato con una freddezza, con una infingardaggine, con una negligenza, che guasta affatto e quasi distrugge i frutti della beneficenza. Non badando il più delle volte alla sostanza della impresa che è il sollievo dei miseri, essi non hanno altra norma al loro operare, che il regolamento, non altra misura che l'orario; e non avviene quasi mai che la gravità o l'urgenza dei casi gl'induca a prendere qualche straordinaria risoluzione e ad abbandonare per un solo istante le forme prefisse. In questa guisa i soccorsi offerti con mano lenta e perplessa divengono tardi, inefficaci e molte volte inutili.

Nessuna però di queste cagioni di danno e di perdita si ha comunemente da lamentare nella beneficenza spontanea. Poichè, in primo luogo, non è mestieri per questa nè di uffizj, nè di agenti, nè di qualsivoglia altro aggravio di tal genere. Gl'individui che, mossi da vero e caldo amore per l'umanità si danno all'esercizio di questa magnanima virtù, adempiono da sè stessi ogn'incombenza, nè rifuggono da alcuna cura, nè alcuna molestia fastidiscono, e si fanno con eguale alacrità a investigare, ad esaminare, a visitare, a riconoscere il vero, a ritrovare il modo di soccorrere e a distribuire i soccorsi; e se troppa è la faccenda, più individui si uniscono in fraterne associazioni e tutti cooperano collo stesso inten-

dimento, collo stesso spirito, collo stesso zelo. In secondo luogo, non possono tra essi aprirsi l'adito quelle viste indirette per le quali da mercenarj pur troppo sovente si trascorre ad atti men che retti e convenienti. Poichè nella spontanea beneficenza non si prova altro impulso che l'amore, nè si segue altra norma che quella del fatto e della verità; e quindi per dare un soccorso non si pone mente che alla realtà del bisogno ed al grado di esso; ed ogni altra differenza sparisce ed i benefizj sono distribuiti con sicura rettitudine e con perfetta imparzialità. Finalmente nessuno penserà di porre a confronto lo zelo dei volontarj benefattori con quello degli agenti della beneficenza uffiziale. Havvi troppa diversità tra le origini di queste due maniere di beneficenza e tra gl'impulsi da cui sono governate, perchè soltanto possibile sia un tale confronto. La beneficenza spontanea nasce dall'amore e ritragge dal suo principio, ed è, come l'amore, ardente e inesauribile. Essa non pone nè mete, nè limiti alle sue imprese, nè alcun riguardo la trattiene, nè alcun ostacolo l'arresta; e se nel fervore dell'opera il concetto della impresa si allarga, essa pure allarga le sue braccia, ed a pro' dei miseri che per sua parte si elesse, essa moltiplica i suoi sforzi con tale perseveranza e con tal successo che ben si comprende, che la Provvidenza investe del suo potere quelli che sortirono l'alto privilegio di rappresentarla sulla terra. La religione si associa con santa adesione a questi imprendimenti generosi, e francheggiati gli animi da essa vediamo ai nostri giorni quei portenti di carità, a cui nell'attonita mente stanno collegati i nomi del Cottolengo, del Mazza, dell'Olivieri, del nostro Canal e di altri magnanimi, per le virtù dei quali il genere umano può ancora confortarsi di una eredità di amore, di coraggio, di annegazione, di sacrifizio.

III. Una peculiare condizione della beneficenza uffiziale è pur quella ch'essa per adempiere il suo assunto deve aggravare gli altri, ed ottenere dagli altri per forza, ciò che vuol quindi largire per grazia. Poichè quando i Governi vogliono ingerirsi nel grave affare di alleviar la miseria, essi d'ordinario chiamano le subordinate Corporazioni, e principalmente i Comuni, o a prestare soccorsi effettivi ed immediati, o ad adoperare in qualsivoglia modo affinchè al bisogno si provveda. E per far ciò devono quelle corporazioni distribuire il carico sopra gl'individui che le compongono ed impor tasse e balzelli sopra quelli che, secondo le leggi, devono concorrere a sostenere i pesi comuni; e da ciò parecchie conseguenze derivano. In primo luogo le tasse imposte a favore dei poveri sono in parte dai poveri stessi inevitabilmente pagate. Avviene infatti che quegl'indi-

vidui, i quali possedendo una tenue rendita stanno sul tirato e vivono a frusto a frusto, quando sono per qualsivoglia ragione aggravati di una nuova imposta, soffrono una vera distretta e manca ad essi il modo di soddisfare ai bisogni proprj e delle rispettive famiglie; e per tal modo la povertà richiede un soccorso, ed il soccorso genera una nuova povertà con un circolo, non saprei dire, se più vizioso od assurdo. E devesi notare eziandio che siccome siffatti straordinarj provvedimenti si adottano nei casi di straordinarie calamità, così in questi casi per una strana e maleaugurata combinazione hayvi una classe numerosa per la quale gli aggravj si aumentano a proporzione che si aumentano i bisogni, onde cresce lo scompiglio delle piccole fortune e la piaga della povertà si dilata. In secondo luogo, le imposte e le tasse che si esigono a benefizio dei poveri sono da questi considerate come una loro particolare proprietà; ed essi ricevono le quote a cadauno spettanti senza gratitudine alcuna e quasi come il creditore riceve il pagamento di un debito; e quelli che hanno l'obbligo di pagarle, sentendo di aver alle spalle gli agenti del fisco colla loro sferza e colle loro minaccie, le pagano con una propensione che ognuno può immaginare facilmente. Perciò da una parte supposizioni maligne, pretensioni indiscrete, pensieri smodati; dall'altra fastidio, crescente renitenza ed impazienza iraconda; ed in tal guisa fra i benefattori e i beneficati ogni legame si rompe, e la beneficenza così perde le principali qualità di cui dev'esser fornita e che propriamente la costituiscono.

IV. Ma ciò che importa più di tutto si è che la beneficenza uffiziale pegli stessi principj sui quali è fondata e pegli effetti che produce non è mai adeguata e sufficiente al suo scopo. Ciocchè apparirà egualmente vero o la si consideri dal lato morale o dall'economico. Poichè non si può rivocare in dubbio che la beneficenza per compier bene la opera sua deve soddisfare ai bisogni del povero, ma deve eziandio alleviarne i dolori, deve soccorrere alla materiale indigenza, ma raddolcire altresì e mitigare il contristamento degli animi; e pel primo oggetto apprestare alla miseria alimenti, rimedj, vestiti e ricovero, e pel secondo confortarla di cure, di consolazioni, di consigli, di preghiere. Ora l'una cosa far possono i Governi colla loro potenza, l'altra non possono, perchè l'amore non viene a portare i suoi conforti agli uomini per la via dei protocolli e delle gabelle. Che se poi la osservazione dal lato morale si volga all'economico, si scorgerà chiaramente che per quanto i Governi adoperino coi loro provvedimenti a soccorrere ai bisogni materiali degl'indigenti, essi rimangono sempre

lungi dalla meta prefissa e non giungono mai ad ottenere un effetto che alle loro cure ed ai loro desiderj pienamente corrisponda. E di ciò le ragioni sono moltiplici e manifeste, poichè oltre alle sottrazioni ed alle dispersioni che, siccome abbiamo già detto, nascono per le spese e pegli stipendj degli ufficj e per negligenza, il disordine e le parzialità con cui si distribuiscono i soccorsi, avviene altresì che a fronte della beneficenza uffiziale sparisce la spontanea e cessano quasi affatto le particolari prestazioni e quegli ajuti che, sebben tenuissimi ed anzi minuti, apportano però un immenso vantaggio perchè sono infinitamente moltiplicati e vanno direttamente colà, dove il bisogno li richiede; la qual cessazione molto naturalmente proviene e dalla supposizione che ad ogni male e ad ogni bisogno sia stato già dalla competente Autorità riparato, dalla mancanza delle impressioni che la miseria opera immediatamente, e soprattutto dalla difficoltà di sostenere il doppio carico della beneficenza uffiziale e della spontanea. Devesi finalmente osservare che quando i Governi fanno sicurtà ai poveri di un perenne provvedimento, questi mettono in non cale l' opera e la produzione, e dimenticano la legge del lavoro e si abbandonano a quella vita vacua ed accidiosa che fu nel maggior numero dei casi la origine prima della loro indigenza. Da tutte queste cagioni e dalle ultime singolarmente proviene quell' effetto, che abbiamo indicato, la insufficienza cioè della beneficenza uffiziale a raggiungere il suo scopo; ed egli è un fatto che a mano a mano che i Governi soccorrono, la povertà cresce, e cresce in tali proporzioni, che alla fine addiviene impossibile provvedervi. La beneficenza spontanea invece senza preparare alcun disegno, senza prefiggersi alcun sistema, senza alcun apparato di uffizj e d'impiegati, senz'alcun provento d' imposte e di tasse segue con pietosa sollecitudine le traccie dei poveri e coglie la sventura sul fatto; e non lasciandosi sgomentare nè dall' ampiezza, nè dalla gravità del male, confida in Dio, moltiplica le sue cure unisce con ben regolate associazioni le forze disperse, e non vien meno giammai. Però in questa beneficenza non inferiore all' alacrità delle cure e dei pensieri è la sottigliezza degli accorgimenti, e pari alla premura di alleviare il bisogno vero è la oculatezza nel distinguere il falso; e se concede largamente, sa anche negar fermamente quando è mestieri. E soprattutto questa beneficenza provvede che il povero faccia uso delle sue forze quando ne sia fornito e non le renda inutili ed infruttuose colla ignavia; e con tal vista la vedi in un luogo allestire una officina, in un altro aprire una scuola, e far che qui s' intraprenda un lavoro, e là si mandi materia di lavoro alle case rispettive. In questo modo, se la bene-

ficenza spontanea non ripara intieramente a tutti i mali della povertà, chè ciò le umane forze supera di gran lunga, almeno per essa la povertà non cresce, e i sovvenimenti che distribuisce non divengono alimento d' ozio e fomite d'infingardaggine.

Della grande efficacia ed attività di siffatta beneficenza può aversi una prova evidente e il discorso può ridursi ad un termine semplice e positivo, quando si ponga mente al fatto, che fra noi è rarissimo il caso che un uomo muoja di fame. A questa estrema sciagura, il cui solo pensiero fa rabbrividire ogni animo bennato, non si giunge quasi mai ; ed al solo anche lontano apparire di tal pericolo tutti insorgono ansiosamente ; e magistrati e sacerdoti e privati tutti si affaccendano con paurosa pressa intorno al povero pericolante, e se un solo pane, se un solo soldo rimane, esso è certo dato a salvarlo. Che se pure talvolta il duro fatto si compie, ciò avviene quando que' poveretti farneticando per fame vanno errando pei campi e nelle boscaglie, e celati a tutti e per necessità derelitti periscono miseramente. All' incontro in Inghilterra, dove la beneficenza uffiziale si esercita con intendimenti e con mezzi amplissimi, e dove all' esercizio di essa si assegnano somme smisurate, trasandando gli spettacoli che offre colà la miseria e che in nessun luogo a gran pezza sono così orribili, così nefandi, così schifosi, così ributtanti, in Inghilterra, io dico, i Giornali con una spaventevole frequenza ci narrano di madri che vanno coi loro figli ad annegarsi per fame; d'individui che nelle remote contrade di Londra si trovano morti d' inedia ; d' intere famiglie che disperate di cibo, e cieche ad ogni lume di ragione e di Dio, affrettano la fine dei loro giorni o col ferro, o col veleno, o col carbone. E si lesse in un accreditato giornale scientifico nel 1857, che, secondo i dati desunti da uffiziali dichiarazioni, nell' anno antecedente, nella sola Irlanda erano morti di fame 21770 individui ; ed a siffatta notizia soggiungeva il *Times* doversi ritenere, che assai al di sotto del vero fosse tal numero. Questi fatti per comprovare la insufficienza comparativa della beneficenza uffiziale non hanno certo d' uopo di commenti.

I ragionamenti fatti finora per dimostrare non dover i Governi prendere una piena e diretta ingerenza nel gravissimo affare di provvedere agli ordinarj e straordinarj bisogni delle classi indigenti, non si riferiscono in alcun modo alla tutela che i Governi stessi devono esercitare degl' Istituti di Beneficenza. Dacchè i sovvenimenti pei poveri provenienti da pietose largizioni si consolidano e divengono permanenti e per la volontà dei largitori devono essere ad un

determinato e peculiare oggetto perpetuamente assegnati, essi formano una parte preziosa del patrimonio dello Stato, il quale col mezzo de' suoi ministri deve vegliare, affinchè tale sostanza sia accuratamente conservata e fedelmente applicata all' uso prestabilito. Questo uffizio è così proprio dei Governi, così inerente alle naturali loro attribuzioni, così legittimo, così necessario, che nessun dubbio intorno ad esso può accogliersi, e devesi anzi far voti che questa tutela sia continua ed attiva, purchè però siano in essa ammesse le modificazioni richieste dai tempi e dal progresso dei lumi e della civiltà, e purchè sia condotta con tal discreta larghezza che il regolamento non ammorzi l' amore dell' umanità e le forme non contrastino alla sostanza ch' è il bene dei poveri.

Ritenuta quest' avvertenza, l' adottare il principio che per soccorrere ai bisogni dei poveri deve la beneficenza uffiziale cedere il luogo alla spontanea, non toglie che rimanga ai Governi una gran parte da adempiere, una parte che basta a dare ampiezza alle loro cure ed utilità ai loro studj, ed a conservare ad essi quell' eminente presidio che loro spetta anche in tale argomento; e questa parte è quella di prevenire i bisogni anzidetti e di provvedere che, per quanto far si possa, sieno tolte le cause dalle quali la povertà principalmente proviene. Nella quale impresa sarà pure potente ausiliario dei Governi e loro cooperatore efficace l' amore. E bella più che mai e grata e profittevole sarà questa opera di amore. Poichè l' amore in tal caso non domanda nè sforzi penosi, nè dure prove, nè privazioni dolorose, ma richiama soltanto a fare il bene. E questo fare il bene è una sì dolce cura, che deesi riputar beato chi abbia il potere di farlo e lo faccia. Ora soltanto col fare il bene si può prevenir la povertà ed impedire che cresca e si allarghi sino a divenire un flagello della società. Poichè il mezzo di arrivare a tal fine quello si è di portare la prosperità dello Stato al più alto grado possibile e di promuovere il maggiore possibile sviluppamento di tutte le forze che lo sorreggono, delle forze cioè intellettuali, morali ed economiche. Nè io mi farò qui a specificare i varj modi di operare quel massimo bene ch' è l' incremento della pubblica prosperità; poichè non farei che dilungarmi soverchiamente per ripeter ciò che più volte con tanta filosofica ragione fu da sapientissimi uomini insegnato. Ma egli è certo che l' ordine fermamente mantenuto, e la religione onorata e protetta, e la morale colle istituzioni e cogli esempli insegnata e munita di convenienti presidj; che una legislazione buona del pari per la sostanza delle leggi e per la forma della esecuzione, e un' amministrazione fondata sulla giustizia ed affidata ad illu-

minati e probi magistrati, e un sistema d' imposte e di tasse non eccessivo e soprattutto non vessatore; che il promuovere e l' incoraggiare ogni genere d' industria e il liberare da vincoli il commercio, preservandolo però in pari tempo da quelle avare e crudeli speculazioni che specialmente in tempo di carestia tolgono il pane al povero per renderglielo a prezzo di sangue; che, finalmente serbar la concordia fra le varie classi degli abitanti in guisa che formino una famiglia e non una masnada; egli è certo, io diceva, che tutti questi mezzi serviranno direttamente a prevenire la miseria crescendo la comune prosperità e facendo che una congrua fortuna entri tutte le porte così dei palagj che delle casipole, e ne bandisca quelle perverse inclinazioni, quelle agitazioni, quei contrasti che sono pur troppo della miseria stessa la prima e più frequente cagione. Nessuno negherà, io credo, che sia questa in materia di beneficenza la parte più bella e più onorevole che possano scegliersi i Governi; adempiendo la quale essi salveranno le genti soggette dal pericolo di fatali decadimenti, di perdizioni e di ruine, e sè stessi dall' altro pericolo di dover in seguito adottare provvedimenti o fallaci, e inadeguati, o dannosi. E ad ogni modo è sempre meglio non fare i poveri, che dopo fatti soccorrerli.

Però la beneficenza spontanea ha bisogno essa pure della protezione dei Governi; e questa protezione anzi forma parte dei doveri che in tal materia ai Governi stessi appartengono. Poichè non di rado quella beneficenza incontra strane e contumaci opposizioni; talvolta dal fondo dell' abbiezione e della miseria s' innalzano voci sinistre e calunniose contro di essa per rallentarne le imprese e per impedirne i successi; spesso si attraversa l' accidia agli ottimi imprendimenti, e l' orgoglio li fastidisce con iracondo disprezzo, e la invidia imperversa; talora eziandio l' ignoranza e la malignità dei beneficati insorgono contro i benefattori; questi finalmente nella moltitudine delle sventure e degli sventurati non hanno qualche volta mezzi adeguati all' uopo ed è mestieri che dall' alto si venga in loro ajuto. Ora la protezione dei Governi può riparare a tutto; può rimuovere ogni difficoltà e superare ogni ostacolo; può sperdere ogni stolta e invereconda parola; può fare in qualche grave distretta che anche i pubblici erarj con una congrua elemosina soccorrano ai privati benefattori; può, insomma, siffatta protezione congiungere la sua forza alle forze dell' amore e francheggiarlo e farlo più pronto ed animoso a spianare la via ed a raggiungere le mete prefisse. Perciò, prestando la loro protezione, o la prestino con mezzi morali, o con pecuniarj, i Governi devono considerarsi soltanto

come ajutatori dell' opera dei privati, e astenersi quindi con gran cura dal prendere in questa opera alcuna ingerenza diretta, e soprattutto dall'aggiungere all' efficacia degl' impulsi spontanei la forza dei comandi. Imperciocchè si conchiude, che pel vantaggio reale dei poveri e per lo stesso decoro del genere umano, la beneficenza dev' esser tutta un' ispirazione di virtù, una gara di amore, un apostolato di carità.

(*Letta il 14 novembre* 1859.)

SPOSIZIONE

DEI

NUOVI METODI DI GEOMETRIA ANALITICA

MEMORIA

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

1. Volendo riprendere l' argomento della classificazione delle curve algebriche, mi sembrava opportuno di premettere i principii dei nuovi metodi di Geometria analitica, che rendono facile lo studio delle proprietà delle curve; questa parte del mio lavoro si è talmente estesa da sembrarmi opportuno di presentarla separatamente al vostro giudicio. Desidererei che Voi trovaste che io abbia, con qualche utilità degli studiosi Italiani, riuniti in una chiara e sistematica esposizione i calcoli inventati e promossi dai Geometri Tedeschi ed Inglesi, e pei quali i metodi analitici (che meglio direbbonsi algebrici) poterono gareggiare coi metodi geometrici, che tanto li avevano sopravanzati per opera specialmente dei Geometri Francesi. Prego mi si permettano alcune nuove denominazioni, delle quali spero che l' uso mostri l' utilità; l' indice alfabetico servirà, ove occorra, a trovarne il significato. Secondo un proposito fatto da qualche tempo aggiungo anche a questa memoria le citazioni dei lavori che vi si riferiscono, e che almeno in parte io conosco.

2. Mentre in Geometria vana sarebbe la distinzione tra la sintesi e l' analisi, chè questi due processi di ragionamento vi stanno commisti e servono promiscuamente sia alla scoperta di nuove verità, sia alla loro dimostrazione, è invece abbastanza essenziale la distinzione tra metodi geometrici e metodi algebrici: i primi consistono nello studio delle relazioni di figura e di quelle più semplici

relazioni di quantità che nulla o poco oltrepassano le proporzioni, a cui soltanto si aggiunge la considerazione delle grandezze infinitesime; i metodi algebrici consistono invece nell' applicazione alla Geometria della estesissima scienza delle quantità. Siccome l' oggetto della Geometria è duplice: forma e grandezza, così i metodi algebrici hanno necessariamente alcun che di indiretto e di arbitrario nell' applicarsi allo studio della forma. Il metodo delle *equipollenze* e quello dei *quaternioni* partecipano in qualche maniera dei metodi geometrici e degli algebrici, l' oggetto della Geometria vi è sottoposto a calcolo, ma questo non è un calcolo algebrico, chè allora riguarderebbe soltanto le quantità, bensì un calcolo speciale che riguarda ed esprime tutto l' oggetto della Geometria (grandezza e posizione) sicchè si presta direttamente e senza arbitrarii artificii alla risoluzione delle questioni geometriche.

3. Gli antichi Geometri non avevano potuto servirsi che dei metodi geometrici, le scoperte da loro fatte sono frutti del genio e di assiduo studio; e quantunque nella ricerca delle proprietà delle sezioni del cono avessero potuto intravedere il fecondissimo principio della *derivazione*, pure non seppero trarne il partito di cui era suscettibile. I Geometri moderni possessori dell' Algebra, potentissimo mezzo di ricerca in tutto ciò che riguardi quantità, ne fecero l' applicazione alla Geometria, la quale ricevette da ciò estensione e facilità mirabilissime. I metodi geometrici erano il più spesso condannati a ricercare con grande sforzo d' ingegno ciò che col calcolo poteva trovarsi direttamente; se non che Poncelet, Chasles, Steiner, ed altri Geometri moderni introdussero nella Geometria pura tale eleganza e generalità di processi da sopravanzare di gran tratto la Geometria analitica, nella quale sembrava che occorressero lunghissimi calcoli per giungere a quelle conseguenze, che i metodi geometrici lasciano scorgere quasi intuitivamente. Pure anche i metodi algebrici adottando maggior generalità poterono a lor volta gareggiare coi metodi geometrici.

4. *Divisione della memoria.* All' esposizione dei metodi, che più propriamente formano l' oggetto di questa memoria, prepongo il metodo delle *equipollenze*, perchè mi pare che i suoi principii vadano adottandosi dai Geometri, e sieno naturale introduzione al calcolo *baricentrico* ed al *baricentrale*. Nel metodo delle equipollenze si hanno due parti distinte, quella che può considerarsi come una maniera di esprimere il calcolo baricentrico ed il metodo delle coordinate parallele, e quella che riguarda prodotti e rapporti di rette, ed offre per le figure piane speciali risorse non somministrate dagli antichi metodi. — Espongo

da poi il metodo delle coordinate Cartesiane e quello delle coordinate Pluckeriane: il calcolo baricentrico del Möbius può considerarsi come una generalizzazione delle coordinate Cartesiane; similmente il calcolo *baricentrale*, che da parecchi anni avevo immaginato, porta a quella generalizzazione delle coordinate Pluckeriane, che il Salmon dice coordinate tangenziali. Acciocchè la conoscenza dei metodi sia compiuta e riesca proficua, è necessario abituarsi ad adoperarli; io scelgo perciò alcuni esempii relativi principalmente alle curve: collo stesso scopo della classificazione di queste do il modo di distinguere i punti singolari ed i punti all' infinito. — Faccio poscia vedere come i metodi delle coordinate si estendano allo spazio, e prima alle figure formate intorno ad un punto ossia alle figure descritte sulla sfera; aggiungo pure i principii del calcolo dei *quaternioni*. — Non parlo di proposito della teoria dello Steiner sulle figure elementari (cioè serie di punti in linea retta, serie di raggi passanti per un punto, ecc.) nè dei rapporti *anarmonici*, di cui fece tanto uso il Chasles; perchè queste teorie le considero come appartenenti ai metodi geometrici piuttostochè agli algebrici.

I.

PRIMA PARTE DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE.

5. *Principii.* Coll' indicazione di una retta AB nel metodo delle equipollenze s' intende il passaggio dal punto A al punto B, sicchè AB e BA sono due rette bensì eguali ma di opposte direzioni, cioè

$$(1) \quad BA \simeq -AB \quad , \quad AB + BA \simeq 0.$$

Se al passaggio indicato da AB sussegua quello indicato da BC, l'effetto complessivo è il passaggio da A a C, il che io scrivo così

$$(2) \quad AB + BC \simeq AC$$

ed intendo che la *somma-geometrica* (composta-equipollente) delle rette AB BC è equipollente alla AC. Credo che questa equipollenza fondamentale (2) fosse del tutto nuova quando io la pubblicai nel 1833; ora sotto differenti aspetti essa è adottata da molti Geometri, per esempio Saint-Venant, Cauchy, Grassmann, Hamilton. Due rette sono *equipollenti*, e l' una può scambiarsi coll' altra, soltanto quando esse sono eguali parallele e dirette per lo stesso verso;

ciò posto è facile vedere come si *sommino geometricamente* anche due rette che immediatamente non si succedono; così per costruire la

$$(3)\quad AB+DE\simeq OR$$

da un punto qualsivoglia O si tirerà una retta $OP\simeq AB$ (leggasi OP equipollente ad AB), cioè la OP sia uguale parallela e diretta per lo stesso verso della AB, poi le si farà succedere la $PR\simeq DE$, e la OR (essendo equipollente ad OP+PR) sarà la somma geometrica desiderata.

6. Un coefficiente numerico apposto ad una retta serve a moltiplicarne la lunghezza mantenendone la stessa direzione; così, per esempio, la

$$(4)\quad OM\simeq 3.AB$$

significa che la OM è parallela alla AB, ha una lunghezza eguale a 3 volte la AB, ed il passaggio da O ad M si fa nello stesso senso di quello da A a B. Se il coefficiente fosse negativo, è facile intendere, in forza della (1), che esso rovescia la direzione della retta. Così, per esempio, la

$$(5)\quad PQ\simeq -\tfrac{1}{2}AB$$

significa che la PQ è parallela alla AB ma diretta in senso opposto, e che la lunghezza della prima è la metà di quella della seconda. Poniamo

$$(6)\quad CP\simeq\tfrac{1}{2}CB\ ,\quad (7)\quad 2.CQ\simeq -AC\ ,$$

la prima di queste equipollenze significa che il punto P appartiene alla retta CB, poichè altrimenti CP non potrebbe esser parallela alla CB, si vede pure che P è il punto di mezzo della CB, perchè $CP=\tfrac{1}{2}CB$; per la (7) CQ dev' esser parallela alla AC ma di opposta direzione (a motivo del segno —) inoltre la lunghezza di AC dev'essere doppia di CQ, dunque Q sarà il punto di mezzo della AC. A motivo dell' equipollenza fondamentale (2) si ha $CP+PQ\simeq CQ$, ossia $PQ\simeq CQ-CP$ e sostituendovi le (6) (7) $PQ\simeq -\tfrac{1}{2}AC-\tfrac{1}{2}CB\simeq\tfrac{1}{2}BA$, cioè la (5) è conseguenza delle (6) (7), come risulta da una notissima proprietà del triangolo CAB, e della retta QP che ne dimezza due lati. È facile intendere come con questi principii si formi la somma-geometrica di quante si vogliano rette accompagnate da coefficienti positivi o negativi, e si rimarrà persuasi esser indifferente l'ordine, con cui si prendono le rette, che vogliono insieme *comporsi*. Questa composizione si ricorderà più di leggieri notandone l' analogia colla composizione delle forze.

7. *Congruenze.* Diremo che un punto ed una retta sono *congruenti* quan-

do un punto appartiene alla retta, ossia questa passa per quello: la condizione di *congruenza* del punto R e della retta indefinita AB è espressa dall' equipollenza

$$(1) \quad AR \simeq r.AB$$

essendo r un coefficiente arbitrario; se esso sia positivo e minore di 1, R cadrà tra A e B, se sia $r > 1$, R starà sulla prolungazione della AB, e se r sia negativo, R starà sulla prolungazione della BA dalla parte A. Se i punti A B R sieno riferiti ad un punto C posto fuori della retta AB, la condizione di congruenza di R con AB è data da

$$(2) \quad CR \simeq (1-r)\,CA + r.CB,$$

la somma dei coefficienti di CA e di CB essendo l' unità, cioè uguale al coefficiente di CR; infatti la (1) dà (mediante la solita fondamentale (2) del § 5) $CR - CA \simeq r.CB - r.CA$. Alla (2) può darsi la forma più generale

$$l.CA + m.CB + n.CR \simeq 0$$

e la condizione che i tre punti A B R sieno in linea retta sarà

$$l + m + n = 0.$$

Più generalmente, se i punti R R′ R″ sieno legati ai tre A B C col mezzo delle equipollenze

$$l.CA + m.CB + n.CR \simeq 0$$
$$l'.CA + m'.CB + n'.CR' \simeq 0$$
$$l''.CA + m''.CB + n''.CR'' \simeq 0,$$

la condizione che RR′R″ sieno in linea retta si trova espressa per la teoria dei determinanti da

$$(3) \quad | lm'n'' | = lm'n'' - lm''n' - l'mn'' + l'm''n + l''mn' - l''m'n = 0.$$

8. *Applicazione.* Determinare il punto d' intersezione delle diagonali del trapezio ABML. La condizione di parallelismo di due lati è espressa da $LM \simeq m.AB$, sicchè $AM \simeq AL + m.AB$; la congruenza tra il punto cercato X e la diagonale AM si esprimerà con

$$AX \dot{\simeq} AM \simeq AL + m.AB$$

dove il segno $\dot{\simeq}$ indica che a stabilire l' equipollenza manca un coefficiente numerico all'uno dei due membri; tal coefficiente si determinerà in guisa (§ 7) che X sia congruente coll' altra diagonale BL, e perciò si avrà

$$AX \simeq \frac{1}{m+1} AL + \frac{m}{m+1} AB.$$

9. *Teorema di Pappo su* 9 *punti a* 3 *a* 3 *in* 9 *rette.* Se sui lati paralleli del predetto trapezio ABML sieno presi i punti R N determinati da

$$AR \simeq r.AB \quad , \quad LN \simeq n.AB$$

l' intersezione Z delle diagonali del trapezio RBMN si troverà osservando che

$$RZ \simeq p.RM \simeq p.AL + p(m-r)\,AB \simeq p.AN + p(m-r-n)\,AB$$

ed $$AZ \simeq r.AB + RZ \simeq p.AN + (r + pm - pr - pn)\,AB$$

sicchè la condizione che Z sia congruente colla retta BN sarà (§ 7) $p + r + pm - pr - pn = 1$, perciò

$$AZ \simeq \frac{(1-r)\,AN + (m-n)\,AB}{1+m-r-n} = \frac{(1-r)\,AL + (m-nr)\,AB}{1+m-r-n} .$$

Se in questa espressione di AZ poniamo $n = r = 0$ otteniamo la predetta (§ 8) AX , e se in questa mutiamo m in $\frac{n}{r}$ ed AB in $r.AB$ abbiamo pel punto Y intersezione delle diagonali AN RL del trapezio parziale ARNL

$$AY \simeq \frac{r.AL + nr.AB}{r+n}$$

È facilissimo lo scorgere che

$$(1+m-n-r)\,AZ \simeq (1+m)\,AX - (r+n)\,AY$$

la quale, essendo $1+m-n-r = 1+m-(r+n)$, mostra (§ 7) che i tre punti X Y Z sono in linea retta. — I calcoli per determinare AZ sarebbero riusciti più eleganti ponendo

$$\begin{array}{rr} x.AL + y.AB + AZ \simeq 0 & x.AL + y.AB + AZ \simeq 0 \\ -AB + AB \simeq 0 & -r.AB + AR \simeq 0 \\ -AL - n.AB + AN \simeq 0 & -AL - m.AB + AM \simeq 0 \end{array} \quad ,$$

sicchè le due condizioni che ZBN e ZRM sieno linee rette sarebbero state per la (3) del § 7

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -n & 1 \end{vmatrix} = -x + nx - y - 1 = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -r & 1 & 1 \\ -1 & -m & 1 \end{vmatrix} = -rx + mx - y - r = 0$$

colle quali si sarebbero determinate x ed y ; ma è un vantaggio del metodo delle equipollenze di non dover ricorrere a formule precedentemente stabilite, e di poter dedurre ogni conseguenza immediatamente dai principii del metodo. — Il presente teorema essendo *projettivo*, cioè tale che si mantiene in ogni projezione, basta dimostrarlo pel caso di un trapezio, od anche soltanto di un parallelogrammo ABML (il che corrisponde ad $m=1$) ed esso rimane stabilito per ogni quadrilatero, e pei due punti R N presi comunque sui lati opposti AB LM.

10. *Curve algebriche ed algebrico-razionali.* Se C A B sono punti fissi, e le variabili x y sieno tra loro legate dall' equazione

$$(1) \quad f(x,y)=0$$

l' equipollenza

$$(2) \quad CM \simeq x.CA + y.CB$$

appartiene a tutti i punti M di una linea, ed è evidente che per tal modo questa linea viene a riferirsi agli assi coordinati CA CB , l' ascissa essendo $x.CA$ e l' ordinata $y.CB$: se le CA CB fossero ambedue uguali all' unità, le x y sarebbero le ordinarie coordinate; prendendo invece le CA CB di opportuna lunghezza si rendono più semplici le formule. Quando l' equazione (1) è algebrica, tale si dice anche la curva. Che se ambedue le x y possano esprimersi razionalmente col mezzo di una variabile t , alle curve do il nome di *algebrico-razionali;* esse meritano d' essere distinte dalle curve soltanto algebriche; per determinarne l'ordine bisogna esprimere x y con due frazioni a denominatore comune, il grado massimo della t in questo denominatore o nei due numeratori sarà l' ordine della curva; così, per esempio, la curva

$$CM \simeq \frac{t^2-1}{t^2} CA + \frac{t^2-1}{t} CB$$

è del 3.° ordine, perchè riducendo i coefficienti di CA e CB a denominatore comune sorge la potenza t^3.

11. La tangente alla curva (2) nel punto M è data dal limite della secante, che congiunge il punto M con un punto M′ , che indefinitamente si avvicini ad M , essa è perciò la retta

$$(3) \quad MT \simeq d.CM \simeq dx.CA + dy.CB$$

indicandosi con dx dy le derivate delle x y rispetto alle t, di cui si suppongono funzioni; che se sono legate dall'equazione (1), il rapporto delle dx dy è dato dall' equazione derivata

$$(4) \quad f'_x dx + f'_y dy = 0 \quad .$$

Un' altra retta importante per ciascun punto della curva, giacchè serve a determinarne la curvatura, è la

$$(5) \quad MU \simeq d^2x . CA + d^2y . CB \simeq d^2 . CM \quad .$$

12. *Ellisse.* È facilissimo intendere che tutto quanto si fa coll' ordinario metodo delle coordinate e col calcolo baricentrico può farsi anche col metodo delle equipollenze, il quale con una particolar segnatura comprende e l' uno e l' altro. Prendiamo, per esempio, a considerare l' ellisse espressa da

$$CM \simeq x . CA + y . CB \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ;$$

la derivata di questa equazione è $x dx + y dy = 0$, perciò la tangente è data da

$$MT \simeq d . CM \simeq -y . CA + x . CB \quad .$$

Se vogliamo trovare il punto T_1, in cui questa tangente incontra l' asse coordinato CA, bisognerà moltiplicare la MT per tal numero che poi sommata-geometricamente con CM dia una retta parallela alla CA; avremo perciò

$$CT_1 \simeq x . CA + y . CB + \frac{y}{x} (y . CA - x . CB) \simeq (x + \frac{y^2}{x}) CA \simeq \frac{1}{x} CA \quad ;$$

è facile scorgere la relazione che essa ha coll' ascissa $CQ \simeq x . CA$.

13. Poniamo $CA' \simeq \alpha . CA + \beta . CB$, $CB' \simeq \beta . CA - \alpha . CB$, essendo α β due numeri sottoposti all' equazione $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, i punti A' B' apparterranno essi pure all' ellisse, e la tangente in A' sarà parallela al semidiametro CB' , e viceversa. Se ne deduce $CA \simeq \alpha . CA' + \beta . CB'$, $CB \simeq \beta . CA' - \alpha . CB'$, e sostituendo si ha

$$CM \simeq (\alpha x + \beta y) CA' + (\beta x - \alpha y) CB' \quad ,$$

dove essendo $(\alpha x + \beta y)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 = 1$ si vede che tutte le proprietà dei semidiametri CA CB spettano anche ai CA' CB' .

14. Nel determinare la tangente MT abbiamo supposto $dx = -y$, $dy = x$, il che dà $d^2x = -dy = -x$, $d^2y = dx = -y$, e quindi abbiamo la retta

$$MU \simeq d^2.CM \simeq -x.CA - y.CB \simeq -CM \simeq MC ;$$

cioè il punto U coincide per tutti i punti della curva col centro C . — Se si fosse fatta un' altra ipotesi, per esempio $dx = 1$, e quindi, a motivo della $x dx + y dy = 0$, $dy = -\frac{x}{y}$, si avrebbe avuto $d^2x = 0$, $d^2y = \frac{-y + x dy}{y^2} = \frac{-1}{y^3}$, perciò a

$$MT_0 \simeq CA - \frac{x}{y} CB \quad \text{corrisponde} \quad MU_0 \simeq -\frac{1}{y^3} CB .$$

15. *Parabola.* La più semplice equipollenza della parabola è

$$OM \simeq t^2.OA + t.OB ;$$

che dà la tangente $MT \simeq 2t.OA + OB$, la quale incontra l' asse coordinato OA nel punto T_1 dato da

$$OT_1 \simeq OM - t.MT \simeq -t^2.OA$$

mentre l' ascissa è $OQ \simeq t^2.OA \simeq T_1O$, dunque la sottangente è doppia dell' ascissa ; invece la OB (che è pur essa tangente alla parabola in O) è incontrata dalla tangente MT in T_2 essendo

$$OT_2 \simeq OM - \frac{t}{2} MT \simeq \frac{t}{2} OB$$

mentre l' ordinata è $QM \simeq OP \simeq t.OB$.

16. Se riguardiamo t come il tempo, il moto parabolico ha la *velocità* espressa in grandezza e direzione dalla derivata-prima MT , e la *turbazione* del movimento è data dalla derivata-seconda

$$MU \simeq d^2.OM \simeq 2.OA ,$$

cioè costante in grandezza e direzione.

17. Anche l' equipollenza della parabola conserva la stessa forma trasportando gli assi coordinati al punto O′ determinato da $OO' \simeq \alpha^2.OA + \alpha.OB$, sicchè

$$O'M \simeq OM - OO' \simeq (t^2 - \alpha^2)\, OA + (t - \alpha)\, OB$$
$$\simeq (t - \alpha)^2\, OA + (t - \alpha)\,(2\alpha.OA + OB) \simeq t'^2.OA + t'.O'B'$$

avendo posto $t' = t - \alpha$, e $O'B' \simeq 2\alpha . OA + OB$, che è la tangente nel nuovo punto d' origine O' .

18. *Equipollenze nello spazio.* È palese che quanto abbiamo detto può applicarsi anche allo spazio. Così, per esempio, se A B C D non sieno in uno stesso piano, e se

$$(1) \quad l . DA + m . DB + n . DC + p . DS \simeq 0 \ ,$$

la condizione che i punti A B C S sieno in uno stesso piano sarà

$$(2) \quad l + m + n + p = 0 \ .$$

Se con equipollenze analoghe alla (1) sieno determinati i punti S S′ S″ S‴ , la condizione che stieno in uno stesso piano è data dal determinante

$$(3) \quad | lm'n''p''' | = 0$$

E perchè SS′S″ sia una linea retta, basterà che si annullino due dei determinanti $| lm'n'' |$, $| lm'p'' |$, $| ln'p'' |$, $| mn'p'' |$.

19. L' equipollenza

$$DM \simeq x . DA + y . DB + z . DC \ ,$$

dove x y z sieno funzioni di una sola variabile t date esplicitamente, oppure col mezzo di due equazioni tra le x y z , dà una curva, la cui tangente è

$$MT \simeq d . DM \simeq dx . DA + dy . DB + dz . DC \ .$$

Una retta pure importante, perchè da essa dipende la determinazione del circolo osculatore, è la

$$MU \simeq d^2 . DM \simeq d^2x . DA + \text{ecc.}$$

20. La medesima

$$DM \simeq x . DA + y . DB + z . DC$$

esprime una superficie quando le x y z sono funzioni di due variabili indipendenti t τ , ossia quando le x y z sono legate da una sola equazione. Indicando con d δ le derivate prese rispetto alle t τ , il piano tangenziale è individuato dalle due tangenti

$$MT \simeq dx \ DA + \text{ecc.} \quad , \quad MT_1 \simeq \delta x . DA + \text{ecc.}$$

21. L'*Ellissoide* riferito a tre suoi diametri conjugati ha l' equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ ,$$

dalla quale, posto $t = x$, $\tau = y$, si deduce

$$x + z\mathrm{d}z = 0 \quad , \quad y + z\delta z = 0$$

quindi il tangenziale è individuato dalle

$$\mathrm{MT} \simeq -z.\mathrm{DA} + x.\mathrm{DC} \quad , \quad \mathrm{MT}_1 \simeq -z.\mathrm{DB} + y.\mathrm{DC} \quad .$$

Per trovare il punto dove il tangenziale incontra l'asse coordinato DA bisognerà sommare-geometricamente alla DM due rette aventi le direzioni MT MT_1 in modo che svaniscano i coefficienti di DB e DC ; così avremo

$$\mathrm{DM} + \frac{y}{z}\mathrm{MT}_1 - \frac{z^2+y^2}{xz}\mathrm{MT} \simeq \frac{1}{x}\mathrm{DA} \quad .$$

22. *Curve gobbe.* La più semplice curva non piana è data da

$$\mathrm{DM} \simeq t.\mathrm{DA} + t^2.\mathrm{DB} + t^3.\mathrm{DC}$$

la sua tangente è $\mathrm{MT} \simeq \mathrm{DA} + 2t.\mathrm{DB} + 3t^2.\mathrm{DC}$, inoltre si ha

$$\mathrm{MU} \simeq \mathrm{d}^2.\mathrm{DM} \simeq 2.\mathrm{DB} + 6t.\mathrm{DC} \quad .$$

DB è un diametro della curva, perchè il punto di mezzo della corda MM_1 , essendo

$$\mathrm{DM}_1 \simeq -t.\mathrm{DA} + t^2.\mathrm{DB} - t^3.\mathrm{DC} \quad ,$$

è dato da $\mathrm{DQ} \simeq t^2.\mathrm{DB}$, cioè cade su DB ; si ha

$$\mathrm{QM} \simeq t.\mathrm{DA} + t^3.\mathrm{DC} \ .$$

quindi le corde MM_1 sono parallele al piano DAC .

23. L' equipollenza non cangia di forma se trasportiamo l' origine delle coordinate D in un punto qualunque D' della curva, giacchè ponendo

$$\mathrm{DD}' \simeq \alpha.\mathrm{DA} + \alpha^2.\mathrm{DB} + \alpha^3.\mathrm{DC}$$
$$\mathrm{D}'\mathrm{A}' \simeq \mathrm{DA} + 2\alpha.\mathrm{DB} + 3\alpha^2.\mathrm{DC}$$
$$\mathrm{D}'\mathrm{B}' \simeq \mathrm{DB} + 3\alpha.\mathrm{DC}$$

si trova dopo fatte le sostituzioni

$$\mathrm{D}'\mathrm{M} \simeq (t-\alpha)\,\mathrm{D}'\mathrm{A}' + (t-\alpha)^2\mathrm{D}'\mathrm{B}' + (t-\alpha)^3\,\mathrm{DC} \ .$$

Potremo disporre dell' indeterminata α in modo che D'B' risulti perpendicolare alla DC .

24. Una particolare varietà di questa specie di curve si ha quando nel punto in cui DB DC sono perpendicolari la tangente DA è perpendicolare ad ambedue quelle rette. Le projezioni della curva sui piani coordinate sono le tre ben note parabole

$$DR \simeq t.DA + t^2.BD \quad , \quad DQ \simeq t.DA + t^2.DC \quad , \quad DP \simeq t^2.DB + t^3.DC. \; —$$

Il piano osculatore, che è quello delle due rette MT MU , incontra gli assi coordinati nei punti dati da

$$DM - \frac{2}{3}t.MT + \frac{t^2}{6}MU \simeq \frac{t}{3}DA$$

$$DM - t.\,MT + \frac{t^2}{3}\,MU \simeq -\frac{t^2}{3}DB$$

$$DM - t.MT + \frac{t^2}{2}MU \simeq t^3.DC$$

così il punto all' infinito ha il piano osculatore tutto all' infinito.

II.

SECONDA PARTE DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE.

25. Il metodo delle equipollenze, che relativamente allo spazio può considerarsi come una particolare segnatura del metodo delle coordinate parallele e del calcolo baricentrico, acquista una speciale importanza nel piano, poichè esprimendo anche le relazioni angolari abbraccia tutto intero l' oggetto della geometria. Il metodo delle equipollenze, che nel 1832 mi fu suggerito da una antica rappresentazione degli immaginarii, presenta anche un essenziale vantaggio all' algebra dando l' unico tipo reale degli immaginarii, e per tal modo legittimandone il calcolo, e rendendone chiare molte conseguenze: sotto questo riguardo esso fu poi adottato anche dal Canchy. (Bellavitis, nel *Poligrafo di Verona*, gennajo 1833, T. XIII, p. 53 . . . 61) (Canchy, *Exercices d' Analyse*, 1847, IV. *Mém. Acad. Sciences* 1850, XXII, p. 131. *Comptes*, 3 sept. 1849, XXIX, ecc.)

26. Ecco il *principio fondamentale*, da cui deriva ogni conseguenza: Nel metodo delle equipollenze una retta si dice quarta proporzionale a tre altre

quando la sua grandezza è quarta proporzionale alle loro, ed inoltre essa ha sulla terza retta inclinazione uguale e presa nello stesso senso di quella che la seconda ha sulla prima. Le segnature di moltiplica e divisione sono quelle stesse adoperate nell' algebra, ed in generale vale il medesimo algoritmo; si mantengono pure le precedenti convenzioni sul senso, in cui ogni retta prendesi dalla prima alla seconda lettera, e sulla somma-geometrica.

27. Molte sono le specie di conseguenze, che possono trarsi da questi semplicissimi principii, parecchie ne ho esposte nelle memorie da me pubblicate su tal argomento; a mostrarne l' importanza basterebbe a mio credere il teorema generalissimo: *Qualunque proprietà tra i punti di una retta vale anche tra i punti di un piano, purchè le equazioni si cangino in equipollenze.* (Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica. Calcolo delle equipollenze, *Annali del R. Lomb.-Veneto*, Padova 1835, V, pag. 244 . . . 259. — Metodo delle equipollenze, *ivi*, 1837, VII, 243. — Soluzioni grafiche di problemi geometrici trovate col metodo delle equipollenze, *Mem. I. R. Istituto Veneto*, 1843, I, p. 225 . . . 267. — Dimostrazioni di alcuni teoremi col metodo delle equipollenze. *Atti Istituto Veneto*, 1846. — Sposizione del metodo delle equipollenze. *Mem. Società Ital., Modena* 1854, XXV, pag. 225 . . . 309. — Del calcolo dei quaternioni e della sua relazione al metodo delle equipollenze, *ivi*, 1859. *Serie* 2.ª I).

28. *Esempio.* È noto che se sei punti di una retta abbiano la relazione

$$AF.BD.CE \backsimeq AE.CD.BF$$

essi sono in *involuzione* (che io distinguo dicendola *positiva* da quell' altra che ha luogo quando, fatte le solite avvertenze sui segni, è

$AF.BD.CE \backsimeq -AE.CD.BF$), e possono considerarsi come tre paja A D, B E, C F di punti conjugati, ognuno dei quali può permutarsi col suo conjugato, e ciascun pajo può sostituirsi ad un altro; sicchè insieme con quella relazione hanno luogo le altre tre

$$AF.ED.CB \backsimeq AB.CD.EF\ ,\ AB.FD.EC \backsimeq AC.ED.FB\ ,\ AC.BD.FE \backsimeq AE.FD.BC\ .$$

Ne dedurremo (§ 27) immediatamente che: *Se per sei punti di un piano sussista l' equipollenza* $AF.BD.CE \backsimeq AE.CD.BF$, *cioè l' esagono* AFBDCE *abbia il prodotto di tre lati alternativi eguale al prodotto degli altri tre, e la somma di tre angoli alternativi pure uguale alla somma degli altri tre, identiche proprietà avrà ciascuno degli esagoni* ABCDEF, ABFDEC, ACBDFE.

— Le condizioni relative agli angoli si stabiliscono molto comodamente riferendo l' inclinazione di ciascuna retta ad una retta assunta ad arbitrio per origine delle inclinazioni ; allora la ammessa equipollenza dà

$$\text{inc AF} + \text{inc BD} + \text{inc CE} = \text{inc AE} + \text{inc CD} + \text{inc BF}$$

che scritta così

$$\text{inc AF} - \text{inc EA} + \text{inc BD} - \text{inc FB} + \text{inc CE} - \text{inc DC} = \pm 180^\circ .$$

mostra che la somma dei tre angoli esterni A B C dell' esagono AFBDCE è uguale a 180°. — È noto che nell' involuzione positiva esiste sempre sulla retta un centro d' *inversione* I tale che le sue distanze da due punti di uno stesso pajo hanno un prodotto costante, cioè

$$\text{IA.ID} = \text{IB.IE} = \text{IC.IF} \quad ;$$

perciò (§ 27) anche nell' esagono esisterà un punto I pel quale avranno luogo le equipollenze

$$\text{IA.ID} \simeq \text{IB.IE} \simeq \text{IC.IF}$$

le quali oltre le relazioni di grandezza comprendono le relazioni

$$\text{inc IA} + \text{inc ID} = \text{inc IB} + \text{inc IE} = \text{inc IC} + \text{inc IF}$$

che esprimono le uguaglianze degli angoli $\text{BIA} = \text{DIE}$, $\text{CIA} = \text{DIF}$, cioè sono simili-dritti i triangoli BIA DIE, ed i due CIA DIF, ed i due CIB EIF. Ne viene che sulla retta che dimezza gli angoli AID BIE CIF esistono due punti K K_1 tali che

$$(\text{IK})^2 \simeq \text{IA.ID} \simeq \text{ecc.}$$

Questi punti, sempre reali nel piano, sono spesso immaginarii per le involuzioni su una retta.

29. Meritano esser notate le varie derivazioni con cui si giunge al precedente teorema. Se un triangolo ABC è tagliato da una retta FE parallela alla base BC, quest' ultima condizione è espressa dall' equipollenza $\text{FE} \simeq p.\text{BC}$; la condizione che F cada sul lato AB è indicata da $\text{AF} \simeq q.\text{AB}$, poi si ha

$$\text{AE} \simeq \text{AF} + \text{FE} \simeq q.\text{AB} + p.\text{BC} \simeq q.\text{AC} + (p - q)\,\text{BC} \quad ,$$

e perchè il punto E cada sulla AC dovrà essere $p - q = 0$, e la $AE \simeq q.AC$ mostra che i lati sono tagliati proporzionalmente, cioè

$AF.CE \simeq AE.BF$; — colla derivazione di prospettiva, ossia di collineazione, si passa al caso che la FE tagli la base BC del triangolo nel punto D , ed allora introducendo le rette BD CD , che prima erano infinite, si ha $AF.BD.CE = AE.CD.BF$; siccome la figura presenta quattro triangoli ABC BDF AFE CDE , ognuno dei quali è tagliato da una trasversale, così sussistono insieme le quattro involuzioni; — projettando il quadrilatero completo sopra una retta la simultaneità delle involuzioni viene stabilita anche pei punti di una retta; — finalmente colla derivazione offerta dal metodo delle equipollenze si passa dal caso di sei punti di una retta a quello di sei punti di un piano.

30. *Centri armonici rispetto ad un punto.* La teoria dei *baricentri* (centri di gravità) dà origine col mezzo della derivazione di collineazione alla teoria dei *centri armonici rispetto ad un piano;* quando i punti sono tutti su una sola retta, il loro centro armonico può considerarsi *rispetto al punto,* in cui la retta incontra il piano predetto. Ora pel teorema generale annunciato al § 27 tutta la teoria dei centri armonici dei punti di una retta si estende ai centri armonici dei punti di un piano *rispetto ad un suo punto* O . Così, per esempio, il centro armonico dei punti A B rispetto ad O è P determinato dall' equipollenza

$$(1) \quad \frac{1}{OA} - \frac{1}{OP} + \frac{1}{OB} - \frac{1}{OP} \simeq 0$$

ossia dalla

$$(2) \quad OA.PB \simeq -OB.PA \quad .$$

Il quadrilatero OAPB può dirsi *armonico,* esso ha il prodotto di due lati opposti eguale al prodotto degli altri due ed è inscrivibile nel circolo. Si ha pure, conforme alle note relazioni di quattro punti armonici, l' equipollenza

$$(3) \quad OP.AB \simeq 2.OA.PB \quad .$$

La (3) è una conseguenza della (2) a motivo della equipollenza

$$(4) \quad OA.PB + OB.AP + OP.BA \simeq 0 \ ,$$

che ha luogo in qualunque quadrilatero OAPB . Questa (4) fu una delle prime conseguenze che io trassi dal teorema del § 27; essa fu recentemente pubblicata dal Möbius, che ha adottate le stesse mie vedute (*J. Crelle,* 1856, LII, p. 229 . . . 242).

31. *Ellisse.* Acciocchè il Lettore, che non conoscesse le mie memorie (§ 27) sul metodo delle equipollenze, acquisti qualche idea della sua fecondità, riprendiamo l' equipollenza dell' ellisse data al § 12.

$$CM \simeq x.CA + y.CB \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ,$$

e la sua tangente $MT \simeq -y.CA + x.CB$.

Se poniamo $MN \simeq \frac{CB}{CA} MT \simeq -y.CB + x\frac{(CB)^2}{CA}$,

la retta MN forma colla tangente MT un angolo costante perchè uguale ad ACB ; si ha poi

$$CN \simeq CM + MN \simeq x\frac{(CA)^2 + (CB)^2}{CA}$$

e siccome l' ascissa del punto M è $CQ \simeq x.CA$, così

$$QN \simeq x\frac{(CB)^2}{CA} \quad \text{e} \quad \frac{QN}{CQ} \simeq \left(\frac{CB}{CA}\right)^2 \quad ,$$

cioè il triangolo CQN è di una forma determinata qualunque sia il punto M . Supponiamo che l' angolo ACB dei due semidiametri sia retto, e vedremo che la normale MN taglia l' ascissa CQ in un rapporto costante.

32. La formula $(CA)^2 + (CB)^2$, che si è presentata nell' espressione di CN , è tanto più osservabile quanto che essa non cangia al mutarsi dei semidiametri CA CB in altri due pur tra loro conjugati CA′ CB′ , giacchè (§ 13) si ha $(CA)^2 + (CB)^2 \simeq (CA')^2 + (CB')^2$.

Poniamo (1) $(CA)^2 + (CB)^2 \simeq (CF)^2$

e dai due diametri conjugati CA CB dedurremo i fochi F F_1 : in varii modi può costruirsi la (1), se poniamo

$$CE : CB \simeq CB : CA \quad ,$$

cioè se costruiamo il triangolo CBE simile-dritto a CAB

sarà $CF \simeq \sqrt{CA\,(CA + CE)}$,

noi sappiamo (§ 5) costruire la $CA + CE$, la CF dimezzerà l' angolo che essa forma colla CA , e ne sarà media proporzionale. — La (1) dà

$$(CB)^2 \simeq (CF)^2 - (CA)^2 \simeq (CA - CF)\,(-CA - CF) \simeq -FA.F_1A \quad ,$$

dunque i due raggi vettori FA F_1A sono egualmente inclinati sulla CB (giacchè la precedente equipollenza dà $2.\text{inc CB} = \text{inc FA} + \text{inc AF}_1$), che è parallela alla tangente in A, ed il loro prodotto eguaglia il quadrato del semidiametro CB conjugato con CA.

33. La tangente in M incontra la tangente in A, che è parallela a CB nel punto I dato da

$$\text{CI} \simeq \text{CM} + p.\text{MT} \simeq (x - py)\,\text{CA} + (y + px)\,\text{CB}$$

e dovendo I appartenere alla tangente condotta per A, dovrà essere $x - py = 1$, quindi a motivo di $x^2 + y^2 = 1$ sarà

$\text{CI} \simeq \text{CA} + \frac{1-x}{y}\text{CB}$; ne viene

$$\text{FI}.\text{F}_1\text{I} \simeq (\text{CI} - \text{CF})\,(\text{CI} + \text{CF}) \simeq (\text{CA})^2 + \frac{2(1-x)}{y}\,\text{CA}.\text{CB} +$$

$$+ \frac{(1-x)^2}{y^2}(\text{CB})^2 - (\text{CA})^2 - (\text{CB})^2 \simeq$$

$$\simeq \frac{2(1-x)}{y}\,\text{CA}.\text{CB} + \frac{2(x^2-x)}{y^2}(\text{CB})^2$$

$$\simeq \frac{2(x-1)}{y^2}\,\text{CB}\,(-y.\,\text{CA} + x.\,\text{CB}) \simeq \frac{2(x-1)}{y^2}\,\text{CB}.\text{MT}\quad ;$$

dunque se da un punto esterno all' ellisse si conducono le due tangenti, e le rette IF IF_1 ai fochi, la retta che dimezza l' angolo formato dalle due prime, dimezza anche l' angolo delle due ultime. — Nella Geometria superiore occorre tanto spesso di nominare una *corda* e i punti dove essa incontra la curva quanto un punto e le tangenti da esso condotte, perciò a questo punto do il nome di *apice* (esso è *ideale* quando le tangenti sono immaginarie). Le tangenti spettanti all'apice I sono IA ed IM, che hanno un medesimo rapporto $\frac{1-x}{y}$ coi semidiametri ad esse paralleli.

34. *Parabola.* L' equipollenza (§ 15) della parabola ponendo

$$\text{MN} \simeq -\frac{\text{OB}}{2.\text{OA}}\text{MT} \simeq -t.\,\text{OB} - \frac{(\text{OB})^2}{2.\text{OA}}$$

dà $\text{ON} \simeq t^2.\,\text{OA} - \frac{(\text{OB})^2}{2\text{OA}}$ ed essendo OQ l'ascissa avremo

$$\text{QN} \simeq -\frac{(\text{OB})^2}{2.\text{OA}}\quad .$$

Se l' angolo AOB fosse retto, questa QN sarebbe la costante sunnormale. Si ha

$$\frac{(O'B')^2}{4\,OA} \simeq \alpha^2 . OA + \alpha . OB + \frac{1}{4}\frac{(OB)^2}{OA} \simeq OO' + \frac{1}{4}\frac{(OB)^2}{OA} ,$$

dunque se poniamo $OF \simeq -\frac{(OB)^2}{4\,OA}$, il punto F rimane invariato qualunque sia il punto O' , che prendesi per origine delle coordinate; si ha $QN \simeq 2 . OF$

$$FM \simeq t^2 . OA + t . OB + \frac{(OB)^2}{4OA} \simeq \frac{1}{4}\frac{(MT)^2}{OA} ,$$

dunque l' inclinazione del raggio vettore FM sul diametro OA è doppia dell' inclinazione della tangente, e se t sia il tempo, la velocità MT è proporzionale alla radice della distanza dal foco F .

35. *Ramuno.* Secondo i principii del metodo delle equipollenze se CA CB CM sono raggi di un circolo AMB si ha

$$\frac{CM}{CA} \simeq \left(\frac{CB}{CA}\right)^{\mu}$$

l' esponente μ essendo il rapporto (tenuto conto del segno) dell'angolo ACM all' angolo ACB . Nel caso che l' angolo ACB sia di $+90^0$. (cioè dal raggio CA al raggio CB vi sia un angolo retto positivo) poniamo per brevità

$$\frac{CB}{CA} \simeq \nu ,$$

sicchè se l' angolo ACM espresso in parti di angolo retto sia $= \mu$ sarà

$$\frac{CM}{CA} \simeq \nu^{\mu} , \text{ ossia } CM \simeq \nu^{\mu} . CA$$

quindi ogniqualvolta una retta sia moltiplicata per ν^{μ} , ciò significherà che essa conservando la sua grandezza accresce la propria inclinazione dell' angolo μ espresso in parti di angolo retto. Il moltiplicatore ν^2 produce lo stesso effetto del segno — , cioè

$$\nu^2 . CA \simeq -CA \simeq AC$$

giacchè un accrescimento di $180.^0$ nell' inclinazione dà ad una retta la direzione opposta; così pure la retta espressa da

$$\nu^3 . CA \simeq -\nu . CA$$

è perpendicolare alla retta CA e propriamente forma con essa l'angolo -90^0. La retta OM è la somma-geometrica di una parte parallela alla OA ed una perpendicolare, ed è facile vedere che si ha

$$(1) \qquad \gamma^{\mu} \simeq \cos\mu + \operatorname{sen}\mu . \gamma \ .$$

Da ciò risulta che il segno γ esprimente nel metodo delle equipollenze il rapporto $\simeq CB : CA$ di due rette perpendicolari ed uguali è soggetto alle stesse regole di quel segno $\sqrt{-1}$, che nell' algebra non ha alcun possibile significato: per tal maniera il calcolo di γ ossia di $\sqrt{-1}$ diventa pienamente legittimo, e l' algebra degli immaginarii è propriamente un calcolo di equipollenze relativo alle figure piane. Con una sincope facile ad intendere io do al segno γ il nome di *ramuno*. (Saggio sull' algebra degli immaginarii. *Mem. Istit. Veneto*, 1852, IV, pag. 243 . . . 344).

36. *Differenziazione*. Occorre spesso di adoperare la derivata di γ^x, essa è evidentemente il rapporto della corda infinitesima, che congiunge il punto M al punto infinitamente vicino M', e dell' accrescimento infinitesimo di x ; ora il limite della corda è la tangente perpendicolare ad OM, perciò

$$\mathrm{D}_x(\gamma^x) = \frac{\pi}{2}\gamma\,\gamma^x$$

avendo π il solito significato. Se invece di x si ponga $\frac{2}{\pi}u$, cioè u sia espresso in parti di raggio, si avrà

$$\mathrm{D}_u\left(\gamma^{\frac{2}{\pi}u}\right) = \gamma^{\frac{2}{\pi}u+1}$$

Invece di $\gamma^{\frac{2}{\pi}}$ io soglio adoperare la lettera greca ε (che viene perciò ad equivalere a e^{γ})
sicchè

$$\mathrm{d}(\varepsilon^u) \simeq \gamma\,\varepsilon^u\,\mathrm{d}\,u \ .$$

La $\varepsilon^u . CA$ indica che l' inclinazione della retta CA dee accrescersi dell' angolo u misurato dall' arco corrispondente espresso in parti di raggio.

37. *Conjugate*. Nel calcolo delle equipollenze giova considerare la conjugata di una retta o di una formula: stabilita una retta quale origine delle incli-

nazioni, per *conjugata* di una retta s' intenderà un' altra ad essa eguale, avente ugual inclinazione ma di segno opposto. Ne viene che le conjugate delle

$$\nu \quad \nu^{x} \quad \varepsilon^{u} \quad \text{sono le} \quad -\nu \quad \nu^{-x} \quad \varepsilon^{-u} \ .$$

È palese che la somma-geometrica di due rette tra loro conjugate è una retta parallela all' origine delle inclinazioni ed eguale alla retta primitiva moltiplicata pel doppio del coseno della sua inclinazione; invece la somma-geometrica di una retta e della sua conjugata presa col segno *meno* è equipollente ad una retta d' inclinazione di 90^0 ed eguale alla data retta moltiplicata pel doppio del seno della sua inclinazione; il prodotto di due rette conjugate è il quadrato della grandezza; finalmente una retta divisa per la sua conjugata è equipollente al ramuno elevato ad una potenza doppia dell'inclinazione della retta. Tutto ciò si scrive così

$$\mathrm{OM} + \mathrm{cj\,OM} \simeq 2\,\mathrm{gr\,OM}.\cos\mu \quad , (2) \quad \nu^{\mu} + \nu^{-\mu} \simeq 2\cos\mu$$

$$\mathrm{OM} - \mathrm{cj\,OM} \simeq 2\,\mathrm{gr\,OM}.\operatorname{sen}\mu.\nu \quad , (3) \quad \nu^{\mu} - \nu^{-\mu} \simeq 2\operatorname{sen}\mu.\nu$$

$$\mathrm{OM}.\mathrm{cj\,OM} \simeq \mathrm{gr}^2\,\mathrm{OM} \quad , (4) \quad \nu^{\mu}.\nu^{-\mu} \simeq 1$$

$$\mathrm{OM} : \mathrm{cj\,OM} \simeq \nu^{2\mu} \quad , (5) \quad \nu^{\mu} : \nu^{-\mu} \simeq \nu^{2\mu}$$

supposto che sia μ l' inclinazione della OM : nel calcolo delle equipollenze la grandezza di una retta occorre segnarla colla caratteristica gr , poichè altrimente la OM indica la retta considerata in grandezza ed in posizione. — La conjugata di una formula si ottiene prendendo le conjugate di tutte le rette e di tutti i ramuni in essa contenuti.

38. *Equipollenze delle curve.* Nel metodo delle equipollenze non è già necessario esprimere tutti i punti di una curva sotto la forma

$$\mathrm{CM} \simeq x.\mathrm{CA} + y.\mathrm{CB} \quad ;$$

giacchè CM può essere determinato da un' equipollenza qualsivoglia contenente esplicitamente o implicitamente una indeterminata t ; e senza limitarsi ad una forma piuttostochè all' altra si possono risolvere i problemi generali sulle curve. Così, per dare qualche esempio, i raggi vettori CM delle curve qui menzionate possono avere le seguenti espressioni.

Parabola $\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\varepsilon^{t}$, oppure $\displaystyle\int \frac{\varepsilon^{\varphi}}{\operatorname{sen}^3\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$,

Ellisse $a\varepsilon^{t} + b\,e^{-t}$

Concoide di Nicomede $a \cot t + \varepsilon^{t}$,

Cicloide $t + \varepsilon^{t}$, oppure $\int \cos\varphi\, \varepsilon^{\varphi}\, \mathrm{d}\varphi$,

Epicicloidi $an\varepsilon^{t} - \varepsilon^{nt}$,

Catenaria $\cosh y + y\gamma$, oppure $\int \frac{\varepsilon^{\varphi}}{\cos^{2}\varphi}\, \mathrm{d}\varphi$,

Trattoria $\int \varepsilon^{\varphi} \operatorname{tg} \mathrm{d}\varphi$.

39. Indicando con $\mathrm{d}M$, d^2M , ecc. le derivate rispetto alla variabile t del raggio vettore CM , di cui l' estremo M è il punto variabile della curva, il raggio di curvatura è dato di grandezza e di posizione da

$$MR \simeq \frac{2\,(\mathrm{d}M)^2\,\mathrm{cj}\,\mathrm{d}M}{\mathrm{d}M.\,\mathrm{cj}\,\mathrm{d}^2M - \mathrm{cj}\,\mathrm{d}M.\,\mathrm{d}^2M}$$

oppure si ha $$MR \simeq \frac{\gamma}{\lambda}\mathrm{d}M$$

determinando le due quantità reali l λ in guisa che

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}M} \simeq l + \lambda\gamma \quad .$$

Altre formule generali risolvono parecchi problemi senza bisogno di attribuire all' equipollenza della curva una forma piuttostochè un' altra; come ho mostrato nel mio primo Saggio e nelle altre memorie citate al § 27.

40. *Curve derivate per inversione o reciprocità.* Le equipollenze si prestano spontanee a parecchie derivazioni di curve, che sotto differenti nomi sono considerate dai Geometri moderni (Ne feci oggetto di una memoria negli *Annali Tortol. Roma* 1852, III, p. 508). Se da un punto fisso O si tirino a tutti i punti M di una curva le rette OM , e su ciascuna OM prendasi la OM' ad essa inversamente proporzionale, tutti i punti M' costituiscono una curva, che diremo *inversa* della M . (Sulle proprietà delle figure *inverse* già considerate da Quetelet, Dandelin ecc., pubblicai una memoria negli *Annali delle scienze del R. Lomb.-Veneto* 1836, VI, p. 126). Nella derivazione d'inversione rimangono invariati gli angoli d'intersezione delle linee, ed infatti la derivazione fra le due curve inverse è espressa da

$$(1) \quad OM' \simeq 1 : \mathrm{cj}\,OM$$

e se con d indichiamo il differenziale ossia la derivata rispetto alla variabile reale t, di cui OM è funzione, abbiamo

$$(2) \quad \mathrm{d\,M'} \backsimeq -\mathrm{cj\ dM} : (\mathrm{cj\ OM})^2 ,$$

la quale, secondo i principii del metodo e posta attenzione all'effetto della caratteristica cj di mutare il segno delle inclinazioni, dà

$$\mathrm{inc\,d\,M'} = 180^0. - \mathrm{inc\,d\,M} + 2.\,\mathrm{inc\,OM} ,$$

e quindi posto

$$(a) \quad \mathrm{inc\,dM} - \mathrm{inc\,OM} = \theta \quad \text{si ha} \quad (b) \quad \mathrm{inc\,d\,M'} - \mathrm{inc\,OM'} = 180^0. - \theta$$

vale a dire *le tangenti* dM dM' *di due curve inverse sono egualmente inclinate sul comune raggio vettore* OMM' , *ma in verso opposto.*

41. Dal punto fisso O si abbassi su ciascuna tangente MP alla curva M la perpendicolare OP , tutti i punti P costituiscono una curva, che fu detta la *podaire* della M . Prolunghiamo ciascuna OP in guisa che $\mathrm{OS} \backsimeq 2.\mathrm{OP}$, la curva dei punti S sarà *omotetica* (simile e similmente posta) alla predetta curva P . Le rette MS MO sono eguali ed egualmente inclinate ma in verso opposto sulla tangente MP , la cui direzione è espressa da dM , cioè ha luogo l' equipollenza

$$\mathrm{MS} : \mathrm{dM} \backsimeq \mathrm{cj\ MO} : \mathrm{cj\ dM}$$

che sostituita nell' identica $\mathrm{OS} \backsimeq \mathrm{OM} + \mathrm{MS}$ dà

$$(3) \quad \mathrm{OS} \backsimeq \frac{\mathrm{OM.\,cj\,dM} - \mathrm{cj\ OM.\,dM}}{\mathrm{cj\,dM}}$$

la quale servirà a determinare la posizione dei punti S in funzione della variabile t . Il binomio

$$\mathrm{OM.\,dcj\,M} - \mathrm{cj\,OM\,.\,dM} \qquad \text{è} \qquad \backsimeq -2\,\nu.\,\mathrm{sen}\,\theta.\,\mathrm{OM.\,gr\,d\,M}$$

perciò $\mathrm{OS} \backsimeq 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\nu^{\theta-1}\,\mathrm{OM}$ (relazione evidente a motivo del triangolo rettangolo OPM) quindi

$$(c) \quad \mathrm{inc\,OS} = \mathrm{inc\,OM} + \theta - 90^0 = \mathrm{inc\,dM} - 90^0 ,$$

e

$$(A) \quad \mathrm{gr\,OS} = 2\,\mathrm{sen}\,\theta.\,\mathrm{gr\,OM} .$$

42. Differenziando la (3) si ottiene

$$(4) \quad dS \backsimeq \frac{cj\,OM\,(dM.cj\,d^2M - cj\,dM.\,d^2M}{(cj\,dM)^2} \quad ;$$

il binomio tra parentesi ha l' inclinazione di un retto, perciò

$$(d) \quad \text{inc}\,dS = 2\,\text{inc}\,dM - \text{inc}\,OM - 90^0. = \text{inc}\,OS + \theta$$

vale a dire, per la (*a*), *le tangenti* dM dS *delle due curve* M S *sono egualmente inclinate sui raggi vettori* OM OS ; ed essendo

$$\text{inc}\,MS = 2\,\text{inc}\,dM - \text{inc}\,MO \ ,$$

la curva S è perpendicolare ad MS , che è la direzione del raggio di luce emanato dal punto O e riflesso dalla curva M ; a motivo di questa proprietà la curva S fu detta *caustica-secondaria* della M , e meno inesattamente potrebbe dirsi *sviluppante-caustica*, perchè è una delle sviluppanti della caustica dei raggi riflessi della M .

43. Su ciascun raggio vettore OS prendasi la lunghezza OS′ in modo che $OS'.OS = 1$, da cui, mediante la (3)

$$(5) \quad OS' \backsimeq \frac{1}{cj\,OS} \backsimeq \frac{dM}{cj\,OM.\,dM - OM.\,cj\,dM}$$

Differenziando si ottiene

$$dS' \backsimeq OM\,(dM\,cj\,d^2M - cj\,dM.d^2M) : (cj\,OM.\,dM - OM.\,cj\,dM)^2$$

e sottraendo dal valore di $cj\,OS'.dS'$ il suo conjugato si trova in fine

$$(6) \quad OM \backsimeq \frac{dS'}{cj\,OS'.\,dS' - OS'.\,cj\,dS'} \quad ;$$

l' identità di forma tra le (3) (6) mostra la perfetta reciprocità tra le due curve M S′ , *il raggio dell' una è perpendicolare alla tangente dell' altra, e sono inversamente proporzionali le distanze del punto fisso* O *da ciascun punto di una curva e dalla corrispondente tangente dell' altra.* Le due curve (che sono *polaires réciproques* rispetto ad un circolo) le diremo *reciproche*, e segneremo con M^0 la S′ .

44. Tanto la sviluppante-caustica S quanto la *podaire* P sono inverse della M^0 reciproca della M , noi le diremo *inverso-reciproche* della M , e le segneremo con $M^{0\prime}$; poi avremo la reciproca della $M^{0\prime}$, cioè la $M^{0/0}$ *reciproco-inverso-reciproca* della M , e la $M^{0/0\prime}$ inversa della

$M^{0'0}$ sarà *inverso-reciproco-inverso-reciproca* della M e così in seguito. E nell' ordine opposto la M' inversa della M avrà per reciproca la M'^0, che diremo *reciproco-inversa* della M; continuando avremo la $M'^{0'}$ *inverso-reciproco-inversa* della M, ecc.

45. La *reciproco-inversa* M'^0 si deduce dall' inversa M' con una formula analoga alla (5), cioè

$$OM'^0 \simeq \frac{dM'}{\text{cj } 0M' . dM' - OM' . \text{cj } dM'} ,$$

che mediante le (1) (3) diventa, posto $M^{0'}$ in luogo di S,

$$(7) \quad OM'^0 \simeq (OM)^2 : OM^{0'} ,$$

perciò i raggi vettori della *reciproco-inversa* M'^0 e della *inverso-reciproca* $M^{0'}$ hanno il prodotto eguale al quadrato del raggio vettore della curva primitiva, e gli sono egualmente inclinati da parti opposte, cioè

$$(e) \quad \text{inc } OM'^0 = 2 \text{ inc } OM - \text{inc } dM + 90^0 = \text{inc } OM - \theta + 90^0 .$$

Dalla (6) si deduce, posto M^0 in luogo di S',

$$(f) \quad \text{inc } dM^0 = \text{inc } OM + 90^0 .$$

egualmente abbiamo

$$(g) \quad \text{inc } dM'^0 = \text{inc } OM' + 90^0 = \text{inc } OM + 90^0$$

sicchè

$$(h) \quad \text{inc } dM'^0 - \text{inc } OM'^0 = \theta ;$$

si scorge quindi che tutte queste curve derivate incontrano i propri raggi vettori sotto i medesimi angoli. — La reciproco-inversa M'^0 ha colla M la stessa relazione che questa ha colla sua inverso-reciproca $M^{0'}$, perciò i raggi emanati dal centro di derivazione O sono riflessi dalla M'^0 in raggi normali alla M, e questa M è l' inviluppo dei circoli, che passano per O ed hanno i centri sulla sua reciproco-inversa M'^0.

46. Oltre l' *inversione* e la *reciprocità* merita esser notata la derivazione fra le curve M $M^{0'0}$ che sono *reciproco-inverso-reciproche* l' una dell'altra; le loro tangenti in M $M^{0'0}$ sono parallele, ed hanno le distanze dal punto O inversamente proporzionali.

47. Una serie di curve, ognuna delle quali sia inverso-reciproca della precedente, fu detta da W. Roberts una serie di *derivate positive* (dicendole *derivate negative* quando si prendono in senso opposto). Formano una di tali serie

..... la reciproco-inversa M'^0 data da $OM'^0 \simeq (OM)^2 : OS$, la primitiva, la sua inverso-reciproca $M^{0\prime}$ data da $OM^{0\prime} \simeq OS$, la inverso-reciproco-inverso-reciproca $M^{0\prime 0\prime}$ data da $OM^{0\prime 0\prime} \simeq (OS)^2 : OM$, ... È pure una serie positiva quella formata .... dalla reciproco-inverso-reciproca $OM^{0\prime 0} \simeq \text{cj}\, OM : (\text{cj}\, OS)^2$, dalla reciproca $OM^0 \simeq 1 : \text{cj}\, OS$, dall'inversa $OM' \simeq 1 : \text{cj}\, OM$, dall'inverso-reciproco-inversa $OM'^{0\prime} \simeq \text{cj}\, OS : (\text{cj}\, OM)^2$, ... Si vede che le equipollenze di queste serie formano due progressioni geometriche, il cui rapporto è $OS : OM \simeq 2 \operatorname{sen} \theta . \gamma^{\theta - 1}$

oppure $\text{cj}\, OS : \text{cj}\, OM \simeq 2 \operatorname{sen} \theta\, \gamma^{1-\theta}$.

48. Su questo argomento possono vedersi le memorie: Sturm, *Ann. Gerg. Janv.* 1825, XV. — Raabe, *J. Crelle* 1827, II, p. 330, 334. — Quetelet, *N. Mémoires Acad., Bruxelles* 1829, IV. — Dandelin, *ivi, Bull. Férussac, Sept.* 1829, XII. — Chasles, *Corr. Math.* VII, *Bull. Férussac, Oct.* 1831. — Plücker, *J. Crelle* 1833. XI. — Steiner, *ivi*, 1838, XVIII, p. 369. — Wolf, *ivi*, 1839, XX, p. 88, 96. — Steiner, *ivi* 1840, XXI, p. 33 ... 63. — Serret, *J. Liouv.* 1843, VIII. — Tortolini, *Giorn. Arcad., Sett.* 1844. — Roberts, *J. Liouv.* 1845, X, p. 177 e 451. — Tortolini, *J. Crelle* 1846, XXXI, p. 12, XXXIII, p. 90, e 1847, XXXIV, p. 101, e *Roma* 1847. — Roberts, *J. Liouv.* 1847, XII, p. 41, 445 e 1848, XIII, p. 179, 209. — Strebor (Roberts), *N. Ann. Terq.* 1848, VII, p. 45. — Serret, *ivi*, VII, p. 98. — Legallais, *ivi*, VII, p. 234. — Strebor, *ivi*, 1849, VIII, p. 151. — Roberts, *J. Liouv.* 1850, XV, p. 209. — Tortolini, *Annali* 1850, I, p. 486. — Strebor, *N. Ann. Terq.* 1852, XI, p. 182. — Faure, *ivi*, 1853, XII, p. 34. — Bellavitis, *Atti Istit. Veneto, Marzo* 1853, IV, e *Agosto* 1855, I, p. 315, e *Ann. Tortol., Genn.* 1854, V, p. 31. — Raabe, *J. Crelle*, 1854, LXVIII, p. 105 e 1855, L, p. 189. — Liouville, *N. A. Terq.* 1854, XIII, p. 227. — Dieu, *ivi*, XIII, p. 259. — Tortolini, *Ann. Nov.* 1855, VI, p. 459. — Hirst, *Ann. Tortol.* 1859, II, p. 95

49. *Curve derivate dalla retta.* Daremo un' applicazione delle precedenti formule generali partendo dalla retta espressa da

$$OM \simeq \tfrac{1}{2}(1 + t\gamma) \quad ,$$

la (5) ci dà la reciproca

$$OM^0 \simeq dM : (\text{cj}\, OM . dM - OM . \text{cj}\, dM) \simeq 1 \quad ,$$

sicchè la reciproca è un punto, e tale è l'inverso-reciproca $M^{0'}$ essendo $OS \simeq 1$. L'inversa della retta M è il circolo dato dalla (1)

$$OM' \simeq \frac{2}{1 - t\nu} \simeq 2\frac{1 + t\nu}{1 + t^2} \quad .$$

Viene poi la parabola

$$OM'^0 \simeq (OM)^2 \simeq \tfrac{1}{4}(1 - t^2) + \tfrac{1}{2}t\nu \quad ,$$

essa è reciproca del circolo M' rispetto ad un suo punto O ; ed è pure reciproco-inversa della retta M , cioè i raggi emanati dal foco O sono riflessi dalla parabola M'^0 in raggi perpendicolari alla retta M , che è toccata da tutti i circoli, che passano pel foco ed hanno i centri sulla parabola. Questa M'^0 è pure reciproco-inverso-reciproca del punto M^0 , cioè (§ 46) se ciascuna retta passante per M^0 conserva la sua direzione, e prende una distanza dal foco O inversamente proporzionale alla sua distanza primitiva, essa diventa tangente alla parabola.

50. Viene poi la *cardioide*

$$OM'^{0\prime} \simeq 4\left(\frac{1 + t\nu}{1 + t^2}\right)^2$$

che è inversa della parabola rispetto al foco; inoltre inverso-reciproca, ossia sviluppante-caustica del circolo M' rispetto al suo punto O , quindi è l'inviluppo dei circoli che passano per O ed hanno i centri sul circolo M' .

51. Poscia abbiamo la *tritoma-tetrattomena* (curva di 3.° ordine e di 4.ª classe)

$$OM'^{0/0} \simeq (OM)^3 : (OS)^2 \simeq \tfrac{1}{8}(1 + t\nu)^3 \quad ,$$

che è reciproca della cardioide; reciproco-inversa della parabola M' rispetto al suo foco O , cioè i raggi emanati da O e da essa riflessi riescono perpendicolari alla parabola; la $M'^{0/0}$ è pure reciproco-inverso-reciproca del circolo M' rispetto al suo punto O , perciò le sue tangenti si deducono facilmente (§ 46) da quelle del circolo. Questa curva ha le tangenti (*Mio Saggio*, 1835, § 21)

$$dM'^{0/0} \simeq 3\,(OM)^2\,dM \quad ,$$

le cui inclinazioni rispetto alla dM , che è la costante ν , sono

$$\text{inc}\,dM'^{0/0} - \text{inc}\,dM = 2\,\text{inc}\,OM = \tfrac{2}{3}\,\text{inc}\,OM'^{0/0}$$

cioè i due terzi delle inclinazioni dei raggi vettori $OM'^{0/0}$.

52. *Curve derivate dalla spirale logaritmica.* Se la M sia la spirale logaritmica

$$\mathrm{OM} \simeq e^{(a+\nu)t} \simeq e^{at}\varepsilon^{t}$$

si ha per la (3) del § 41,

$$\mathrm{OS} \simeq (\mathrm{OM}.\ \mathrm{cj}\,\mathrm{dM} - \mathrm{cj}\,\mathrm{OM}.\ \mathrm{dM}) : \mathrm{cj}\,\mathrm{dM} \simeq \frac{-2\nu}{a-\nu}\,\mathrm{OM} \quad ,$$

sicchè la reciproca

$$\mathrm{OM}^{0} \simeq \frac{1}{\mathrm{cj}\,\mathrm{OS}} \simeq \frac{1-a\nu}{2\,\mathrm{cj}\,\mathrm{OM}} \simeq \tfrac{1}{2}(1-a\nu)\,e^{(-a+\nu)t} \quad ,$$

l' inverso-reciproca

$$\mathrm{OM}^{0\prime} \simeq \mathrm{OS} \simeq \frac{2}{1+a\nu}\,e^{(a+\nu)t} \quad ,$$

la reciproco-inverso-reciproca

$$\mathrm{OM}^{0\prime 0} \simeq \mathrm{cj}\,\mathrm{OM} : (\mathrm{cj}\,\mathrm{OS})^{2} \simeq \tfrac{1}{4}(a+\nu)^{2}\,e^{(-a+\nu)t} \quad ,$$

ecc. sono spirali tutte uguali.

53. *Curve derivate dal circolo.* Se la M sia un circolo dentro del quale si prenda il centro di derivazione O , la sua inversa è un altro circolo M′ , la reciproco-inversa M'^{0} è un' ellisse, la quale riflette i raggi emanati dal foco O in raggi perpendicolari al circolo M , e perciò concorrenti nel suo centro F , e siccome il circolo M come quello che è inverso-reciproco (sviluppante-caustica) dell' ellisse M'^{0} , è l' inviluppo dei circoli che passano per O ed hanno i centri sull' ellisse, così si ha $\mathrm{OM}'^{0} + \mathrm{FM}'^{0} = \mathrm{FM}$ cioè costante. — La $\mathrm{M}'^{0\prime}$ inversa dell' ellisse M'^{0} rispetto al suo foco O è sviluppante-caustica (inverso-reciproca) del circolo M′ , ed è inverso-reciproco-inversa dell' altro circolo M , ed è concoide di un circolo D′ concentrico col circolo M′ e passante pel polo O , il qual circolo D′ è inverso della retta D polare del foco O rispetto all' ellisse M'^{0} . Le proprietà dell' ellisse danno altre proprietà della concoide del circolo e viceversa, come feci vedere nella *Teoria delle figure inverse* (1836) citata al § 40.

54. *Derivate dall' ellisse rispetto al centro* O . L' ellisse ha l' equipollenza $\mathrm{OM} \simeq a\cos t + \nu\, b \operatorname{sen} t$, che dà

$$\mathrm{OM}^{0} \simeq \frac{1}{2ab}(b\cos t + \nu\, a \operatorname{sen} t)$$

perciò la reciproca è un' ellisse simile alla proposta, ma cogli assi scam-

biati. L' inversa dell' ellisse M^0 è inverso-reciproca della M , cioè l' inviluppo dei circoli che passano per O ed hanno i centri sulla M ; essa è facile da costruirsi perchè i suoi raggi vettori $OM^{0'}$ sono eguali alle corde, che sulla medesima retta $OM^{0'}$ rimangono intercette in un dato circolo. Simile costruzione vale per le lemniscate, che sono inverse delle iperbole rispetto al centro. — La M'^0 reciproco-inversa dell' ellisse M è la curva che riflette perpendicolarmente all' ellisse i raggi emanati dal centro ; oppure (riducendone alla metà la grandezza) è l' inviluppo delle perpendicolari ai diametri dell' ellisse nei loro punti estremi; essa è detta la curva di Talbot, ed ha coll' altra ellisse M^0 le relazioni (§ 46) delle curve reciproco-inverso-reciproche.

55. *Ordine e classe delle curve derivate* (veggasi il § 76). Se la curva primitiva M sia *algebrico-razionale* (§ 10), cioè le sue coordinate sieno funzioni razionali di una variabile t , ed appartenga all'ordine n ed alla classe m ; — la reciproca M^0 sarà dell' ordine m e della classe n ; — l' inversa M' sarà, generalmente parlando, dell' ordine $2n$, e della classe $2n+m$; — l' inverso-reciproca $M^{0'}$ (sviluppante-caustica, *podaire*) sarà dell' ordine $2m$ e della classe $2m+n$; — la reciproco-inversa M'^0 (curva riflettente, di cui la M è la sviluppante-caustica) sarà dell' ordine $2n+m$ e della classe $2n$; — la reciproco-inverso-reciproca $M^{0/0}$ sarà dell' ordine $2m+n$ e della classe $2m$; — ecc.

56. *Altre leggi di derivazione.* Nelle curve reciproche il raggio vettore OM^0 dipende da OM , dal suo differenziale dM , e dai loro conjugati: supponiamo ora che OM_d sia funzione, secondo il linguaggio delle equipollenze, del solo OM ; funzione suscettibile di differenziazione, cioè tale che se M soffre uno spostamento infinitesimo $M\mu$ il suo rapporto col corrispondente spostamento $M_d\mu_d$ sia determinato indipendentemente dalla direzione della retta infinitesima $M\mu$, la figura costituita da tutti i punti M_d si dirà *derivata* della figura dei punti M . Io aveva già accennati (Metodo delle equipollenze 1837, § 91) i vantaggi di questa generale derivazione, ed in particolare dell' *inversione* e della *duplicazione* espresse da

$$OM' \eqsim \frac{1}{OM} \quad , \quad OM^{(2)} \eqsim (OM)^2 \quad .$$

Questo argomento fu poi ampiamente trattato dal Liouville (*J. Math.* 1847, XII, p. 265) e da W. Roberts (XIII, p. 209). Veggasi anche Strebor (*N. A. Terq.* 1850, IX, p. 215); Serret (*ivi*, IX, p. 320); Bellavitis (*Ann. Tortol.* 1852,

III, p. 508). La derivazione in qualche modo analoga trattata dal Cayley (*J. Liouv.* 1849, XIV, p. 40, XV, p. 351) dà invece le curve reciproche delle *trasformate* accennate nel mio Saggio di Geometria derivata (*N. Saggi Acad., Padova* 1838, IV). — In questa generale maniera di derivazione si dimostra che se due linee si tagliano in un punto differente dal *centro di derivazione* O , le loro derivate si tagliano sotto il medesimo angolo; e che se le prime si toccano, le derivate hanno un contatto di egual ordine. — La costanza degli angoli d' intersezione porta di conseguenza che nell' *inversione* nello spazio le linee di curvatura delle superficie si mantengono tali, dal che risultano le analogie tra le linee di curvatura piana e le sferiche, giacchè coll' inversione i piani si cangiano in isfere.

57. Di queste derivazioni feci uso per risolvere alcune questioni proposte nei *Nouv. Annales de Math.* (*Atti Istit. Veneto* 1853, IV, p. 79), qui non farò che menzionarne alcune, le quali in parte risultano dal detto al § 49, dove vedemmo che la retta OM , e la sua duplicata $OM^{(2)} \backsimeq OM'^{0}$, triplicata $OM^{(3)} \backsimeq OM'^{0/0}$, ecc. formano una *serie negativa* (§ 47); mentre il circolo OM' e le sue duplicata $OM'^{(2)} \backsimeq OM'^{0'}$, triplicata $OM'^{(3)} \backsimeq OM^{0/0/0}$, ecc. formano una *serie-positiva.* — Duplicata della retta è la parabola col foco nel centro di derivazione O . — Sudduplicata della retta è l' iperbola equilatera col centro in O . — Duplicata del circolo passante pel centro di derivazione è la Cardioide che è anche inversa della parabola. — Duplicata del circolo col centro C è la Concoide del circolo che ha il centro $C^{(2)}$ (derivato per duplicazione da C) e che passa per l' inverso-foco O ; questa Concoide è anche Epicicloide col circolo mobile uguale al fisso, ed è eziandio inverso-reciproca di un altro circolo. — Sudduplicata del circolo col centro C è la Cassiniana col centro O ed i fochi $C^{(\frac{1}{2})}$ (derivati per sudduplicazione da C) (*); la Cassiniana diventa la Lemniscata quando il circolo passa per O . — Duplicata di un' ellisse col centro O è un' altra ellisse con un foco in O ; i fochi della prima sono i punti sudduplicati dell' altro foco della seconda.

58. *Coordinate curvilinee.* Nel metodo delle coordinate Cartesiane ortogonali ogni punto è determinato mediante l' intersezione di due sistemi di rette espresse dalle due equipollenze

(*) Questa proprietà della Cassiniana combinata colla (1) del § 32 dimostra immediatamente un teorema dato dal Garbin. *N. Ann. Terq.* 1855, XIV, p. 305.

$$(1) \quad \mathrm{OM} \simeq y\,\gamma + t \qquad \mathrm{ON} \simeq x + \theta\,\gamma$$

dove y x sono i parametri che individuano ciascuna retta, e t θ sono le variabili da punto a punto. Applicando a queste due equipollenze una delle derivazioni indicate nel § 56, otterremo due sistemi di linee, le quali pure si taglieranno ortogonalmente. Così adoperando la duplicazione otteniamo i due sistemi di parabole espressi da

$$(2) \quad \mathrm{OM}^{(2)} \simeq -y^2 + t^2 + 2\,y\,t\,\gamma \quad , \quad \mathrm{ON}^{(2)} \simeq x^2 - \theta^2 + 2\,x\,\theta\,\gamma \quad ,$$

esse hanno gli assi sulla medesima retta, ma rivolti in senso opposto. Ignoro se alcuno abbia fatto uso di tale sistema di coordinate. Ogni equazione lineare tra le x y, che nel sistema (1) appartiene ad una retta, nel sistema (2) apparterrà (§ 57) ad una parabola col foco O.

59. *Coordinate centrali.* Col mezzo della derivazione espressa dalla funzione

$$\mathrm{OM}_c \simeq e^{\mathrm{OM}}$$

si ha il sistema di linee

$$(3) \quad \mathrm{OM}_c \simeq e^t\,\varepsilon^y \quad , \quad \mathrm{ON}_c \simeq e^x\,\varepsilon^\theta \quad ;$$

le M_c sono rette passanti per O ed aventi l'inclinazione variabile y, e le N_c sono circoli di raggio variabile $e^x = r$; così abbiamo le notissime coordinate centrali, cioè l'azzimutto y ed il raggio vettore r. Ogni relazione lineare tra x ed y dà nel sistema (3) una spirale logaritmica col polo O.

60. *Coordinate circolari.* Eseguendo la derivazione d'inversione sulle (1) oppure sulle (3) (prendendo il centro d'inversione fuori del punto da cui partono tutte le rette M_c) si hanno due sistemi di circoli, che si tagliano ortogonalmente. Nel primo caso tutti i circoli M′ N′ passano pel centro d'inversione O, ed i loro diametri sono proporzionali a $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{x}$. Nel secondo caso i circoli M'_c di un sistema passano per due punti fissi I O, ed i circoli N'_c hanno i punti I O per conjugati-armonici. Queste coordinate circolari furono adoperate dal Thomson (*J. Liouv.* 1847, XII, p. 256).

61. *Coordinate ellittiche.* Eseguendo sulle precedenti (3) la derivazione espressa da

$$\mathrm{OM}_e \simeq \mathrm{OM}_c + \frac{1}{\mathrm{OM}_c}$$

si ha

$$(4)\quad OM_e \simeq \varepsilon^{y\,t} e^{t} + \varepsilon^{-y} e^{-t} \quad , \quad ON_e \simeq e^{x\,\theta} \varepsilon^{\theta} + e^{-x-\theta} \varepsilon^{-\theta} \quad ;$$

le N_e sono ellissi col centro O, il semiasse maggiore $e^{x} + e^{-x}$ ed il minore $(e^{x} - e^{-x})\sqrt{-1}$, e le M_e sono iperbole concentriche col semiasse primario $2\cos y$ ed il secondario $2\,\mathrm{sen}\,y$, l'eccentricità è per tutte queste curve uguale a 2, cioè esse sono biconfocali. Così abbiamo le coordinate ellittiche utilmente impiegate dal Lamé.

III.

COORDINATE CARTESIANE E PLUCHERIANE.

62. *Coordinate Cartesiane.* È noto che i punti di un piano si riferiscono a due *assi coordinati* CA CB mediante le loro distanze da questi assi; con x si segna la distanza del punto generico M dall'asse CB divisa pel seno dell'angolo compreso tra i due assi, e con y si segna la distanza di M da CA divisa pel suddetto $\mathrm{sen}\,ACB$. Oppure, il che torna lo stesso, si conducono da M le rette MP_1 MQ_1 rispettivamente parallele agli assi AC BC, e le porzioni $CQ_1 = x$, $CP_1 = y$, che esse tagliano sugli assi CA CB sono le coordinate del punto M. — Una equazione tra x ed y esprime un *luogo* di punti. Giova molto all'uniformità e facilità dei calcoli operare sopra equazioni rese omogenee coll'introduzione di una terza variabile; perciò le coordinate anzichè colle lettere x y le indicheremo coi rapporti $x:z$ $y:z$, ed il punto che ha tali coordinate col simbolo $(x, y:z)$. — Le x y z si possono moltiplicare a piacere per una medesima quantità, giacchè ciò non ne muta i rapporti, nè cangia le equazioni omogenee tra x y e z.

63. *Tangente, e ditoma osculatrice.* Mediante l'introduzione della terza variabile, data l'equazione di una curva, si rende facile di trovare l'equazione della tangente, oppure di una *ditoma* (curva di 2.° ordine) che abbia un contatto di 2.° ordine, oppure ecc.; basta a tal uopo differenziare una o più volte l'equazione della curva nell'ipotesi che le derivate-prime x' y' z' sieno costanti, poscia supporre che $x':z'$ $y':z'$ sieno le coordinate correnti,

mentre x y z ricevono i valori competenti al punto della curva nel quale vuol determinarsi la tangente o la ditoma osculatrice (Plücker, *Entwick.* § 545, Nota). — Sia per primo esempio la curva $2x^2 - 3xy + 5x - 2 = 0$, che ha un punto corrispondente ad $x = \frac{1}{2}$ ed $y = \frac{2}{5}$; l'equazione ridotta omogenea è

$$(1) \quad 2x^2 - 3xy + 5xz - 2z^2 = 0$$

ed il punto predetto è indicato da $(3, 4 : 6)$; per aver l'equazione della tangente in quel punto, nella derivata

$$(2) \quad (4x - 3y + 5z)x' - 3xy' + (5x - 4z)z' = 0$$

si sostituiranno alle x y z i loro valori 3 4 6 e si avrà l'equazione cercata $30x' - 9y' - 9z' = 0$.

— Sia data per secondo esempio la curva

$$y^2z - x^3 + 3x^2z = 0 \quad ,$$

l'equazione di tutte le sue tangenti sarà

$$(y^2 + 3x^2)z' + 3x(2z - x)x' + 2yzy' = 0 \; ;$$

mentre le ditome

$$4yy'z' + 12xx'z' + 6(z - x)x'^2 + 2zy'^2 = 0$$

avranno colla curva un contatto del 2.° ordine. Nel punto $(4, 4 : 1)$ la tangenza ha l'equazione $64z' - 24x' + 8y' = 0$, e siccome l'equazione dell'osculatrice $16y'z' + 48x'z' - 18x'^2 + 2y'^2 = 0$ è divisibile per quella della tangente ($y' + 3x' = 0$ essendo il quoziente), così si vede che in quel punto la curva ha un contatto di 2.° ordine colla propria tangente.

64. *Polare.* Se nella derivata (2) si sostituiscano i valori delle x y z corrispondenti ad un punto non appartenente alla curva (1), per esempio $(3, 0 : -2)$ invece dell'equazione della tangente si trova l'equazione

$$(4) \quad 2x' - 9y' + 23z' = 0$$

di una retta, la quale ha un'intima relazione col punto $(3, 0 : -2)$ e dicesi la sua *polare* rispetto alla curva (1). — La nota proprietà delle derivate delle funzioni omogenee dà una verificazione di calcolo da non trascurarsi: se nel primo membro della (2) si mutano le derivate x' y' z' nelle primitive x y z, dee risultarne il primo membro della (1) moltiplicato pel suo grado; sicchè se nella (4) si pone $x' = 3$, $y' = 0$, $z' = -2$, il va-

lore -40 del primo membro dev' essere doppio del valore del primo membro della (1) quando vi si sostituisca $(3,0:-2)$.

65. *Coordinate Plucheriane.* La dualità, che regna in tutta la Geometria tra i punti e le rette, rende importante di esprimere una retta con egual semplicità a quella, con cui si esprime un punto; ora l' ordinaria equazione di una retta

$$(C) \quad ux+vy+wz=0$$

dipende dai rapporti dei tre coefficienti u , v , w ; vediamo qual ne sia il significato geometrico: se la retta incontra i due assi coordinati CA CB nei punti Q P è evidente che

$$CQ=-\frac{w}{u} \quad , \quad CP=-\frac{w}{v} \quad ,$$

dunque i coefficienti $-u$ $-v$ sono inversamente proporzionali alle porzioni di assi, che rimangono comprese tra la retta e l' origine C delle coordinate. — Il Plücker (*Analyt.-geometrische Entwickelungen. Essen.* 1828, 1831) ebbe la felice idea di considerare i coefficienti u v w (cioè i loro rapporti) quali coordinate della retta QP , appunto come i rapporti delle x y z sono le coordinate di un punto M ; noi dunque esprimeremo la retta (C) col simbolo

$$[u,v:w] \quad .$$

Dopo ciò un' equazione omogenea tra le u v w considerate come variabili rappresenta una serie infinita di rette, ma più propriamente s' intende rappresentato dall' equazione l' *inviluppo* delle rette, cioè quella curva, che è da loro tutte toccate. — Le u v w coordinate di una retta si segnerebbero meglio colle lettere X Y Z , ma per comodo tipografico ritengo le prime.

66. *Equazioni delle rette e dei punti.* Come l' equazione Cartesiana di una retta è di primo grado tra le x y z , così l' equazione Plucheriana di un punto è di primo grado tra le u v w ; sì l' una che l' altra è espressa dalla (C) , ma nel primo caso x y z sono variabili ed u v w sono coefficienti costanti, e nel secondo caso queste sono variabili e quelle costanti. L'equazione Plucheriana (C) appartiene a tutte le rette che passano pel punto $(x,y:z)$, come la Cartesiana (C) appartiene a tutti i punti della retta $[u,v:w]$.

67. *Condizioni di congruenza.* L' equazione

$$(C) \quad ux+vy+wz=0$$

è la condizione di *congruenza* (§ 7) tra il punto $(x,y:z)$ e la retta $[u,v:w]$. Così, per esempio, si vede tosto che il punto $(3,-2:3)$ è congruente colla retta $[7,3:-5]$, cioè questa passa per quello.

68. Il punto d' intersezione di due rette $[u,v:w]$ $[u_1,v_1:w_1]$ è quello congruente ad entrambi, ed è

$$(vw_1 - wv_1 \ , \ wu_1 - uw_1 \ : \ uv_1 - vu_1) \ .$$

Un' espressione perfettamente analoga dà la retta congruente a due punti; così, per es., i due punti $(3,-2:3)$ $(2,-3:1)$ appartengono alla retta

$$[-2+9 \ , \ 6-3 \ : \ -9+4] = [7,3:-5] \ .$$

69. Daremo il nome di *congruenza* anche alla relazione di tre punti in linea retta, oppure di tre rette concorrenti in un medesimo punto: è noto che tale condizione pei tre punti $(x,y:z)$, $(x_1,y_1:z_1)$, $(x_2,y_2:z_2)$ è espressa dal determinante

$$| \ xy_1z_2 \ | = xy_1z_2 - xy_2z_1 - x_1yz_2 + x_1y_2z + x_2yz_1 - x_2y_1z = 0 \ .$$

Riuscirà più comodo osservare che ogni punto congruente coi due $(x,y:z)$, $(x_1,y_1:z_1)$ è indicato da

$$(x_2,y_2:z_2) = p\,(x,y:z) + q\,(x_1,y_1:z_1)$$

dove intendiamo che

$$x_2 = px + qx_1 \ , \ y_2 = py + qy_1 \ , \ z_2 = pz + qz_1 \ .$$

Precisamente le stesse cose valgono rispetto alle rette; così, per esempio, le tre rette

$$[7,3:-5] \ , \ [4,3:1] \ , \ [6,4:0]$$

sono congruenti, perchè si ha

$$[7,3:-5] = -5\,[4,3:1] + 9\,[3,2:0] \ .$$

70. Per dimostrare che tre paja di rette s' intersecano in tre punti congruenti (cioè in linea retta) non occorre determinare quei punti d' intersezione, ed è più spedito dare una retta congruente, se è possibile, con ciascuna delle tre paja. Similmente date le due paja di punti

$$(3,-2:3) \ , \ (4,-3:2) \ ; \ (2,3:5) \ , \ (6,9:-1)$$

il punto d' intersezione delle loro rette è $(2,3:28)$ perchè esso è tanto

$$= 18\,(3,-2:3) - 13\,(4,-3:2)$$

quanto $$= \frac{85}{16}(2,3:5) - \frac{23}{16}(6,9:-1) ,$$

resterà poi da vedere se $(2,3:28)$ sia congruente anche col terzo pajo di punti.

71. *Distanza di un punto da una retta.* Quando la condizione di congruenza (C) non è soddisfatta, il suo primo membro $ux+vy+wz$ è proporzionale alla distanza del punto $(x,y:z)$ dalla retta $[u,v:w]$, la quale, se gli assi sono ortogonali, è

$$\frac{ux+vy+wz}{z\sqrt{(u^2+v^2)}} .$$

In ogni caso il rapporto tra le distanze della retta $[u,v:w]$ dal punto $(x,y:z)$ e dall' origine delle coordinate $(0,0:1)$ è

$$\frac{ux+vy+wz}{wz} .$$

72. La *distanza di due punti* $(x,y:z)$ $(x_1,y_1:z_1)$ se gli assi CA CB sono ortogonali è

$$\sqrt{((zx_1-xz_1)^2+(yz_1-y_1z)^2)} \quad :zz_1 .$$

73. L' *angolo di due rette* $[u,v:w]$ $[u_1,v_1:w_1]$ è uguale a quello compreso tra le rette ad esse parallele condotte per l' origine delle coordinate, le quali sono $[u,v:0]$ $[u_1,v_1:0]$. Chiamando γ l' angolo ACB dei due assi coordinati, la prima di queste rette è espressa (§ 65, 35) dall' equipollenza

$$\mathrm{CM} \backsim \frac{1}{u} - \frac{\gamma}{v} \backsim \frac{1}{u} - \frac{\cos\gamma}{v} - \frac{\operatorname{sen}\gamma}{v}\gamma$$

perciò se λ sia la sua inclinazione sull' asse, CA sarà

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{u\operatorname{sen}\gamma}{u\cos\gamma - v} ,$$

da cui si deduce che la tangente dell' angolo compreso tra le due rette è

$$\frac{(uv_1-u_1v)\operatorname{sen}\gamma}{uu_1+vv_1-(uv_1+u_1v)\cos\gamma} .$$

Se gli assi coordinati sono ortogonali, la condizione che le due rette sieno perpendicolari è

$$uu_1+vv_1 = 0 .$$

74. *Punto di contatto.* La regola data al § 63, per trovare le tangenti di un dato *luogo* vale egualmente per determinare i punti di contatto in un *inviluppo* espresso da un' equazione Plucheriana. Così, per esempio, la curva-inviluppo

$$(1) \quad 24\,u\,v + 41\,v^2 + 30\,v\,w + 9\,w^2 = 0$$

ha la tangente $[-10, 3 : 3]$ giacchè l' equazione è soddisfatta dai valori $u = -10$, $v = 3$, $w = 3$; per trovare il punto di contatto tra la tangente e l' inviluppo, si sostituiscano quei valori di u v w nella derivata

$$(2) \quad 24\,v\,u' + (24\,u + 82\,v + 30\,w)\,v' + (30\,v + 18\,w)\,w' = 0 \ ,$$

e

$$72\,u + 96\,v + 144\,w = 0$$

sarà l' equazione Plucheriana del punto di contatto, il quale perciò è espresso da $(3, 4 : 6)$, avendo semplificato i rapporti di 72 96 144 .

75. *Polo.* Se nella derivata (2) si sostituiscono $u = 2$, $v = -9$, $w = 23$, che non soddisfanno alla (1), e quindi individuano una retta $[2, -9 : 23]$, che non è tangente alla curva, otteniamo il punto

$$-216\,u + 144\,w = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad (-3, 0 : 2) \ ,$$

che ha un' intima relazione colla predetta retta, e si dice il suo *polo.* Rispetto alle curve di 2.° ordine ogni punto è polo della sua polare; tale è la duplice relazione che ha luogo (§ 64) tra il punto $(3, 0 : -2)$ e la retta $[2, -9 : 23]$ rispetto al luogo di punti rappresentato dall' equazione Cartesiana

$$2\,x^2 - 3\,x\,y + 5\,x\,z - 2\,z^2 = 0$$

ossia all' inviluppo di rette rappresentato dall' equazione Plucheriana

$$24\,u\,v + 41\,v^2 + 30\,v\,w + 9\,w^2 = 0 \ ,$$

che sono, come vedremo al § 147, una sola e medesima curva.

76. *Ordine e classe delle curve.* Una stessa curva può considerarsi come luogo di punti e come inviluppo di rette, e così essa è rappresentata da una equazione tra coordinate Cartesiane e da una tra coordinate Plucheriane, i gradi di queste due equazioni si dicono rispettivamente l' *ordine* e la *classe* della curva. Nei primordii di queste teorie Gergonne dubitava che la classe potesse essere una stessa cosa dell' ordine (*Ann. Gergonne Oct.* 1828, XIX, N.° 4, e poi *Janv.* 1829, N.° 7), io feci vedere (*Giorn. Letter. Ital. Padova*, 4.° bim. 1828) con un esempio che una curva del 3.° ordine era veramente di 6.ª classe.

La classe di una curva di $n.^{esimo}$ ordine può ascendere a $n(n-1)$; ma la classe può anche esser minore dell' ordine, giacchè, per la piena reciprocità tra l' ordine e la classe, se questa è m quello può ascendere fino a $m(m-1)$. — Rispetto alle curve *algebrico-razionali* (Vegg. il § 10) questi limiti sono più ristretti, cioè, se n è l'ordine, la classe non può esser superiore a $2(n-1)$ e nemmeno inferiore a $\frac{n}{2}+1$, giacchè se m è la classe, l'ordine non può superare $2(m-1)$. — Per brevità di linguaggio alle curve di 3.°, 4.°, ecc. ordine, o di 3.ª, 4.ª, ecc. classe, io do i nomi di *trìtome*, *tetràtome*, ecc. e di *triattòmene*, *tetrattòmene*, ecc. facendo allusione al loro carattere grafico d' essere *tagliate* da una retta in 3, 4, ecc. punti, e d' esser *toccate* da 3, 4, ecc. rette condotte per un punto. Così pure alle curve di 2.° ordine e di 2.ª classe, che per lo stesso oggetto di brevità furono chiamate *sezioni coniche*, poscia con minor esattezza *coniche*, io do i nomi di *dìtome* o di *diattòmene*, preferendo l' uno o l' altro secondo che voglio considerare la curva come un luogo di punti, o piuttosto come un inviluppo di rette.

77. *Curve reciproche.* Mutando le $x\ y\ z$ nelle $u\ v\ w$, e supposto che gli assi coordinati sieno ortogonali, l' equazione Cartesiana $f(x,y,z)=0$ di una curva diventa l' equazione Plucheriana $f(u,v,w)=0$ di un' altra curva che è la reciproca della prima nel significato stabilito al § 43. Infatti la retta, che congiunge un punto $(x,y:z)$ della prima curva coll'origine $(0,0:1)$ delle coordinate, è espressa (§ 68) da $[y,-x:0]$, quindi è (§ 73) perpendicolare alla retta $[x,y:z]$, cioè ad una tangente $[u,v:w]$ della seconda curva ; inoltre la distanza (§ 72) $\sqrt{(x^2+y^2)}:z$ del punto $(x,y:z)$ dall' origine $(0,0:1)$ è inversamente proporzionale alla distanza (§ 71) $z:\sqrt{(x^2+y^2)}$ di questo punto $(0,0:1)$ dalla tangente $[x,y:z]$.

78. *Polari.* Rispetto alle curve d' ordine superiore al 2.° una retta è polare (§ 64) di più punti differenti ; nè questi possono dirsi *poli* di quella. Esponiamo brevemente questa teoria. Data una $n.^{toma}$ (cioè curva di $n.^{esimo}$ ordine) mediante l' equazione omogenea di $n.^{esimo}$ grado,

$$(1)\quad f(x,y;z)=0$$

dicemmo al § 64 che la sua derivata

$$(2)\quad f_0'''x+f_0''''y+f_0'''''z=0$$

è l' equazione della *polare-rettilinea* del punto $(x_0, y_0 : z_0)$; f''' f'' f''' sono le tre derivate-parziali della f , e l' indice $_0$ segna che in esse si mutarono le x y z nelle x_0 y_0 z_0 ; le derivate x' y' z' si cangiarono nelle coordinate correnti x y z . Se invece conserviamo le x y z e mutiamo le derivate x' y' z' nelle coordinate del punto dato $(x_0, y_0 : z_0)$, l' equazione

$$\text{(II)} \quad x_0 f''' + y_0 f''' + z_0 f''' = 0$$

appartiene ad una $(n-1)^{\text{toma}}$, che si dice la *prima-polare* del punto $(x_0, y_0 : z_0)$ rispetto alla $n.^{\text{toma}}$ $f = 0$. *Ogni punto* $(x_1, y_1 : z_1)$ *di questa prima-polare ha la polare rettilinea*

$$f_1''' x + f_1''' y + f_1''' z = 0 \ ,$$

che passa pel punto primitivo $(x_0, y_0 : z_0)$, come si vede da ciò che questa equazione è soddisfatta da $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. — Siccome ogni punto della curva ha per polare (§ 63) la tangente, così il precedente teorema comprende quello del Poncelet: *Le tangenti condotte da un punto toccano la curva nei punti, nei quali essa è tagliata dalla prima-polare di quel punto.*

79. Tutti i punti $(x_0, y_0 : z_0)$ della retta

$$u x_0 + v y_0 + w z_0 = 0$$

hanno le loro prime-polari rispetto alla $f = 0$, che si tagliano nei medesimi $(n-1)^2$ punti dati dalle equazioni

$$\frac{1}{u} f''' = \frac{1}{v} f''' = \frac{1}{w} f''' \ ;$$

ognuno di questi punti ha per polare-rettilinea rispetto alla stessa $f = 0$, la retta $f''' x_0 + f''' y_0 + f''' z_0 = 0$, cioè la retta primitiva $[u, v : w]$. Così in ogni $n.^{\text{toma}}$ sono osservabili gli $(n-1)^2$ punti, che hanno per polare la retta all' infinito. (Liouville, *Journ.* 1844, IX, pag. 340).

80. La seconda derivata

$$\text{(III)} \quad x_0^2 f'''' + 2 x_0 y_0 f'''' + y_0^2 f'''' + 2 x_0 z_0 f'''' + \text{ecc.} = 0$$

è l' equazione della polare $(n-2)^{\text{toma}}$ del punto $(x_0, y_0 : z_0)$ tanto rispetto alla $n.^{\text{toma}}$ (I), quanto rispetto alla $(n-1).^{\text{toma}}$ (II): essa si dice la *seconda-polare* rispetto alla (I). — E così si continua fino alla $(n-1)^{\text{esima}}$ *polare*, la

quale per la proprietà delle funzioni omogenee è la medesima *polare-rettilinea* data dalla (2). — Similmente la $(n-2)^{\text{esima}}$ polare, che diremo anche *polare-ditoma*, ha l' equazione

$$(3) \quad f_0''' x^2 + 2 f_0''' xy + f_0''' y^2 + \text{ecc.} = 0$$

81. *Polari-speciali.* La $(n-2)^{\text{esima}}$ polare, ossia la polare-ditoma, rispetto alla $n.^{\text{toma}}$ $f=0$ di un punto della curva stessa oscula la curva (§ 63) in quel punto: quindi se in esso la curva abbia colla propria tangente un contatto di secondo ordine, l' equazione della polare-ditoma deve comprendere come fattore l' equazione della tangente, tolto il quale rimarrà l' equazione di un'altra retta, che noi diremo la $(n-2)^{\text{esima}}$ *polare-rettilinea.* — In particolare, se la curva $f=0$ è una tritoma, un suo flesso (punto di flesso contrario) ha per *prima-polare-ditoma* un sistema di due rette, una è la tangente, l' altra è la *prima-polare-rettilinea* del flesso; questa taglia (§ 78) la curva nei punti, le cui tangenti passano pel flesso, come vi passa ogni polare-rettilinea di un punto di essa prima-polare-rettilinea. — Vedremo che se va all'infinito un flesso; la sua prima-polare-rettilinea diventa un *diametro*, e che se va all' infinito questo, quello diventa un *centro*. Per un teorema del Mac-Laurin i tre flessi di una tritoma sono in linea retta, facendoli andare all'infinito tutti e tre la curva ha tre diametri, e siccome questi (Bréton, *N. A. Terq.* 1855, XIV, p. 18) deggiono esser congruenti, così: *Le prime-polari-rettilinee dei tre flessi di una tritoma s' incontrano in un solo punto degno d' osservazione.* Viceversa, il § 79 ci mostrò che se alquante prime-polari (di qualunque ordine esse sieno) hanno un punto comune, i punti di cui sono le polari stanno in linea retta (Brioschi, *A. Tortol.* 1853, IV, p. 479). — Nell' esempio del § 63, la tritoma $y^2 z - x^3 + 3 x^2 z = 0$ ha nei punti $(4, \pm 4 : 1)$ due flessi, le cui tangenti sono $[-3, \pm 1 : 8]$, e le *prime-polari-rettilinee* sono $[3, \pm 1 : 0]$, che passano per l' origine delle coordinate (il qual punto osservabile è anche il punto *isolato*), il terzo flesso è a distanza infinita e la sua prima-polare-rettilinea, che è quindi un diametro, è l' asse delle ascisse. — Intorno ai diametri ed ai centri possono consultarsi: Bréton, *J. Liouv.* 1845, X, p. 430, 1846, XI, p. 153, *N. A. Terq.* 1848, VII, p. 187. — Wantzel, *Compt. R. Août* 1848, XXVI, p. 600, *Janv.* 1849, XXVIII, p. 66, *J. Liouv.* 1849, XIV, p. 111. — Choquet, *N. A. Terq.* VIII, p. 281. — Steiner, *J. Crelle*, 1853, XLVII, N. 1, 2, 3.

82. *Proprietà delle polari.* Prendiamo a considerare il punto O $(0,1:0)$, che sta a distanza infinita sulle rette parallele all' asse coordinato CB, giacchè $\frac{x}{z}=\frac{0}{0}$, $\frac{y}{z}=\frac{1}{0}$; sia

$$(1)\quad y^n+(ax+bz)y^{n-1}+(cx^2+dxz+ez^2)y^{n-2}+\text{ecc.}=0$$

l' equazione della $n.^{\text{toma}}$; rispetto ad essa il punto O ha (§ 78) la polare rettilinea

$$(2)\quad ny_0^{n-1}y+ay_0^{n-1}x+by_0^{n-1}z=0$$

ossia

$$ny+ax+bz=0\ .$$

All' ascissa $\frac{x}{z}=p$ corrisponde l' ordinata $\frac{y}{z}=q=\frac{-ap-b}{n}$ della polare e le ordinate $q_1\ q_2\ \ldots\ q_n$ della curva, le quali per la nota proprietà dell'equazione (1) hanno la somma $=-(ap+b)$; dunque: Teorema del Newton: *La polare-rettilinea di un punto posto a distanza infinita è il luogo dei baricentri* (§ 30) *delle n intersezioni della curva con ciascuna retta rivolta verso quel punto.* A queste polari dei punti all'infinito fu dato il nome di *diametri*, ma noi riserviamo (§ 81) tal denominazione alle rette, che dimezzano tutte le ordinate, la cui esistenza, anzichè generale per tutte le curve algebriche, costituisce un carattere specifico di alcune.

83. Chiamando P il punto sulla polare, e $Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_n$ quelli sulla curva, la proprietà precedente è espressa da $\Sigma PQ=0$ (s' intende di per sè che nel sommare le rette $PQ_1\ PQ_2\ \ldots.\ PQ_n$ si dee badare alle loro direzioni). Introducendo il punto O, che è a distanza infinita, si può scrivere $\Sigma\frac{PQ}{OQ}=0$, allora l' equazione è suscettibile della derivazione projettiva, e per tale proprietà, che può indicarsi con $\Sigma\left(\frac{1}{OQ}-\frac{1}{OP}\right)=0$, risulta il Teorema di Côtes. *Se da un punto* O *si tirano quante si vogliano rette, che taglino la curva in n punti, i centri-armonici* P *di queste intersezioni rispetto all' origine* O *appartengono alla polare-rettilinea del punto* O.

84. La $(n-2)^{\text{esima}}$ polare, ossia polare-ditoma, del punto all' infinito $(0,1:0)$ rispetto alla (1) ha l' equazione

$$(3)\quad \frac{n(n-1)}{2}y_0^{n-2}y^2+(n-1)y_0^{n-2}(axy+byz)+y_0^{n-2}(cx^2+dxz+ez^2)=0.$$

Supponiamo trasportato l' asse coordinato CA fino a passare per uno $\mathfrak{P}$

dei punti d' intersezione della (3) coll' ordinata corrispondente all' ascissa $\frac{x}{z}=p$, in tal caso la (3) sarà soddisfatta da $y=0$, perciò sarà $cx^2+dxz+ez^2=0$, e la (I) mostrerà esser nulla la somma dei prodotti a due a due dei valori di y , cioè essere $\Sigma \mathfrak{P}Q_i . \mathfrak{P}Q_{i'}=0$. Operando come nel § precedente si trova che: *Per ciascuna secante condotta per* O *i punti* $\mathfrak{P}$, *che danno*

$$\Sigma\left(\frac{1}{OQ_i}-\frac{1}{O\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{1}{OQ_{i'}}-\frac{1}{O\mathfrak{P}}\right)=0$$

appartengono alla polare-ditoma del punto O .

85. Se il punto O è situato sulla curva, si ha $\frac{1}{OQ}=\infty$, e perciò in tal caso la polare-ditoma ha la proprietà della polare rettilinea

$$\Sigma\left(\frac{1}{OQ}-\frac{1}{O\mathfrak{P}}\right)=0 \quad .$$

Ciò spetta in particolare alla prima-polare-rettilinea dei flessi.

86. *Esempio.* Rispetto alla tritoma-tetrattomena

$$(I) \quad x^3+x^2z-y^2z=0$$

il punto $(x_0, y_0 : z_0)$ ha la polare-rettilinea

$$(2) \quad 3x_0^2x+2x_0z_0x-2y_0z_0y+(x_0^2-y_0^2)z=0$$

ossia $$[3x_0^2+2x_0z_0 \ , \ -2y_0z_0 \ : \ x_0^2-y_0^2] \ ,$$

e la polare-ditoma

$$(II) \quad 3x_0x^2+2x_0xz-2y_0yz+z_0(x^2-y^2)=0 \quad .$$

I due punti $(1,5:-2)$ $(0,3:2)$ hanno le polari-ditome

$$3x^2+2xz-10yz-2(x^2-y^2)=0 \quad , \quad -6yz+2(x^2-y^2)=0$$

che si tagliano nel punto $(2,1:1)$, il quale ha per polare la retta $[16,-2:3]$ che è congruente con quei due punti ; dicasi lo stesso degli altri punti d' intersezione, tranne che di $(0,0:1)$, che essendo punto doppio ha la polare indeterminata. Ciascun altro punto di una polare-ditoma, per esempio $(2,4:1)$ della prima, oppure $(2,-4:1)$ della seconda, ha la polare-rettilinea $[-4,2:3]$, oppure $[4,2:-3]$, che passa pel corrispondente punto $(1,5:-2)$, oppure $(0,3:2)$.

87. *Poli; poliche.* Quando una curva si considera come un inviluppo, cioè si ha l' equazione omogenea di $m.^{esimo}$ grado

$$(I) \quad F(u, v, w) = 0$$

di tutte le sue tangenti $[u, v : w]$; la derivata

$$(2) \quad F_0'''\, u + F_0''\, v + F_0'''\, w = 0$$

darà (§ 74, 78) il punto di contatto della tangente $[u_0, v_0 : w_0]$ colla curva, e per ogni altra retta $[u_0, v_0 : w]$ determinerà un punto $(F_0''', F_0'' : F_0''')$ che si dice il *polo* della retta. (Questa viceversa non può dirsi la polare di quello se non che nel caso che la F sia del 2.° grado). L' altra equazione

$$(II) \quad u_0 F''' + v_0 F'' + w_0 F''' = 0$$

è quella di una curva, che tocca tutte le tangenti della (I) spettanti ai punti, in cui questa è incontrata dalla retta $[u_0, v_0 : w_0]$; infatti se $[u_1, v_1 : w_1]$ sia una di queste tangenti della (I), il suo punto di contatto dato dalla (2) $F_1''' u + F_1'' v + F_1''' w$ dovendo appartenere alla retta $[u_0, v_0 : w_0]$ renderà $F_1''' u_0 + F_1''' v_0 + F_1''' w_0 = 0$, che è appunto la (II), nella quale si sono mutate $u\ v\ w$ in $u_1\ v_1\ w_1$. Questa (II), che ha proprietà *correlative* (cioè corrispondenti nelle figure reciproche) a quelle della polare-$(n-1)^{toma}$ (§ 78), la diremo la *prima-polica* ossia la *polica*-$(m-1)^{attomena}$ della retta $[u_0, v_0 : w_0]$ rispetto alla $m.^{attomena}$ (I). — *Se la* $[u_0, v_0 : w_0]$ *gira intorno ad un punto* $(x, y : z)$ *tutte le sue poliche*-$(m-1)^{attomene}$ *toccano* $(m-1)^2$ *rette, ognuna delle quali ha il polo* $(x, y : z)$. — Nuovamente derivando si ha la *seconda-polica*, ossia polica-$(m-2).^{attomena}$

$$(III) \quad F'''' u_0^2 + 2 F''' u_0 v_0 + \text{ecc.} = 0$$

della retta $[u_0, v_0 : w_0]$ rispetto alla $m.^{attomena}$ (I), o rispetto alla $(m-1)^{attomena}$ (II); e continuando si terminerà coll' avere il *polo* della $[u_0, v_0 : w_0]$ già dato dalla (2). — La retta posta all' infinito, che è $[0, 0 : 1]$, ha il polo dato dalla (2); oppure dalla derivata $D_w^{m-1} F = 0$; la prima-polica ha l' equazione $F''' = 0$, la seconda-polica è $F'''' = 0$, ecc.

88. *Primi-poli speciali.* Ogni tangente della (I) ha per polo il proprio punto di contatto e per polica-diattòmena una ditoma osculatrice della curva: ora se la curva sia triattòmena (cioè di 3.ª classe), e si consideri la tangente d' un suo regresso, in tal punto il raggio di curvatura è nullo e la osculatrice

non può esser che un punto, perciò la polica-diattomena si decompone in due parti, una delle quali dà il punto di contatto, e l' altra un punto, che diremo il *primo-polo* della tangente di regresso; quando i regressi sono tre, le loro tangenti sono congruenti, e lo sono pure i primi-poli delle medesime. Se una tangente di regresso va all' infinito il suo primo-polo diventa un *centro* della curva, e se va all' infinito il primo-polo, la tangente del regresso diventa un *diametro*.

89. *Sistemi di rette o di punti.* Un luogo è un sistema di rette quando la $f(x,y,z)=0$ si decompone in fattori di 1.° grado, in simil modo un inviluppo espresso da $F(u,v,w)=0$ può essere un sistema di punti; rispetto al primo sistema ogni punto ha le sue *polari*, e rispetto al secondo sistema ogni retta ha il suo *polo* e le sue *poliche* curvilinee. — Sia $\mathfrak{p}$ la polare-rettilinea del punto O rispetto ad una $n.^{\text{toma}}$, e si consideri il sistema di n tangenti, i cui punti di contatto sieno sopra una stessa retta con O; le intersezioni colla curva e col sistema di tangenti della predetta retta, nonchè di una ad essa infinitamente vicina sono identiche, ne risulta il teorema del Mac-Laurin che la polare di O rispetto a tal sistema di rette è la medesima $\mathfrak{p}$. — Così pure: Il polo di una retta $\mathfrak{q}$ rispetto ad una $m.^{\text{attomena}}$ è identico col polo di $\mathfrak{q}$ rispetto al sistema degli m punti di contatto delle tangenti condotte da un punto qualsivoglia della $\mathfrak{q}$. — Se la retta $\mathfrak{q}$ sia a distanza infinita si ha il teorema del Chasles: *Il polo della retta all' infinito è il baricentro* (centro di gravità) *dei punti di contatto di* m *tangenti parallele.*

90. Per queste ed altre proprietà delle polari possono vedersi Gergonne, *Annales de Math., Nov.* 1827, XVIII. *Bullet. Férussac, Janv.* 1828, IX. — Bobillier, *Ann. Gerg., Oct.* 1827, *Dec.* 1827, *Mars, Oct., Nov.* 1828, *Avril* 1829, *Bull. Férussac, Nov.* 1827, VIII, n.° 272, IX, n.° 43, *Mai* 1828, X, pag. 285, *Déc.* 1828, *Avril* 1829, XI. — Chasles, *Corr. Math. Quet.* 1829, V, 1830, VI; *B. Fér., Janv. Mars* 1830, XIII. — Grassmann, *J. Crelle* 1842, XXIV. N. 21, 24. — Liouville, *Journ. Math., Sept.* 1841, VI, *Oct.* 1844, IX, p. 337. — Cauchy, *Compt. R., Juin* 1843, XVI, p. 1279. — Druckenmüller, *J. Crelle* 1843, XXVI, p. 1 ... 25. — Joachimsthal, *J. Crelle* 1846, XXXIII, p. 366. — Lebesgue, *N. A. Terq.* 1848, VII, p. 385. — Terquem, *N. Ann.* 1848, VII, p. 308, 423, 1850 IX, p. 283. — Jonquières, *Mélanges de Géometrie etc. Paris* 1856, e *J. Liouv.* 1857, II, p. 249 ... 266.

IV.

MANIERE PIÙ GENERALI DI COORDINATE.

91. La generalità dei metodi analitici giova a semplificare i calcoli adattando ciò che vi è di arbitrario nel metodo alle speciali circostanze della questione; così, per esempio, se debbasi dimostrare un teorema, che sussista in tutte le figure *affini*, saranno da abbandonarsi le coordinate ortogonali e scegliere invece il loro angolo in modo di meglio accomodarlo alla figura; il calcolo baricentrico è ancora più opportuno delle coordinate obbliquangole, giacchè in esso si hanno tre punti affatto arbitrarii: che se si tratti di una proprietà projettiva può adoperarsi il calcolo baricentro abbreviato. Relativamente alla dualità si vede che come il calcolo baricentrico generalizza le coordinate Cartesiane, così dovrà aversi un calcolo *(baricentrale)* il quale introduca egual generalità nelle coordinate Plucheriane.

92. *Calcolo baricentrico.* Invece che a due assi CA CB i punti del piano si possono riferire ad un triangolo CAB, che diremo il *triangolo coordinato:* un punto qualunque M è dato mediante l' equipollenza

$$x.\,\mathrm{MA} + y.\,\mathrm{MB} + z.\,\mathrm{MC} \simeq 0$$

la quale esprime (§ 6) che tre forze aventi le direzioni MA MB MC e le grandezze x.MA y.MB z.MC si fanno equilibrio. M è il *baricentro* dei punti A B C coi *coefficienti* x y z (cioè il centro di gravità delle *masse* x y z poste nei punti A B C); ciò s' indica con

$$(1) \quad \mathrm{M} \simeq x.\,\mathrm{A} + y.\,\mathrm{B} + z.\,\mathrm{C}$$

supponendo che sia $x+y+z=1$. Questo punto M noi lo indicheremo col simbolo

$$(2) \quad (x, y, z) .$$

Si vede che il punto M è determinato dai rapporti tra le x y z; ammessa la $x+y+z=1$, x è il rapporto delle aree dei triangoli MBC ABC, ossia la distanza del punto M dal lato BC del triangolo coordinato divisa per la corrispondente altezza; s' intende senza dirlo che se A M fossero da bande opposte della retta indefinita BC, x sarebbe negativo; simile significato hanno le y z. — Secondo quanto dice il Coriolis (1835),

che non conosceva l' opera del Möbius (1827), i principii del calcolo baricentrico si trovano nell' opera del matematico Italiano G. Ceva, *De rectis lineis invicem secantibus statica constructio* (1768).

93. Si unisca il punto M coi tre vertici A B C e sieno P_1 Q_1 R_1 i punti dove le rette AM BM CM incontrano i lati BC CA AB ; il punto M sarà determinato mediante due delle

$$(3) \quad P_1 \eqsim y.B + z.C \ , \quad Q_1 \eqsim z.C + x.A \ , \quad R_1 \eqsim x.A + y.B$$

la prima delle quali significa che P_1 è il baricentro dei punti B C coi coefficienti y z ; se si voglia mutare il segno $\eqsim$, che indica la mancanza di un fattore, nel segno d' equipollenza $\simeq$ bisogna scrivere $(y+z)\,P_1 \simeq y.B + z.C$, che equivale alla ordinaria equipollenza $(y+z)\,OP_1 \simeq y.OB + z.OC$, qualunque siasi il punto O . — I punti P_1 Q_1 R_1 sono rispettivamente segnati con $(0,y,z)$ $(x,0,z)$ $(x,y,0)$, ed i vertici A B C con $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$.

94. Se i valori delle x y z rimangono arbitrarii ma sottoposti ad un' equazione omogenea, la (1) esprime un luogo di punti ; in particolare la equazione

$$(C) \quad ux + vy + wz = 0$$

appartiene ad una retta, che è determinata mediante i rapporti delle u v w , e che noi indicheremo con

$$(4) \quad [u, v, w] \ .$$

95. *Calcolo baricentrale* analogo al calcolo baricentrico del Möbius e che ricade nelle coordinate tangenziali del Salmon. Dati alquanti punti L M N .... coi coefficienti λ μ ν .... , il loro baricentro

$$\lambda.L + \mu.M + \nu.N + \ldots$$

si costruisce determinando da prima sulla retta LM il baricentro delle masse λ μ poste nei punti L M , e questo punto col coefficiente $(\lambda+\mu)$ si combina nello stesso modo col punto N avente il coefficiente ν , e così in seguito ; è noto che in qualunque ordine si proceda si giunge in fine allo stesso baricentro. Analogamente a ciò se in un piano sieno date alquante rette $\mathfrak{l}$ $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$ ... che supponiamo tutte uguali all' unità di lunghezza attribuendovi poi i coefficienti numerici λ μ ν .... , e delle quali si conoscano non solo le posizioni ma anche le direzioni, si costruirà la loro *baricentrale* $\lambda.\mathfrak{l} + \mu.\mathfrak{m} + \nu.\mathfrak{n} + \ldots$

nel seguente modo: pel punto d' intersezione delle rette $\mathbf{l}$ $\mathbf{m}$ si conduca una retta espressa dalla *baricentrale*, (ossia somma-geometrica (§ 5)), $\lambda.\mathbf{l}+\mu.\mathbf{m}$, che sarà data in grandezza e direzione della diagonale del parallelogrammo descritto coi due lati $\lambda.\mathbf{l}$ $\mu.\mathbf{m}$ presi partendo dal predetto punto d' intersezione; questa *baricentrale* $\lambda.\mathbf{l}+\mu.\mathbf{m}$ si prenda nella propria direzione partendo dal punto, in cui essa incontra la $\mathbf{n}$, e da quel punto si guidi la baricentrale di essa e della $\nu.\mathbf{n}$; e così in seguito: in qualunque ordine si proceda si giungerà in fine alla medesima baricentrale

$$\lambda.\mathbf{l}+\mu.\mathbf{m}+\nu.\mathbf{n}+\ldots$$

che esprimerà in grandezza, direzione e posizione la forza risultante delle $\lambda.\mathbf{l}$ $\mu.\mathbf{m}$ $\nu.\mathbf{n}$ ecc. Questa composizione delle rette è uguale a quella usata nel metodo delle equipollenze; ma della composta-equipollente (o somma-geometrica) è determinata soltanto la grandezza e la direzione (potrebbe essa trasportarsi ovunque parallelamente a sè stessa), e della *baricentrale* è determinata anche la posizione; noi adopereremo nullostante il solito segno e scriveremo

$$\xi.\mathbf{x}\simeq\lambda.\mathbf{l}+\mu.\mathbf{m}+\nu.\mathbf{n}+\ldots$$

Si noti bene che (essendo $\mathbf{x}$ una retta di lunghezza uno) il coefficiente ξ non è mai eguale alla somma dei coefficienti λ μ ν ... come per lo contrario avviene sempre nel calcolo baricentrico. — Le rette possono anche esprimersi con PQ SR .... ed allora ne è data la grandezza e la direzione, che intendesi sempre presa dalla prima verso la seconda lettera. Il Lettore già prevede che la *baricentrale* di due rette parallele è uguale alla loro somma, e ne divide la distanza in parti inversamente proporzionali.

96. Stabilito in questa maniera il significato della *baricentrale* di alquante rette, noi possiamo riferire la posizione di una retta qualsivoglia $\mathbf{m}$ ai lati del triangolo coordinato CAB in un modo molto analogo a quello, con cui nel calcolo baricentrico (§ 92) un punto M si riferisce ai tre vertici A B C, e ciò ponendo

$$(1)\quad \mathbf{m}\simeq u.\mathrm{BC}+v.\mathrm{CA}+w.\mathrm{AB}\quad;$$

siccome non badiamo alla grandezza della retta, ma soltanto alla sua posizione, così ciò che veramente determina la retta $\mathbf{m}$ sono i rapporti u v w, non già i loro valori assoluti; noi indicheremo tal retta col simbolo

$$(2)\quad [u,v,w]\quad;$$

nella (1) si pose il segno $\eqsim$ in luogo di $\simeq$ appunto per avvertire che manca un fattore numerico, giacchè la retta $\mathfrak{m}$ potrà supporsi eguale all'unità di lunghezza, e la lunghezza della composta-equipollente espressa dal secondo membro dipende dalla grandezza dei lati del triangolo coordinato CAB, nonchè dai valori assoluti delle u v w. Se la retta $\mathfrak{m}$ incontra i lati BC CA AB nei punti P Q R sarà

(3) $\mathrm{AP} \eqsim v.\mathrm{CA} + w.\mathrm{AB}$, $\mathrm{BQ} \eqsim w.\mathrm{AB} + u.\mathrm{BC}$, $\mathrm{CR} \eqsim u.\mathrm{BC} + v.\mathrm{CA}$

ciò è conforme alle definizioni stabilite nel § precedente: la baricentrale delle rette $v.\mathrm{CA}$ $w.\mathrm{AB}$ passa pel loro punto d'incontro A ed ha per direzione la diagonale del parallelogrammo avente per lati la $w.\mathrm{AB}$ (cioè w volte la AB) ed una retta equipollente alla $v.\mathrm{CA}$, cioè che sia la prolungazione della CA ed eguale a v volte la CA, se tal diagonale abbia la direzione AP ed incontri in P il lato BC, rimarrà poi da trovare la baricentrale della predetta diagonale presa da P in poi e della retta equipollente ad $u.\mathrm{BC}$ presa essa pure dal punto P, questa baricentrale determinerà la posizione della $\mathfrak{m}$; ora ci bastava stabilire che essa passa per P. Similmente componendo da prima le $u.\mathrm{BC} + w.\mathrm{AB}$, la loro baricentrale BQ ci determina sul terzo lato CA il punto Q, pel quale dee passare la cercata $\mathfrak{m}$, che similmente si dimostra passare per R. — Nella (1) in luogo di $\mathfrak{m}$ possiamo scrivere indifferentemente PQ o QP o PR ecc. giacchè la (1) indica soltanto la posizione della baricentrale.

97. Le posizioni dei punti P Q R, nei quali la retta $[u, v, w]$ incontra i lati del triangolo coordinato CAB, sono facilmente determinate col calcolo baricentrico. Infatti, la prima delle (3) è l'equipollenza

$$(w - v)\,\mathrm{AP} \simeq -v.\mathrm{AC} + w.\mathrm{AB} \quad ;$$

al primo membro abbiamo dato il coefficiente $(w - v)$ perchè vogliamo che il punto P appartenga alla retta BC, questa equipollenza ha precisamente lo stesso significato dell'espressione baricentrica

$$(w - v)\,\mathrm{P} \simeq -v.\mathrm{C} + w.\mathrm{B} \quad , \text{ ossia } \quad \mathrm{P} \eqsim -v.\mathrm{C} + w.\mathrm{B} \quad ,$$

cioè il punto P è il baricentro delle masse $-v$ w poste in C B. Questa espressione baricentrica può anche convertirsi nella equipollenza

$$v.\mathrm{CP} \simeq w.\mathrm{BP} \ :$$

siccome le CP BP sono proporzionali alle perpendicolari abbassate dai vertici C B sulla retta $\mathfrak{m}$ che passa per P, e quanto abbiamo

detto della prima delle (3) può applicarsi anche alle altre due, così ne conchiuderemo che: *Le* u v w *sono proporzionali alle distanze della retta* $[u, v, w]$ *dai tre vertici* A B C *del triangolo coordinato.* — Noi ordinariamente supporremo che le u v w sieno eguali alle distanze predette.

98. *Equazione del punto.* Se i valori delle u v w rimangono arbitrarii ma sottoposti ad un' equazione omogenea, la (1) del § 96 esprime un inviluppo di rette; in particolare l' equazione

$$(C) \quad xu + yv + zw = 0$$

appartiene ad un punto, che è determinato mediante i rapporti dei coefficienti x y z, e che noi indicheremo con

$$(4) \quad (x, y, z) .$$

99. Si noti l' analogia tra il calcolo baricentrico ed il baricentrale, poi si osservi che le x y z u v w adoperate nei § 92, 94 hanno lo stesso significato delle uguali lettere adoperate nei § 96, 98; ossia che

$$(C) \quad ux + vy + wz = 0$$

è la condizione di congruenza del punto M determinato dalla (1) del § 92 colla retta $\mathfrak{m}$ determinata dalla (1) del § 96. Infatti perchè dalle

$$M \simeq x.A + y.B + z.C , \quad P \simeq -v.C + w.B , \quad Q \simeq w.A - u.C$$

possa risultare $M \simeq \frac{y}{w} P + \frac{x}{v} Q$ (la quale esprime che il punto M appartiene alla retta PQ) bisogna che sia $z = -\frac{vy}{w} - \frac{ux}{w}$.

100. *Distanza di un punto da una retta.* Egualmente che nel § 71, si trova che la distanza tra il punto (x, y, z) e la retta $[u, v, w]$ è data dal primo membro

$$ux + vy + wz$$

dell' equazione (C), purchè si supponga (§ 97) che u v w sieno uguali alle distanze della retta dai vertici del triangolo coordinato, e che sia $x + y + z = 1$ (§ 92), cioè ciascuna delle x y z sia la distanza del punto da un lato del triangolo coordinato divisa per la rispettiva altezza.

101. *Relazioni tra i calcoli baricentrico e baricentrale.* Si può con tutta facilità passare dall' uno all' altro dei due predetti calcoli, poichè l' *espressione* baricentrica (§ 92)

$$x.A + y.B + z.C$$

di un punto (x, y, z) si cangia nella sua equazione baricentrale (§ 98)

$$xu + y\upsilon + zw = 0$$

col sostituire ai vertici A B C le coordinate baricentrali u υ w. Similmente la retta $[u, \upsilon, w]$ è data tanto dall' espressione baricentrale (§ 96)

$$u.\mathrm{BC} + \upsilon.\mathrm{CA} + w.\mathrm{AB}$$

quanto dall' equazione baricentrica (§ 94)

$$ux + \upsilon y + wz = 0 \ ,$$

sicchè ai lati del triangolo coordinato ABC vengono a sostituirsi le coordinate baricentriche x y z riferite ai vertici del medesimo triangolo. Queste osservazioni ci permettono di adoperare promiscuamente i principii dell'uno e dell' altro calcolo. Alle loro formule possono anche darsi altre interpretazioni, per le quali ci occorre premettere il

102. *Principio generale sui luoghi o sugli inviluppi tra loro congruenti.* Tre o più linee considerate come *luoghi* di punti noi le diremo congruenti quando hanno precisamente gli stessi punti d' intersezione tanto reali che immaginarii. È per sè evidente che se $f(x, y, z) = 0$, $f_1(x, y, z) = 0$ sono le equazioni omogenee di due luoghi, questi saranno congruenti con tutti quelli appartenenti all'equazione $f + \lambda f_1 = 0$, essendo λ un coefficiente numerico moltiplicato ove occorra per una potenza di una delle x y z. — Nella stessa maniera gli *inviluppi* dati dalle equazioni.

$$F(u, \upsilon, w) = 0 \ , \ F_1(u, \upsilon, w) = 0 \ , \ F + \lambda F_1 = 0 \ ,$$

saranno *congruenti,* intendendosi con ciò che ogni tangente comune a due di essi lo è a tutti. (Gergonne, *Annales* 1827, XVIII ; *B. Féruss., Mars* 1827, VII, n.° 139. — Bobillier, *An. Gerg., Mai* 1828, XVIII, *B. Fér. Juill.* 1828, X, n.° 1.)

103. *Altra interpretazione del calcolo baricentrale.* L' equazione di una retta **a** sia della forma

$$(1) \quad -x_c \operatorname{sen} \alpha + y_c \cos \alpha + \alpha' = 0$$

dove x_c y_c sono le coordinate Cartesiane (§ 62) ortogonali, α è l' inclinazione della retta sull' asse delle x_c , ed α' è la sua distanza dall' origine delle coordinate; è facile dimostrare che se nel primo membro della (1) si pongono in luogo di x_c y_c le coordinate di un punto qualunque, il suo

valore dà in grandezza ed in segno la distanza di quel punto dalla retta $\mathfrak{a}$. Similmente le rette $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... abbiano le equazioni

$$-x_c \operatorname{sen}\beta + y_c \cos\beta + \beta' = 0 \ , \ \ldots . \ ;$$

con $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... s' indichino i primi membri di tali equazioni. — Ciò posto la retta

$$p.\mathfrak{a} + q.\mathfrak{b} = 0$$

è congruente (§ 102) colle due $\mathfrak{a} = 0$ $\mathfrak{b} = 0$, dico di più che essa è precisamente quella che nel calcolo baricentrale si espresse con

$$\mathfrak{m} \doteq p.\mathfrak{a} + q.\mathfrak{b} \ ,$$

purchè le $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ rappresentino due porzioni di rette uguali all' unità di lunghezza, e talmente dirette che le distanze delle medesime dall' origine delle coordinate abbiano gli stessi segni delle quantità α' β'. Infatti un punto qualunque della retta $p.\mathfrak{a} + q.\mathfrak{b} = 0$ ha le sue distanze

$$-\operatorname{sen}\alpha x_c + \cos\alpha y_c + \alpha' \ , \ -\operatorname{sen}\beta x_c + \cos\beta y_c + \beta'$$

dalle rette $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ nel rapporto $-q:p$, proprietà che spetta ai punti della diagonale $\mathfrak{m}$ (§ 95) del parallelogrammo, i cui lati hanno le grandezze p q. — In simil modo si dimostra che la retta data dall' espressione baricentrale

$$\mathfrak{m} \doteq p.\mathfrak{a} + q.\mathfrak{b} + r.\mathfrak{c} + \ldots .$$

ha l' equazione ordinaria Cartesiana

$$p.\mathfrak{a} + q.\mathfrak{b} + r.\mathfrak{c} + \ldots = 0$$

essendo $\mathfrak{a} = -\operatorname{sen}\alpha x_c + \cos\alpha y_c + \alpha' \ , \ \ldots .$

104. Limitandoci a considerare tre rette $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ che sieno poste sui lati BC CA AB, abbiano le direzioni di questi e le lunghezze $= 1$, vediamo che la retta $[u, v, w]$ data dall' espressione

$$\mathfrak{m} \doteq u.\mathrm{BC} + v.\mathrm{CA} + w.\mathrm{AB}$$

del § 96, ossia

$$\mathfrak{m} \doteq u\,\mathrm{gr\,BC}.\,\mathfrak{a} + v\,\mathrm{gr\,CA}.\,\mathfrak{b} + w\,\mathrm{gr\,AB}.\,\mathfrak{c}$$

(indicando con gr la grandezza numerica positiva della retta che segue) ha l' equazione

$$\mathfrak{a}.u\,\mathrm{gr\,BC} + \mathfrak{b}.v\,\mathrm{gr\,CA} + \mathfrak{c}.w\,\mathrm{gr\,AB} = 0$$

essendo $\mathfrak{a} = -\operatorname{sen}\alpha x_c + \cos\alpha y_c + \alpha' \ , \ \mathrm{ecc.}$

105. Si potrebbe mutare le u v w includendovi i fattori costanti $\mathrm{gr\,BC}$ $\mathrm{gr\,CA}$ $\mathrm{gr\,AB}$, ma allora bisognerebbe rammentarsi che le nuove u v w sarebbero (§ 97) proporzionali alle distanze della retta dai tre vertici A B C rispettivamente divise per le altezze del triangolo coordinato ABC, le quali altezze sono inversamente proporzionali ai lati $\mathrm{gr\,BC}$, $\mathrm{gr\,CA}$, $\mathrm{gr\,AB}$. Con questo nuovo significato delle u v w volendo conservare la relazione di congruenza (C) $ux+vy+wz=0$ bisognerebbe intendere che le nuove x y z fossero (§ 92) proporzionali alle distanze del punto M dai lati del triangolo coordinato, e la (1) si muterebbe nella

$$\mathrm{M} \doteq x\,\mathrm{gr\,BC.A} + y\,\mathrm{gr\,CA.B} + z\,\mathrm{gr\,AB.C}\ .$$

Credo meglio attenermi all'ipotesi fatta nei § 92, 97.

106. Attribuendo il precedente significato $-\operatorname{sen}\alpha\, x_c + \cos\alpha\, y_c + \alpha'$ ec. alle $\mathfrak{a}$, ecc. s'intende il significato non solamente d'ogni equazione di 1.° grado che contenga un qualsivoglia numero di $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., il che potrebbe ottenersi anche colla considerazione della baricentrale, ma inoltre di ogni equazione di grado superiore come sarebbe per esempio

$$(1)\qquad \mathfrak{a}^2 + \lambda.\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mu.\,\mathfrak{b}\mathfrak{d} = 0$$

giacchè ponendo in luogo di $\mathfrak{a}$, ... le solite funzioni si vede che tale equazione appartiene ad un luogo di 2.° ordine; inoltre, siccome le coordinate x_c y_c di un qualunque punto di tal luogo danno (§ 103) alle funzioni $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ .... valori uguali alle distanze di quel punto dalle rette $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ..., così la (1) esprimerà una relazione tra le distanze a b d di un qualunque punto del luogo dalle rette $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{d}$. Questa considerazione rende evidenti alcune proprietà delle curve.

107. *Altra interpretazione del calcolo baricentrico.* L'equazione di un punto A sia della forma

$$(1)\qquad \alpha_1 u_p + \alpha_2 v_p + 1 = 0$$

essendovi u_p v_p le coordinate Plucheriane (§ 65) riferite a due assi OX OY tra loro ortogonali, ed α_1 α_2 sieno le coordinate Cartesiane del punto A prese parallelamente ad OX ed a OY; è facile dimostrare che se nel primo membro della (1) si ponga in luogo di u_p v_p le coordinate Plucheriane $\frac{u}{w}$ $\frac{v}{w}$ di una retta qualsivoglia $\mathfrak{m}$, il valore di tal primo membro dà in grandezza ed in segno il rapporto delle distanze da quella

retta del punto A e dell' origine O delle coordinate. Similmente le equazioni dei punti B , ... sieno delle forme $\beta_1 u_p + \beta_2 v_p + 1 = 0$, ... e con B .... s' indichino i primi membri di tali equazioni. — Ciò posto il punto dato dall' equazione

$$p.\mathrm{A} + q.\mathrm{B} = 0$$

è congruente (§ 102) coi due A B dati da $\mathrm{A} = 0$ $\mathrm{B} = 0$, dico di più che esso è quello che nel calcolo baricentrico si esprime con

$$(p+q)\,\mathrm{M} \simeq p.\mathrm{A} + q.\mathrm{B} \ .$$

Infatti le distanze del punto M da una retta qualunque è uguale alla somma delle distanze dei punti A B moltiplicate rispettivamente per $p:(p+q)$ $q:(p+q)$, il che è appunto la proprietà del baricentro dei punti A B coi coefficienti p q . Simile dimostrazione vale per un maggior numero di punti.

108. Viene da ciò che quando nel calcolo baricentrico si giunge ad una espressione

$$\mathrm{M} \simeq x.\mathrm{A} + y.\mathrm{B} + z.\mathrm{C}$$

può conchiudersi che il punto M ha l' equazione Plucheriana

$$x.\mathrm{A} + y.\mathrm{B} + z.\mathrm{C} = 0$$

essendo $\mathrm{A} = \alpha_1 u_p + \alpha_2 v_p + 1$, ecc. E se con A B C s' intendono le distanze dei punti A B C da una retta passante per M sarà

$$xA + yB + zC = 0 \ .$$

109. Eguali interpretazioni possono darsi alle equazioni tra A B C .... di grado superiore. Così, per esempio, la

$$(1) \quad \mathrm{A}^2 + \lambda.\mathrm{BC} = 0$$

sarà l' equazione Plucheriana ad assi ortogonali OX OY

$$(2) \quad (\alpha_1 u_p + \alpha_2 v_p + 1)^2 + \lambda\,(\beta_1 u_p + \beta_2 v_p + 1)\,(\gamma_1 u_p + \gamma_2 v_p + 1) = 0$$

(la quale può ridursi omogenea ponendo $u_p = \frac{u}{w}$, $v_p = \frac{v}{w}$) ; inoltre se s' indichino con A B C le distanze dei punti A B C da una tangente qualunque dell' inviluppo, che ha l' equazione (2), tali distanze avranno la relazione

$$(3) \quad A^2 + \lambda.BC = 0 \ .$$

110. *Terza interpretazione del calcolo baricentrico.* Noi possiamo anche

supporre che le lettere A B ... , con cui nel calcolo baricentrico s' indicano i punti, rappresentino i primi membri delle ordinarie equazioni Cartesiane dei circoli sotto la forma

$$(1) \quad x_c^2 + y_c^2 - 2\alpha_1 x_c - 2\alpha_2 y_c - \alpha = A = 0$$

essendo α_1 α_2 le coordinate ortogonali del punto A , che è il centro del circolo, ed α un valore che può prendersi ad arbitrio per tre punti, che non sieno congruenti. L' equazione

$$R = 0 \quad , \quad \text{essendo} \quad (p+q)R = p.A + q.B \quad ,$$

appartiene essa pure ad un circolo, ed è della stessa forma della (1) ; inoltre pel principio generale (§ 102) i tre circoli $A = 0$, $B = 0$, $R = 0$ sono congruenti, cioè hanno la medesima *secante-comune*, la quale ha l' equazione

$$A - B = 0$$

ed è facile dimostrare che il centro R del terzo circolo è quello stesso determinato dall' espressione baricentrica

$$R \backsimeq p.A + q.B \quad .$$

In generale si dimostra che il punto M dato da

$$M \backsimeq x.A + y.B + z.C$$

è il centro di un determinato circolo, la cui equazione è

$$x.A + y.B + z.C = 0$$

avendo A B C valori analoghi alla (1).

111. Alle precedenti espressioni baricentriche può aggiungersi un altro significato ; il valore che prende la funzione $A = x_c^2 + y_c^2 - 2\alpha_1 x_c - 2\alpha_2 y_c - \alpha$ quando si pongono per x_c y_c le ordinarie coordinate di un punto qualsivoglia P è uguale al quadrato della tangente condotta dal punto P al circolo $A = 0$, o, per dirlo più generalmente, uguale al quadrato della distanza AP del punto P dal centro A meno il quadrato del raggio del circolo $A = 0$ (il qual quadrato è negativo quando il circolo è immaginario); per ispeditezza daremo a tal valore della funzione A rispetto al punto P il nome di quadrato della *distanza-tangenziale* del punto P dal circolo $A = 0$. Risulta da questa maniera di considerare il calcolo baricentrico che se

$$(x+y+z)M \backsimeq x.A + y.B + z.C \quad ,$$

la somma dei quadrati delle *distanze-tangenziali* di un punto qualsivoglia P dai circoli di raggi arbitrarii $A=0$ $B=0$ $C=0$ moltiplicati rispettivamente per x y z è uguale al quadrato della distanza-tangenziale di P dal circolo $M=0$ moltiplicato per $x+y+z$.

112. *Centro radicale.* Come un esempio della predetta interpretazione del calcolo baricentrico noteremo che le tre secanti-comuni

$$A-B=0\ ,\ B-C=0\ ,\ C-A=0$$

dei tre circoli $A=0$ $B=0$ $C=0$ presi a due a due sono tra loro congruenti (giacchè una delle tre equazioni nasce dalla somma delle altre due); questo punto in cui s' incontrano le tre secanti-comuni (dette anche assi radicali) dicesi il *centro radicale* dei tre circoli; ne viene (§ 111) che le distanze-tangenziali del centro radicale dai tre circoli sono eguali.

113. Dati ad arbitrio tre circoli coi centri non congruenti, consideriamo il quarto circolo

$$(1)\quad D=A+B-C=0$$

il suo centro $D\simeq A+B-C$ (da cui $CA\simeq BD$) sarà il quarto vertice del parallelogrammo CADB . Ogni punto del circolo $D=0$ ha, in forza della (1), il quadrato della distanza-tangenziale dal circolo $C=0$ uguale alla somma dei quadrati delle distanze-tangenziali degli altri due circoli. Le secanti-comuni del circolo $D=0$ con ciascheduno dei due $A=0$, $B=0$ sono identiche colle secanti-comuni $B-C=0$, $A-C=0$; ossia il circolo $D=0$ passa pei quattro punti d' intersezione del circolo $A=0$ colla retta $B-C=0$, e del circolo $B=0$ colla retta $A-C=0$. — Possiamo supporre come un caso particolare che i tre circoli $A=0$ $B=0$ $C=0$ passino per un medesimo punto I , che sarà il loro centro radicale, allora anche il circolo $D=0$ passerà per I . — Se i circoli $A=0$ $B=0$ $C=0$ abbiano i raggi nulli, le distanze-tangenziali dai medesimi di un punto qualunque M saranno AM , ecc., perciò l' equazione (1) equivalerà alla $(AM)^2+(BM)^2=(CM)^2$, e tutti i punti che soddisfanno a tal relazione apparterranno al circolo $D=0$, che facilmente potrà determinarsi: la secante-comune $B-C=0$ dei due circoli di raggio nullo $B=0$ $C=0$ è la retta che dimezza perpendicolarmente la retta BC , e che sarà secante-comune anche del circolo $D=0$ e del punto A .

114. Colle equazioni dei circoli (§ 110) possono combinarsi anche quelle

delle rette (§ 103). Così, per dare un solo esempio, la ditoma che ha l'equazione

$$(1) \quad A - \lambda^2 \mathfrak{bc} = 0$$

passa pei punti d'intersezione del circolo $A = 0$ con ciascuna delle rette $\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{c} = 0$. Se le due rette coincidono in una sola la ditoma $A - \lambda^2 \mathfrak{b}^2 = 0$ ha col circolo un doppio contatto, la $\mathfrak{b} = 0$ essendone la secante-comune-doppia; ciascun punto della ditoma ha la distanza-tangenziale dal circolo $A = 0$ eguale a λ volte la sua distanza dalla retta $\mathfrak{b} = 0$. Quando il circolo si riduce ad un punto A si ha la nota proprietà della ditoma (sezione conica) rispetto al foco A ed alla sua polare $\mathfrak{b}$.

115. *Casi particolari del sistema coordinato.* Se il triangolo CAB abbia un vertice C a distanza infinita, cioè esso si riduca a due rette parallele tagliate da una terza AB le (3) del § 93 e le (3) del § 96 divengono

$$BP_1 \simeq \frac{z}{y} \qquad AQ_1 \simeq \frac{z}{x} \qquad R_1 \simeq x.A + y.B$$

$$BP \simeq \frac{-v}{w} \qquad AQ \simeq \frac{-u}{w} \qquad R \simeq u.B - v.A$$

potremo ammettere che $x + y = 1$, che le x y z sieno le distanze del punto M dalle rette BP QA AB misurate parallelamente all'altra retta, e che le u v sieno le distanze della retta $[u, v, w]$ dai due vertici A B .

116. Un altro caso particolare è quello, in cui sia andato all'infinito tutto il lato AB del triangolo ABC ; allora si ha

$$CP_1 \simeq \frac{y}{z} \quad , \quad CQ_1 \simeq \frac{x}{z} \quad , \quad CP \simeq -\frac{w}{v} \quad , \quad CQ \simeq -\frac{w}{u}$$

e ricadiamo nelle coordinate Cartesiane (§ 62) e nelle Plucheriane (§ 65) supponendo $z = 1$, e w eguale alla distanza dell'origine C delle coordinate dalla retta $[u, v, w]$.

117. *Proprietà generali.* A tutti i metodi di coordinate che abbiamo accennati si applicano le condizioni di congruenza spiegate al § 67 ecc., ed inoltre la distanza tra il punto (x, y, z) e la retta $[u, v, w]$ è data dal primo membro $ux + vy + wz$ della (C), purchè si ritenga che $x + y + z = 1$ (§ 92), e che u v w sieno eguali (§ 97), anzichè soltanto proporzionali, alle distanze della retta dai tre vertici A B C ; e purchè nei due casi particolari descritte nei §§ precedenti si facciano le supposizioni di $x + y = 1$

e di $z=1$. — Così pure si applicano al caso generale anche i teoremi sulle tangenti, sulle polari, sui punti di contatto, sui poli, sulle poliche ecc. (§ 63 ... 88)

118. *Retta all' infinito.* È molto importante distinguere i punti posti a distanza infinita, i quali, come è noto, deggiono considerarsi quali posti tutti su una retta. Nel metodo Cartesiano questa retta è data da $z=0$, e nel Plucheriano da $\omega=\infty$, ossia $[0,0,1]$. Nel calcolo baricentrico essa ha l' equazione $x+y+z=0$, ossia è indicata dal simbolo $[1,1,1]$, sicchè l' espressione baricentrale (§ 96) di tal retta è $BC+CA+AB$, che secondo i principii del metodo delle equipollenze è nulla; l' eguaglianza delle distanze u v ω della retta dai tre vertici del triangolo coordinato mostra che essa è situata all' infinito. — Nel primo dei casi particolari precedentemente considerati (§ 115) la retta all' infinito è data da $v=\omega$, ed $u=0$, cioè $[0,1,1]$.

119. *Polari, poli e poliche rispetto ad un triangolo.* I tre lati del triangolo coordinato ABC formano insieme un luogo di 3.° ordine che ha l'equazione baricentrica

$$(1) \quad xyz=0 \ .$$

Le due polari del punto (x_0,y_0,z_0) rispetto a questo luogo si deducono (§ 78, 117) dall' equazione derivata $yzx'+zxy'+xyz'=0$, cioè la polare-ditoma ha l' equazione

$$(2) \quad x_0yz+y_0zx+z_0xy=0 \ ,$$

e la polare-rettilinea ha l' equazione

$$(3) \quad y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=0 \ ,$$

ossia è espressa da $[\frac{1}{x^0}\ ,\ \frac{1}{y_0}\ ,\ \frac{1}{z_0}]$. — Se il punto è a distanza infinita, cioè se $x_0+y_0+z_0=0$ la sua polare-rettilinea tocca la diattomena (curva di 2.ª classe) data dall' equazione baricentrale

$$(4) \quad v\omega+\omega u+uv=0 \ ,$$

perchè quest' equazione è soddisfatta da $u=\frac{1}{x_0}$, $v=\frac{1}{y_0}$, $\omega=\frac{1}{z_0}$; la medesima diattomena tocca il lato AB $[0,0,1]$ nel punto dato (§ 74) da

$$(\omega+v)\,u'+(\omega+u)\,v'+(v+u)\,\omega'=u'+v'=0 \ ,$$

cioè nel punto $(1,1,0)$ che è nel mezzo del lato AB ; dunque: *Le po-*

lari-rettilinee di tutti i punti all' infinito rispetto ai lati di un triangolo sono tangenti all' ellisse, che tocca i lati nei loro punti di mezzo.

120. La predetta polare-ditoma (2) di un punto qualsivoglia passa pei tre vertici del triangolo ABC , inoltre, se il punto è a distanza infinita, essa passa pel baricentro G (1 , 1 , 1) del triangolo (perchè quando $x_0+y_0+z_0=0$ la (2) è soddisfatta da $x=y=z$) . Dunque (§ 79): *La retta all' infinito è polare-rettilinea del baricentro G rispetto ai tre lati.* — La polare-ditoma di un punto $(x_0,y_0,0)$ del lato AB si decompone nella retta $z=0$, che è la polare-rettilinea, e nella retta $x_0y+y_0x=0$ ossia $[y_0,x_0,0]$, che è (§ 81) la prima-polare-rettilinea.

121. I tre vertici A B C del medesimo triangolo vengono a costituire (§ 89) un inviluppo di 3.ª classe, che ha l' equazione baricentrale

$$(1) \quad uvw=0 \quad ;$$

rispetto ad esso la retta $[u_0,v_0,w_0]$ ha la polica-diattomena

$$(2) \quad u_0vw+v_0wu+w_0uv=0$$

ed il polo

$$(3) \quad v_0w_0u+w_0u_0v+u_0v_0w=0$$

ossia

$$\left(\frac{1}{u_0}\ ,\ \frac{1}{v_0}\ ,\ \frac{1}{w_0}\right) \quad .$$

Perciò il polo della retta all'infinito [1 , 1 , 1] è il baricentro G (1 , 1 , 1) . — La polica-diattomena della medesima retta all' infinito è la stessa ellisse (4) trovata nel § precedente.

122. *Cangiamento delle coordinate.* Nel metodo Cartesiano è notissimo come si cangino le coordinate; giova fare separatamente il trasporto dell' origine delle coordinate e la rotazione degli assi intorno ad essa. Se sugli assi prendiamo le lunghezze CH CK eguali all'unità, il punto $(x,y:1)$ è dato dall' equipollenza

$$\mathrm{CM}\simeq x.\,\mathrm{CH}+y.\,\mathrm{CK} \quad ;$$

e rispetto a due nuovi assi dati da

$$\mathrm{CH}'\simeq \alpha_1.\,\mathrm{CH}+\beta_1.\,\mathrm{CK} \quad , \quad \mathrm{CK}'\simeq \alpha_2.\,\mathrm{CH}+\beta_2.\,\mathrm{CK}$$

avremo

$$\mathrm{CM}\simeq x'.\,\mathrm{CH}'+y'.\,\mathrm{CK}'\simeq$$

$$\simeq (\alpha_1 x'+\alpha_2 y')\,\mathrm{CH}+(\beta_1 x'+\beta_2 y')\,\mathrm{CK}$$

dunque

$$x=\alpha_1 x'+\alpha_2 y' \ , \ y=\beta_1 x'+\beta_2 y' \ .$$

Se ambedue i sistemi sieno ortogonali, e sia α l' angolo di rotazione, si ha

$\alpha_1 = \beta_2 = \cos\alpha$, $\beta_1 = -\alpha_2 = \operatorname{sen}\alpha$; sicchè il punto $(x, y : 1)$ sarà rispetto ai nuovi assi coordinati

$$(x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \ , \ x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \ : \ 1) \ .$$

123. Se le nuove coordinate Plucheriane $u' \ v' \ w'$ sieno riferite agli assi C'H' C'K' , i quali rispetto agli assi primitivi CH CK sieno espressi da

$$[-\operatorname{sen}\varphi \ , \cos\varphi : \mu] \quad [\cos\downarrow, \operatorname{sen}\downarrow : \lambda]$$

osservando che nel nuovo sistema essi sono $[0, v' : 0]$ $[u', 0 : 0]$, e che la retta all' infinito è nei due sistemi $[0, 0 : w]$ $[0, 0 : w']$, vedremo che le relazioni tra le vecchie e le nuove coordinate deggiono essere della forma

$$u = \alpha u' \cos\downarrow - \beta v' \operatorname{sen}\varphi \ , \ v = \alpha u' \operatorname{sen}\downarrow + \beta v' \cos\varphi \ , \ w = \alpha\lambda u' + \beta\mu v' + w' \ ,$$

i coefficienti α β dipendono dagli angoli HCK H'C'K' : se ambedue sieno retti si ha (§ 35) $\downarrow = \varphi$; considerando una retta parallela alla C'K' espressa da $[u', 0 : w']$, si riconosce che se la sua distanza dalle origini C C' sia grandissima si ha

$$\frac{w}{u} = \frac{w'}{u'\cos\varphi} = \frac{\alpha\lambda u' + w'}{\alpha u'\cos\varphi}$$

e trascurando u' in confronto di w' ne viene $\alpha = 1$; in simil modo si trova che $\beta = 1$.

124. Quando le origini C C' sieno coincidenti, supporremo che i nuovi assi CH' $[0, v' : 0]$ CK' $[u', 0 : 0]$ sieno espressi riferibilmente agli assi CH CK da

$$[-\operatorname{sen}\varphi \ , \cos\varphi : 0] \quad , \quad [\cos\downarrow, \operatorname{sen}\downarrow : 0]$$

e troveremo come sopra le relazioni tra le vecchie e le nuove coordinate

$$u = \alpha u' \cos\downarrow - \beta v' \operatorname{sen}\varphi \ , \ v = \alpha u' \operatorname{sen}\downarrow + \beta v' \cos\varphi \ , \ w = w' \ .$$

E nel caso che ambedue i sistemi sieno ad assi ortogonali, sarà

$$\downarrow = \varphi \ , \ \alpha = \beta = 1 \ .$$

Che se conservando uno CH degli assi coordinati voglia sostituirsi al CK il CK' espresso da $[\cos\downarrow, \operatorname{sen}\downarrow : 0]$ si trovano le relazioni

$$u = u' \ , \ v = u' \operatorname{sen}\downarrow + v' \cos\downarrow \ , \ w = w' \ .$$

Potrà vedersi Plücker *Entw.* II, §§ 450, 455, 467, 486, 503, 513, 562.

125. L' espressione baricentrica

$$(1) \quad M \simeq x.A + y.B + z.C$$

si riferirà ad un nuovo triangolo coordinato $A'B'C'$; quando si conoscano le espressioni dei primi vertici riferiti ai secondi, cioè si abbiano le

$$(2) \quad A \simeq \alpha_1.A' + \alpha_2.B' + \alpha_3.C' \ , \ B \simeq \beta_1.A' + \beta_2.B' + \beta_3.C' \ , \ C \simeq \gamma_1.A' + \gamma_2.B' + \gamma_3.C'$$

(dove si suppone $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \text{ecc.} = 1$) basterà sostituire nella (1) la (2). — Nello stesso tempo l' espressione baricentrale

$$\mathbf{m} \simeq u.BC + v.CA + w.AB$$

si muterà nella

$$\mathbf{m} \simeq u'.B'C' + v'.C'A' + w'.A'B'$$

quando si esprimano i lati del primo triangolo coordinato mediante quello dei secondi: ora il metodo delle equipollenze deduce tosto dalle (2) che BC è la composta-equipollente $(\gamma_2 - \beta_2)\,A'B' + (\beta_3 - \gamma_3)\,C'A'$; ma tal formula non può servire nel calcolo baricentrale, giacchè in questo la retta BC deve essere data non solamente di grandezza e direzione, ma anche (§ 95) di posizione; si trova che dee aggiungersi una parte, che è nulla nel metodo delle equipollenze, ma che non può trascurarsi nel calcolo baricentrale, e si ha

$$(3) \quad \begin{cases} BC \simeq (\gamma_2 - \beta_2)A'B' + (\beta_3 - \gamma_3)C'A' + (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)(A'B' + B'C' + C'A') \\ CA \simeq (\alpha_3 - \gamma_3)B'C' + (\gamma_1 - \alpha_1)A'B' + (\gamma_3\alpha_1 - \alpha_3\gamma_1)(A'B' + B'C' + C'A') \\ AB \simeq (\beta_1 - \alpha_1)C'A' + (\alpha_2 - \beta_2)B'C' + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)(A'B' + B'C' + C'A') \end{cases}$$

126. Passiamo invece dalle coordinate $x \ y \ z \ u \ v \ w$ riferite al triangolo coordinato CAB alle coordinate Cartesiane $x_c \ y_c$ ed alle Plucheriane $u_p \ v_p$ (supposto $z_c = 1$, $w_p = 1$) riferite agli assi coordinati indefiniti CA CB . Colle equipollenze dalla

$$(1) \quad M \simeq x.A + y.B + z.C \quad , \quad x + y + z = 1$$

si deduce $CM \simeq x.CA + y.CB$, quindi si ha

$$(4) \quad x_c = x.\,\text{gr}\,CA \qquad y_c = y.\,\text{gr}\,CB \ .$$

Il punto Q è dato (§ 96) da

$$Q \simeq \frac{u.C - w.A}{u - w} \qquad \text{ossia} \qquad CQ \simeq \frac{-w}{u - w}CA \ .$$

e da (§ 65) $\quad CQ \simeq -\frac{1}{u_p} \quad$ dunque

$$(5) \quad u_\rho = \frac{u-w}{w\,\mathrm{gr\,CA}} \quad , \quad v_\rho = \frac{v-w}{w\,\mathrm{gr\,CB}} \quad ,$$

da cui

$$\frac{u}{w} = 1 + u_\rho . \mathrm{gr\,CA} \quad , \quad \frac{v}{w} = 1 + v_\rho . \mathrm{gr\,CB} \quad .$$

127. *Retta mandata all' infinito.* Col cangiamento delle coordinate, e specialmente coi metodi più generali baricentrico e baricentrale, si possono semplificare di molto i calcoli. Quando si tratta di proprietà *projettive* vi è un altro modo di semplificare i calcoli supponendo che stieno fermi gli assi, e si muova, cioè si muti collinearmente l'oggetto; ciò si eseguisce facendo andare all'infinito una retta spettante alla figura. Così se abbiasi l' equipollenza di una curva

$$\mathrm{OM} \simeq \frac{x.\,\mathrm{OA} + y.\,\mathrm{OB}}{z}$$

porremo

$$\mathrm{OM}_1 \simeq \frac{x.\,\mathrm{OA}_1 + y.\,\mathrm{OB}_1}{\alpha x + \beta y + \gamma z}$$

ed avremo un' altra figura, nella quale sarà andata all' infinito la $[\alpha , \beta : \gamma]$. Che se debba andare all' infinito la retta $[\alpha , \beta : 0]$ passante per O potremo porre

$$\mathrm{AM}_1 \simeq \frac{(z - x - y)\,\mathrm{AA}_1 - \beta y.\,\mathrm{AB}}{\alpha x - \beta y}$$

Che se finalmente debba andare all' infinito la retta OA , cioè $[0 , 1 : 0]$ porremo

$$\mathrm{A_1M_1} \simeq \frac{(z - x - y)\,\mathrm{A_1A_2} + y.\,\mathrm{A_2B}}{y} \quad .$$

128. *Calcolo abbreviato.* Nel calcolo baricentrico entrano tre punti A B C , e nel calcolo baricentrale si hanno tre rette coordinate; ad oggetto di semplificare e generalizzare i calcoli si può supporre che quei punti o queste rette sieno provvedute di coefficienti o moltiplicatori arbitrarii, sicchè d' altrettanto sieno divise le variabili x y z u v w , che moltiplicano quei punti o quelle rette; in tal caso al calcolo si dà il nome di *abbreviato.* Così, per esempio, il punto espresso da $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$ è il baricentro del triangolo ABC ; inoltre nel calcolo abbreviato esso può essere un punto qualunque del piano a motivo dei tre coefficienti arbitrarii, che si suppongono compenetrati nelle lettere A B C . Il calcolo abbreviato può adoprarsi in tutte le questioni riguardanti *proprietà projettive*, cioè che si conservano invariate nelle

projezioni, ossia prospettive: tali sono tutte le proprietà *grafiche,* cioè che riguardano soltanto congruenze, ed inoltre molte proprietà *metriche*, le quali d'ordinario sono formate con

129. *Rapporti projettivi;* il più semplice di questi rapporti è quello, che per una idea puramente negativa suol dirsi *anarmonico*, e che noi diremo *doppio-rapporto;* esso ha luogo fra quattro punti in linea retta o fra quattro raggi di una *stella.* Sieno A M B N i quattro punti, e due di essi sieno riferiti agli altri due mediante le espressioni di calcolo *abbreviato*

$$M \simeq A - \mu . B \quad , \quad N \simeq A - \nu . B$$

si trova

$$(1) \qquad \frac{AM.BN}{AN.BM} = \frac{\mu}{\nu} \quad .$$

Più generalmente posto anche

$$R \simeq A - \rho . B \quad , \quad S \simeq A - \sigma . B \quad , \quad \text{ecc. è}$$

$$(2) \qquad \frac{MR.NS}{MS.NR} = \frac{(\mu - \rho)(\nu - \sigma)}{(\mu - \sigma)(\nu - \rho)} \quad .$$

Valori affatto analoghi hanno luogo rispetto alle *stelle* (ossia sistemi di linee rette passanti per uno stesso punto), cioè se nel calcolo baricentrale abbreviato sia

$$\mathbf{m} \simeq \mathbf{a} - \mu . \mathbf{b} \qquad \mathbf{n} \simeq \mathbf{a} - \nu . \mathbf{b}$$

sarà

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{am}) . \operatorname{sen}(\mathbf{bn})}{\operatorname{sen}(\mathbf{an}) . \operatorname{sen}(\mathbf{bm})} = \frac{\mu}{\nu} \quad , \quad \text{ecc.}$$

I punti, o le rette, si dicono *armonici* quando il loro doppio-rapporto ha il valore -1 ; tale è il caso dei quattro punti A , $A+B$, B , $A-B$; quest' ultimo sarebbe il punto all' infinito se non si trattasse del calcolo abbreviato, e l' altro sarebbe il punto di mezzo della retta AB .

130. Chiameremo *rapporti-multiplici* quelli più complicati dei *doppii-rapporti*, purchè sieno projettivi; tal è per esempio

$$(4) \qquad \frac{AM.BN.CR.DS}{AS.DR.CN.BM} \quad ,$$

essendo linee rette le AMB , BNC , CRD , DSA . Se col calcolo baricentrico si abbia

$$M \simeq A - \mu . B \quad , \quad N \simeq B - \nu . C \quad , \quad R \simeq C - \rho . D \quad , \quad S \simeq D - \sigma . A$$

il rapporto-multiplice (4) sarà $= \mu \nu \rho \sigma$. — Merita pur esser notata una

formula identica alla (2), quando ciascun punto sia riferito a tre punti fissi A B C mediante i doppii-rapporti

$$\frac{AB.CM}{AM.CB} \simeq \mu \ , \ \frac{AB.CN}{AN.CB} \simeq \nu \ , \ \frac{AB.CR}{AR.CB} \simeq \rho \ , \text{ ecc.}$$

Se nel rapporto-multiplice entrassero anche alcuno dei punti A B C bisognerebbe notare che

$$\frac{AB.CA}{AA.CB} \simeq \alpha = \infty \ , \ \frac{AB.CB}{AB.CB} \simeq \beta \simeq 1 \ , \ \frac{AB.CC}{AC.CB} \simeq \gamma = 0 \ ,$$

sicchè per esempio

$$(5) \quad \frac{AM.NB.RS}{AS.RB.NM} \simeq \frac{(\nu - 1)(\rho - \sigma)}{(\rho - 1)(\nu - \mu)} \ ;$$

altri esempii di uso frequente sono

$$(6) \quad \frac{AC.BD}{AD.BC} \simeq 1 - \delta \simeq 1 - \frac{AB.CD}{AD.CB}$$

$$(7) \quad \frac{AM.BN}{AN.BM} \simeq \frac{1 - \nu}{1 - \mu} \simeq \frac{\dfrac{CB}{AB} - \dfrac{CN}{AN}}{\dfrac{CB}{AB} - \dfrac{CM}{AM}} \ .$$

(*Ann. Tortol.* Roma 1853, IV, p. 400. — *Mem. Soc. Ital.* 1854, T. XXV, Parte seconda, p. 281, § 122).

131. Un' applicazione del calcolo *abbreviato* ne renderà più facile l' intelligenza. I vertici A B C ed i lati BC CA AB del triangolo coordinato sono sempre indicati da

$$(1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \ ; \quad [1,0,0] \quad [0,1,0] \quad [0,0,1]$$

inoltre nel calcolo abbreviato un punto qualsivoglia G è espresso da $(1,1,1)$, che significa $A+B+C$. In forza della solita formula di congruenza $ux+vy+wz=0$ (veggansi anche i §§ 67 . . . 70) le rette che congiungono G coi vertici sono

$$AG \quad [0,1,-1] \ , \quad BG \quad [1,0,-1] \ , \quad CG \quad [1,-1,0]$$

ed esse incontrano i lati opposti nei punti

$$P_1 \quad (0,1,1) \ , \quad P_2 \quad (1,0,1) \ , \quad P_3 \quad (1,1,0)$$

Il punto $P_1 \simeq B+C$ è armonico rispetto ai due vertici B C (§ 129) con $P_4 \simeq B-C$, similmente si hanno i punti armonici coi P_2 P_3 ; così si hanno i tre nuovi punti

$$P_4 \ (0,1,-1) \ , \ P_5 \ (1,0,-1) \ , \ P_6 \ (1,-1,0)$$

e le rette che li congiungono coi vertici sono

$$AP_4\ [0,1,1]\ ,\ BP_5\ [1,0,1]\ ,\ CP_6\ [1,1,0]$$

le quali s' incontrano nei punti

$$G_1(-1,1,1)\ ,\ G_2(1,-1,1)\ ,\ G_3(1,1,-1)$$

e questi sono congruenti anche colle rette AG BG CG . Così abbiamo 3 punti A B C per ognuno dei quali passano 4 rette come ABP_3P_6 , AGP_1G_1 , ecc., 4 punti G per ognuno dei quali passano 3 rette, e 6 punti P intersezione di due sole rette; per questi ultimi passano anche le altre quattro rette

$$P_4P_5P_6\ [1,1,1]\ ,\ P_2P_3P_4\ [-1,1,1]\ ,\ P_3P_1P_5\ [1,-1,1]\ ,\ P_1P_2P_6\ [1,1,-1].$$

Sarebbe facilissimo continuare questi calcoli, per esempio, l' intersezione della AG [0,1,—1] colla retta [1,1,1] sarebbe (§ 68) il punto (—2,1,1) , ecc. — Se la $3G \simeq A+B+C$ s' intenda nel senso del calcolo baricentrico (§ 92), G sarà il baricentro del triangolo ABC , e la $P_4P_5P_6$ sarà a distanza infinita. — Se invece i moltiplicatori, che si suppongono (§ 128) compresi nelle lettere A B C sieno tali che le coordinate x y z sieno eguali alle distanze del punto (x,y,z) dai lati del triangolo coordinato, G sarà il centro del circolo inscritto, e G_1 G_2 G_3 quelli dei circoli exinscritti, ecc.

132. I tre lati del triangolo ABC e la precedente $P_4P_5P_6$ [1,1,1] , che nel calcolo abbreviato può essere una retta qualunque, formano un *quadrilatero completo*, di cui le AP_4 [0,1,1] , BP_5 [1,0,1] , CP_6 [1,1,0] sono le tre diagonali; queste tagliano la retta $[u,v,w]$ nei punti

$$(w-v,u,-u)\ ,\ (v,w-u,-v)\ ,\ (w,-w,v-u)$$

il primo dei quali, cioè $(w-v)A+uP_4$, ha per armonico (§ 129) rispetto ai due A P_4 l' altro punto $(v-w)A+uP_4$ ossia $(v-w,u,-u)$: similmente si hanno gli altri due

$$(v,u-w,-v)\quad (w,-w,u-v)\ ;$$

questi tre punti sono congruenti, perchè

$$(v-w,u,-u) \equiv (v,u-w,-v) - (w,-w,u-v)\ ;$$

(in questo modo esprimo l' identità (§ 69)

$$(v-w)A+u.B-u.C \equiv v.A+(u-w)B-v.C-w.A+w.B-(u-v)C).$$

dunque: *Se le tre diagonali di un quadrilatero completo sono tagliate armoni-*

camente rispetto ad una retta qualsivoglia, i tre punti di sezione sono in linea retta. Quando la retta è a distanza infinita, i punti di sezione sono i mezzi delle diagonali.

133. *Epilogo.* Per profittare delle mutue relazioni dei calcoli baricentrico e baricentrale gioverà tenersi presenti al pensiero i precetti successivamente esposti. Un punto M (x, y, z) è dato dall' *espressione baricentrica* (§ 92)

$$M \simeq x.A + y.B + z.C$$

dove supponiamo $x + y + z = 1$, cioè M è il *baricentro* (centro di gravità) delle masse x y z poste nei punti A B C; le x y z, che diciamo le *coordinate baricentriche* del punto M, sono le sue distanze dai lati BC CA AB del *triangolo coordinato* divise per le rispettive altezze del triangolo stesso. L' *equazione baricentrale* del punto M è

$$xu + yv + zw = 0 \quad ,$$

cioè questa è la relazione tra le *coordinate baricentrali* u v w di ogni retta che passa pel punto M, e che è *espressa baricentralmente* (§ 96) da

$$u.BC + v.CA + w.AB \quad .$$

L' *equazione Plucheriana* del punto M rispetto a due assi coordinati ortogonali (§ 107) è la

$$x.A + y.B + z.C = 0 \quad ,$$

purchè qui s' intenda che le lettere A B C sieno i primi membri delle equazioni Plucheriane dei punti A B C poste sotto la forma (§ 107)

$$\alpha_1 u_p + \alpha_2 v_p + 1 = 0 \quad .$$

Si può finalmente supporre che A B C sieno i primi membri (§ 110) delle equazioni Cartesiane di tre circoli di raggi arbitrarii aventi i centri nei punti A B C, allora

$$M = x.A + y.B + z.C$$

è il primo membro dell' equazione Cartesiana di un circolo avente il centro M, ed inoltre questa stessa è la relazione tra le M A B C considerate rappresentare i quadrati delle *distanze tangenziali* (§ 111) di un punto qualsivoglia da quei quattro circoli.

134. Una retta **m** $[u, v, w]$ è data dall' *espressione baricentrale*

$$\mathbf{m} \simeq u.BC + v.CA + w.AB$$

col significato stabilito nei §§ 95, 96; le *coordinate baricentrali* u v w

della retta **m** sono le sue distanze dai tre vertici A B C del triangolo coordinato. L' equazione *baricentrica* della retta **m** è

$$ux + \varrho y + \varpi z = 0 \ ,$$

cioè questa è la relazione tra le coordinate baricentriche x y z di ogni punto della retta. — L' equazione Cartesiana della retta **m** riferita a due assi coordinati è

$$u \operatorname{gr} \mathrm{BC}.\mathbf{a} + \varrho \operatorname{gr} \mathrm{CA}.\mathbf{b} + \varpi \operatorname{gr} \mathrm{AB}.\mathbf{c} = 0 \ ,$$

purchè ora s' intenda che **a** **b** **c** sieno i primi membri delle equazioni Cartesiane delle rette BC CA AB sotto la forma (§ 103)

$$-x_c \operatorname{sen} \alpha + y_c \cos \alpha + \alpha' = 0 \ .$$

135. La distanza tra un punto qualunque (x, y, z) ed una retta qualunque $[u, \varrho, \varpi]$ è (§ 100)

$$ux + \varrho y + \varpi z \ .$$

136. Un *luogo di punti* è dato da un' equazione omogenea

$$f(x, y, z) = 0$$

tra le coordinate baricentriche del punto generico (x, y, z), le quali hanno i significati superiormente spiegati. — Si può invece supporre che x y z sieno funzioni date di una variabile t ; se queste funzioni sono *intere*, il luogo lo diciamo *algebrico-razionale*, ed il suo ordine uguaglia (§ 10) il massimo grado delle funzioni x y z in t .

137. Un *inviluppo di rette* è dato da un' equazione omogenea

$$F(u, \varrho, \varpi) = 0$$

tra le coordinate baricentrali di ogni tangente $[u, \varrho, \varpi]$ di quell' inviluppo. — Si può anche supporre che u ϱ ϖ sieno funzioni date di una variabile t ; e se queste funzioni sono razionali-intere, la curva è algebrico-razionale, la sua *classe* essendo il massimo grado di tali funzioni.

138. Un inviluppo è dato anche mediante un'equazione omogenea (§ 109) tra quante si vogliano A , B , ... , queste avendo il significato superiormente stabilito (§§ 107, 133) in coordinate Plucheriane, ed essendo perciò anche eguali alle distanze dei punti A B .... da ciascuna tangente della curva. Invece di tre di queste A B C possiamo porre le coordinate baricentrali u ϱ ϖ , allora l' inviluppo sarà riferito al triangolo coordinato ABC , ed ogni altra lettera D , ecc. dovrà considerarsi come una funzione

lineare $\lambda u+\mu v+\nu w$, essendo $D \simeq \lambda.A+\mu.B+\nu.C$ l'espressione baricentrica del punto D riferito ai tre primi.

139. Un luogo è dato anche mediante un' equazione omogenea tra quante si vogliano **a** , **b** , ... , queste avendo il precedente significato (§§ 103, 134) in coordinate Cartesiane, ed essendo perciò eguali alle distanze di ciascun punto del luogo dalle rette $\mathbf{a}=0$, $\mathbf{b}=0$, ... Invece di tre di queste **a** **b** **c** potrebbero porsi le x y z , ma in tal caso bisognerebbe rammentarsi che esse sono le coordinate baricentriche moltiplicate rispettivamente per le altezze del triangolo coordinato, i cui lati BC CA AB sono posti sulle **a** **b** **c** (§ 104): questa avvertenza diviene inutile se si tratti di una proprietà projettiva, per la quale serve il calcolo abbreviato (§ 128), in cui i punti e le rette possono supporsi moltiplicati per coefficienti arbitrarii. — Tutte le **a** , **b** ... possono ridursi a tre sole, e ciò mediante le espressioni baricentrali della forma $\mathbf{d} \simeq \lambda.\mathbf{a}+\mu.\mathbf{b}+\nu.\mathbf{c}$,
dove dee notarsi che tutte le **a** **b** **c** **d** ... deggiono essere rette uguali.

140. Finalmente un luogo può esser dato anche mediante un' equazione omogenea tra alquante A , B , ... considerate come primi membri di equazioni Cartesiane di circoli, e tra alquante **a** , **b** , ... considerate come primi membri di equazioni Cartesiane di rette; veggasi § 114.

141. *Passaggio dalle coordinate baricentriche alle baricentrali e viceversa.* A motivo della proprietà delle funzioni omogenee l'equazione baricentrica $f(x,y,z)=0$ di una curva può anche scriversi

$$(1) \quad f'''x+f''y+f'''z=0 \quad ;$$

ed insieme con essa sussiste la sua derivata

$$(2) \quad f'''\mathrm{d}x+f''\mathrm{d}y+f'''\mathrm{d}z=0 \ .$$

Sappiamo poi (§ 63) che l'equazione della tangente è $f'''x'+f''y'+f'''z'=0$, nel calcolo baricentrale essa si segna con $ux'+vy'+wz'=0$; dunque le u v w sono proporzionali alle derivate parziali f''' f'' f''' , e perciò in forza delle (1) (2) si ha

(3) $u=|y\mathrm{d}z|=y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y$, $v=|z\mathrm{d}x|=z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z$, $w=|x\mathrm{d}y|=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.
Mediante relazioni affatto analoghe si ripassa dalle coordinate baricentrali alle baricentriche (§ 147).

142. *Modo di rendere omogenee le equazioni.* Giova saper rendere omo-

genea una funzione delle coordinate baricentriche $x \quad y \quad z$; ora noi abbiamo stabilito (§§ 92, 133) che per ogni punto del piano è $x+y+z=1$, quindi è lecito render omogenee le equazioni a coordinate baricentriche moltiplicando i termini che ne abbisognano per qualche potenza di $x+y+z$. È notevole che questa $x+y+z$ uguagliata a zero è l' equazione della retta, che sta a distanza infinita: in egual modo le equazioni a coordinate Cartesiane le abbiamo rese omogenee (§ 62) introducendovi la z , e $z=0$ rende infiniti i rapporti $x:z \quad y:z$ che sono le coordinate di un punto. È infatti evidente che le distanze di un punto qualunque dalla retta all' infinito sono eguali.

143. Esempio. *Qual è il luogo dei punti, le cui distanze dalle rette* BC CA *hanno il prodotto in dato rapporto colla distanza dalla retta* AB ? La condizione è espressa dall' equazione

$$z=\lambda xy$$

che resa omogenea diventa

$$xz+yz+z^2-\lambda xy=0 \ ,$$

la quale appartiene ad una ditoma che passa pei punti A $(1,0,0)$ B $(0,1,0)$ ed anche pei $(0,1,-1)$ $(1,0,-1)$ che sono i punti all' infinito delle rette CB CA . La tangente in ciascun punto della ditoma è (§ 63)

$$[z-\lambda y \ , \ z-\lambda x \ , \ x+y+2z] \ ;$$

perciò nel punto A è $[0,-\lambda,1]$ in B è $[-\lambda,0,1]$ e nei punti all' infinito gli assintoti sono $[1+\lambda,1,1]$ $[1,1+\lambda,1]$, rette che facilmente si costruiscono, per quanto abbiamo detto, nei §§ 94, 96, 67 ecc.

144. Più complicato è il modo di rendere omogenee le equazioni *baricentrali;* eccolo quale fu trovato dal Salmon. Sia (103, 134)

$$-x_c \operatorname{sen}\lambda+y_c \cos\lambda+\lambda'=0$$

l' equazione di una retta arbitraria riferita alle coordinate Cartesiane ortogonali, e sieno $x_c=0 \quad y_c=0$ le coordinate del punto C , $x_c=b \quad y_c=0$ quelle del punto A , ed $x_c=e \quad y_c=\beta$ quelle del punto B , le distanze di questi vertici del triangolo coordinato dalla retta predetta sono (§ 103)

$$\lambda'=w \ , \ -b\operatorname{sen}\lambda+\lambda'=u \ , \ -e\operatorname{sen}\lambda+\beta\cos\lambda+\lambda'=v \ ,$$

eliminando λ' e λ si ottiene un' equazione tra $u \quad v \quad w$, la quale dee sussistere qualunque sia la retta: tale equazione contiene i termini

$$b^2\beta^2 - b^2\varphi^2 - 2\,b\,e\,u\,v - \text{ec.} = b^2\,(\beta^2 - \varphi^2 - 2\,\frac{\text{gr BC}}{\text{gr CA}}\cos C.\,uv - \text{ec.})$$

(essendo C A B gli angoli del triangolo CAB) ; a motivo della simmetria che dee presentare l'equazione si trova che, chiamate α β γ le altezze del triangolo ABC , essa è

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} + \frac{w^2}{\gamma^2} - 2\,\frac{u}{\alpha}\frac{v}{\beta}\cos C - 2\,\frac{v}{\beta}\frac{w}{\gamma}\cos A - 2\,\frac{w}{\gamma}\frac{u}{\alpha}\cos B = 1 \quad .$$

Il primo membro Ω di questa equazione servirà a render omogenea un'equazione che non sia tale. La $b^2\beta^2\,\Omega$ si decompone nei due fattori immaginarii

$$u\,\text{gr BC} + v\,\text{gr CA}.\,\sqrt{\pm C} + w\,\text{gr AB}.\,\sqrt{\mp B} \quad ;$$

siccome in ciascuno di questi fattori la somma dei coefficienti delle coordinate $u\,v\,w$ è nulla, così può considerarsi che tali fattori eguagliati a zero sieno le equazioni baricentrali di due punti immaginarii posti a distanze infinite.

145. Nel caso particolare delle coordinate Plucheriane ortogonali (§ 71), supposto che w sia la distanza della $[u, v : w]$ dall' origine delle coordinate, si ha sempre

$$u^2 + v^2 = 1 \quad , \quad \text{ed} \quad \Omega = u^2 + v^2$$

è la funzione, che serve a render omogenea un'equazione Plucheriana.

Esempii. Qual è l'inviluppo delle rette, le cui distanze da due punti A B *hanno dato prodotto?* La condizione è espressa (§ 97) dall'equazione $\lambda uv = 1$, che si rende omogenea scrivendo $\lambda\,uv = \Omega$, ed è l' equazione di una diattomena. Se si supponga che C sia a distanza infinita (§ 115) e gli angoli BAC ABC sieno retti, si ha

$$\lambda\,\text{gr}^2\,\text{AB}\,uv = u^2 + v^2 - 2\,uv \quad .$$

—Qual' è l' equazione baricentrale del circolo, che ha il centro nel punto (λ, μ, ν) *ed il raggio* r ? La condizione che tutte le tangenti abbiano dal centro la distanza r è (supposto $\lambda + \mu + \nu = 1$)

$$\lambda\,u + \mu\,v + \nu\,w = r \quad ,$$

che diventa omogenea scrivendola

$$(\lambda\,u + \mu\,v + \nu\,w)^2 = r^2\,\Omega \quad .$$

146. Sui metodi generali di coordinate potranno consultarsi, oltre i luoghi già citati: Carnot, *Géom. de Posit.* 1803, § 415. — Sturm, *An. Gerg.*, *Févr.*

1825, N. 8; *Bull. Fér., Mars* 1825, III. — Gergonne, *Ann.* 1827. — Möbius, *Der barycentrische Calcul. Leipzig*, 1827. — Bobillier, *An. Gerg.* 1828, XVIII, N. 11. — Plücker, *J. Crelle*, 1829, V, p. 1, 267; 1832, IX, p. 124; 1833, X, N. 15, 24; X, N. 3, 9, 19. *System der analyt. Geometrie. Berlin* 1835; *Theorie der algebr. Curven. Bonn.* 1839; *System der Geom. des Raumes. Düsseldorf* 1846. — Coriolis, *J. Ec. polytechn.* 1835, XV, *xxiv.* p. 133 ... 141. — Chasles, *Théoremes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes.* — Joachimsthal, *J. Crelle*, 1846, XXXIII, N. 22. — Plücker, *J. Crelle*, 1847, XXXIV, p. 329. — Terquem, *N. Ann.* 1848, VII, p. 5, 277; 1849, VII, p. 113. — Hesse, *J. Crelle*, 1851, XLI, p. 288. — Salmon, *J. Crelle*, 1851, XLII, p. 277; *Tratt. delle sez. coniche. Napoli* 1857; *A Treatise on the higher plane Curves. Dublin* 1852. — Woepcke, *J. Liouv.* 1855, XX, pag. 139.

147. Alcune applicazioni gioveranno a far meglio conoscere l' uso degli esposti metodi. *Equazione baricentrale corrispondente a data baricentrica.* L' equazione generale delle ditome

$$ax^2 + 2fxy + by^2 + 2exz + \text{ec.} = 0$$

può scriversi molto opportunamente sotto questa forma

$$\begin{aligned} &ax^2 + fxy + exz \\ &+ fxy + by^2 + dyz \\ &+ exz + dyz + cz^2 = 0 \quad ; \end{aligned}$$

i coefficienti così disposti formano un determinante simmetrico H, che dicesi l' Hessiano della funzione $ax^2 + 2fxy + \text{ec.}$; si calcoli il suo determinante conjugato h (Sposizione element. della teorica dei determinanti, *Mem. Ist. Veneto*, 1857, VII, §§ 55, 79)

$$\begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} = H \quad , \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \zeta & \varepsilon \\ \zeta & \beta & \delta \\ \varepsilon & \delta & \gamma \end{vmatrix} = h \quad ,$$

cioè sia

$$\alpha = \begin{vmatrix} b & d \\ d & c \end{vmatrix} = bc - d^2 \quad , \quad \zeta = -\begin{vmatrix} f & d \\ e & c \end{vmatrix} = -cf + de \quad , \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} f & b \\ e & d \end{vmatrix} = df - be \quad ,$$

$$\beta = \begin{vmatrix} a & e \\ e & c \end{vmatrix} \quad , \quad \delta = -\begin{vmatrix} a & f \\ e & d \end{vmatrix} \quad , \quad \gamma = \begin{vmatrix} a & f \\ f & b \end{vmatrix} \quad ,$$

e si avranno (§ 141) i coefficienti dell'equazione Plucheriana o baricentrale della curva considerata come un inviluppo, cioè riguardatala come diattomena

$$\begin{aligned} &\alpha u^2 + \zeta uv + \varepsilon uw \\ &+ \zeta uv + \beta v^2 + \delta vw \\ &+ \varepsilon uw + \delta vw + \gamma w^2 = \alpha u^2 + 2\zeta uv + \text{ecc.} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Infatti ciascuna riga del primo determinante è formata coi coefficienti delle derivate parziali dell' equazione Cartesiana o baricentrica $f(x,y,z)=0$, sicchè (§§ 63, 117) la tangente $[u,v,w]$ è data dalle tre equazioni

$$ax+fy+ez=u \quad , \quad fx+by+dz=v \quad , \quad ex+dy+cz=w \quad ,$$

le quali per la teoria dei determinanti danno

$$\alpha u+\zeta v+\varepsilon w=Hx \ , \ \zeta u+\beta v+\delta w=Hy \ , \ \varepsilon u+\delta v+\gamma w=Hz \ ;$$

e se questi valori lineari di $x \quad y \quad z$ si sostituiscano nell' equazione $f(x,y,z)=0$ ne risulta, in forza di note proprietà dei determinanti conjugati, l' equazione

$$F(u,v,w)=\alpha u^2+2\zeta uv+\text{ec.}=0 \quad .$$

148. *Sistemi di rette concorrenti.* Quando l' Hessiano H è nullo ha luogo un' equazione lineare tra i valori di $u \quad v \quad w$, la quale esprime un punto, pel quale passano tutte le tangenti, cioè $H=0$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè il luogo si riduca a rette congruenti, cioè perchè la $f(x,y,z)=0$ sia riducibile a due sole variabili. — Similmente se si annulli l' Hessiano dell' equazione baricentrale $F(u,v,w)=0$ l' inviluppo si ridurrà a punti in linea retta.

149. *Ditome circoscritte o inscritte nel triangolo coordinato.* L'equazione baricentrica della ditoma circoscritta al triangolo CAB dovendo verificarsi quando si annullano due delle $x \quad y \quad z$ avrà la forma

$$dyz+ezx+fxy=0 \quad ,$$

perciò il corrispondente Hessiano ed il suo conjugato sono

$$\begin{vmatrix} 0 & f & e \\ f & 0 & d \\ e & d & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} -d^2 & de & df \\ de & -e^2 & ef \\ df & ef & -f^2 \end{vmatrix}$$

sicchè l' equazione baricentrale di tal curva è

$$-d^2u^2+2deuv+2dfuw-\text{ec.}=0$$

a cui può darsi la forma

$$\sqrt{du}+\sqrt{ev}+\sqrt{fw}=0 \quad .$$

— Viceversa, le diattomene inscritte nel triangolo coordinato hanno l' equazione baricentrale

$$dvw+ewu+fuv=0$$

e la baricentrica

$$\sqrt{dx}+\sqrt{ey}+\sqrt{fz}=0 \quad .$$

Il punto di contatto della retta $[u,v,w]$ con questa diattomena è (§ 74)

$$(fv+ew \ , \ fu+dw \ , \ eu+dv) \ ;$$

quindi i punti di contatto coi tre lati del triangolo sono

$$(0\ ,f\ ,e) \quad (f\ ,0\ ,d) \quad (e\ ,d\ ,0)\ ,$$

cioè essi hanno le equazioni baricentrali

$$fv+ew=0 \ , \ fu+dw=0 \ , \ eu+dv=0 \ ,$$

ossia (§ 101, 133) le espressioni baricentriche

$$f.\mathrm{B}+e.\mathrm{C} \qquad f.\mathrm{A}+d.\mathrm{C} \quad , \quad e.\mathrm{A}+d.\mathrm{B} \ ;$$

se ne deduce, che essi formano un'involuzione-negativa coi vertici del triangolo.

150. *Circoli.* La predetta ditoma circoscritta è un circolo quando i coefficienti d e f sono proporzionali ai quadrati dei seni degli angoli del triangolo coordinato, cioè l' equazione baricentrica del circolo circoscritto è

$$yz\,\mathrm{sen}^2 A+zx\,\mathrm{sen}^2 B+xy\,\mathrm{sen}^2 C=0 \quad .$$

Se invece delle coordinate baricentriche x y z vogliamo introdurre le rette $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$ eguali all' unità, e prese sui lati BC CA AB , dobbiamo porre in luogo di x (§ 139) la $\mathbf{a}$ divisa per l'altezza del triangolo, oppure moltiplicata per $\mathrm{sen}\,A$, e così delle altre; sicchè l'equazione diventa

$$\mathrm{sen}\,A.\,\mathbf{bc}+\mathrm{sen}\,B.\,\mathbf{ca}+\mathrm{sen}\,C.\,\mathbf{ab}=0$$

a cui può darsi il significato accennato al § 114. L' equazione baricentrale del medesimo circolo è (§ 149)

$$\mathrm{sen}\,A\sqrt{u}+\mathrm{sen}\,B\sqrt{v}+\mathrm{sen}\,C\sqrt{w}=0 \quad .$$

— Il circolo inscritto nel triangolo coordinato ha l' equazione baricentrale

$$\mathrm{ctg}\frac{A}{2}vw+\mathrm{ctg}\frac{B}{2}wu+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}uv=0 \quad ,$$

come facilmente si riconosce osservando che il punto di contatto col lato BC ha l'equazione $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\,w+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\,v=0$, ossia ha l'espressione baricentrica $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.\mathrm{C}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.\mathrm{B}=0$. L'equazione baricentrica del circolo inscritto è quindi

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\tfrac{A}{2}\,x}+\sqrt{\operatorname{ctg}\tfrac{B}{2}\,y}+\sqrt{\operatorname{ctg}\tfrac{C}{2}\,z}=0$$

a cui, come sopra, può darsi la forma

$$\cos\tfrac{A}{2}\sqrt{\mathbf{a}}+\cos\tfrac{B}{2}\sqrt{\mathbf{b}}+\cos\tfrac{C}{2}\sqrt{\mathbf{c}}=0\ .$$

151. *Ditoma che passa per cinque punti dati.* Se sui lati BC CA AD DB del quadrilatero BCAD , che ha per vertici quattro dei punti dati, supponiamo prese le rette **a b d e** , l'equazione della ditoma dovendo essere soddisfatta da $\mathbf{a}=\mathbf{b}=0$, da $\mathbf{b}=\mathbf{d}=0$, da $\mathbf{d}=\mathbf{e}=0$ e da $\mathbf{e}=\mathbf{a}=0$ sarà

$$\mathbf{a}.\mathbf{d}=\mu.\mathbf{b}.\mathbf{e}\ ,$$

dove μ è un coefficiente numerico, che determineremo in modo che la curva passi pel quinto punto E . La presente questione essendo projettiva può adoperarsi il calcolo abbreviato, cioè non vi è alcun bisogno che le rette abbiano lunghezze eguali. Se, per esempio, sono dati i punti

$$\mathrm{B}(4,-2,-1)\ ,\ \mathrm{C}(2,5,-4)\ ,\ \mathrm{A}(1,0,0)\ ,\ \mathrm{D}(1,2,3)$$

le rette sui lati del quadrilatero sono

$$\mathbf{a}[13,14,24]\ ,\ \mathbf{b}[0,4,5]\ ,\ \mathbf{d}[0,3,-2]\ ,\ \mathbf{e}[4,13,-10]\ ;$$

sostituendo nelle solite $ux+vy+wz$ date da ciascuna di queste rette i valori di $x\ y\ z$ del quinto punto E $(-3,2,2)$ si ottengono i valori 37, 18 , 2 , —6 , perciò l'equazione cercata è

$$54\,(13x+14y+24z)(3y-2z)+37\,(4y+5z)(4x+13y-10z)=0\ .$$

Tutto ciò vale qualunque sia il sistema coordinato, a cui s'intendono riferiti i dati punti; supponiamo che esso fosse quello, che ha $\mathrm{AB_0C_0}$ per triangolo coordinato , ed ora voglia invece riferirsi al triangolo coordinato ABC , rispetto al quale sieno $x_1\ \ y_1\ \ z_1$ le nuove coordinate. Sia, per esempio,

$$B \simeq 4A - 2B_0 - C_0 \quad , \quad C \simeq \frac{2}{3}A + \frac{5}{3}B_0 - \frac{4}{3}C_0$$

la $$x_1.A + y_1.B + z_1.C \simeq (x_1 + 4y_1 + \frac{2}{3}z_1)A + (-2y_1 + \frac{5}{3}z_1)B_0 - (y_1 + \frac{4}{3}z_1)C_0$$
$$\simeq x.A + y.B_0 + z.C_0$$

dà $$x = x_1 + 4y_1 + \frac{2}{3}z_1 \quad , \quad y = -2y_1 + \frac{5}{3}z_1 \quad , \quad z = -y_1 - \frac{4}{3}z_1 \quad ,$$

che sostituite nella trovata equazione la riducono

$$54x_1(-12y_1 + 23z_1) - 37y_1(12x_1 + 113z_1) =$$
$$= -1092x_1y_1 + 1242x_1z_1 - 4181y_1z_1 = 0 \quad ,$$

che è soddisfatta dai punti dati, i quali ora rispetto al triangolo coordinato ABC vengono indicati da

B(0,1,0) , C(0,0,1) , A(1,0,0) , D(113,—23,—12) , E(37,—18,—6) .

La polare del punto, che ha le coordinate x_0 y_0 z_0 è (§ 64)

$$[-1092y_0 + 1242z_0 \ , \ -1092x_0 - 4181z_0 \ , \ 1242x_0 - 4181y_0] \ ;$$

acciocchè questa sia la retta [1 , 1 , 1] posta all' infinito, bisognerà che sieno uguali i tre binomii, il che dà il punto

(4181.4331 , 1242.6515 , —1092.1847)

che è il centro della chiesta ditoma; essendo ben noto la polare del centro essere la retta all' infinito.

152. *Doppio-rapporto delle stelle inscritte in una ditoma.* Se le **a** **b** **d** **e** avessero il significato stabilito nel § 103, il valore di $\frac{a.d}{b.e}$ sarebbe il rapporto delle distanze di un punto qualsivoglia dai due lati opposti BC AD , e dagli altri due del quadrilatero ADBC ; questo rapporto è quindi (§ 151) costante per tutti i punti M di una ditoma circoscritta al quadrilatero. Siccome la distanza del punto M dal lato BC è

$$\frac{MB.MC.\operatorname{sen} BMC}{BC}$$

così è pur costante il doppio-rapporto

$$\frac{\operatorname{sen} BMC.\operatorname{sen} AMD}{\operatorname{sen} BMD.\operatorname{sen} AMC} = \frac{a.d}{e.b} \cdot \frac{BC.AD}{BD.AC} \quad .$$

Quindi tutte le stelle, che hanno il centro M sulla predetta ditoma, e i cui raggi passano pei punti fissi B C A D sono tra loro collineari. Estensione questa del notissimo teorema sugli angoli eguali inscritti in un arco di circolo.

153. *Combinazioni delle equazioni delle linee.* Nello stesso modo, con cui abbiamo veduto (§§ 103, 107, 114) che si possono combinare le equazioni delle rette e dei punti, possono trattarsi anche le equazioni dei luoghi o degli inviluppi; sieno f_2 F_2 i primi membri delle equazioni baricentrica e baricentrale di una ditoma-diattomena, e, secondo il solito, sieno $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... A , B , ... i primi membri delle equazioni baricentriche delle rette e delle equazioni baricentrali dei punti. — La

$$f_2+\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$$

è una ditoma, che ha colla $f_2=0$ le due secanti-comuni $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$; giacchè quei valori che danno $f_2=0$, $\mathbf{a}=0$ danno pure $f_2+\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$. Perciò la $f_2+\mathbf{c}^2=0$ sarà una ditoma avente colla $f_2=0$ un doppio contatto, di cui $\mathbf{c}$ è la corda o secante-comune doppia. Se le tangenti nei due punti di contatto s' incontrano nel punto A , questo lo diremo l' *apice-comune* doppio delle due diattomene, e la stessa curva che ha l' equazione baricentrica $f_2+\mathbf{c}^2=0$ avrà la baricentrale $F_2+A^2=0$.

154. Facilmente si determinano le secanti-comuni di due delle ditome

$$(1) \qquad f_2+\mathbf{a}^2=0 \ , f_2+\mathbf{b}^2=0 \ , f_2+\mathbf{c}^2=0 \ .$$

Quelle delle due prime sono

$$(2) \qquad \mathbf{a}+\mathbf{b}=0 \quad , \quad \mathbf{a}-\mathbf{b}=0$$

e stanno armoniche (§ 129) tra le due secanti-comuni doppie $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$. In quattro modi differenti tra le sei secanti-comuni delle (1) se ne possono scegliere tre che sieno congruenti, tali sono, per esempio, le

$$(3) \quad \mathbf{a}-\mathbf{b}=0 \quad , \quad \mathbf{a}-\mathbf{c}=0 \quad , \quad \mathbf{b}-\mathbf{c}=0 \ ;$$

dunque esse tutte formano un *tetragono-completo* (cioè un quadrilatero ordinario aggiuntevi le due diagonali), e le (3) dimostrano il Teorema: *Date tre ditome aventi ciascuna un doppio contatto con una quarta, pel punto, in cui s' incontrano una secante-comune della prima e della seconda ed una secante-comune della seconda e della terza, passa pure una secante-comune della terza e della prima.*

155. *Teorema del Brianchon.* Come un caso particolare supponiamo che le ditome (1) si riducano a sistemi di rette

$$(4) \quad \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = 0 \quad , \quad \mathfrak{p}.\mathfrak{q} = 0 \quad , \quad \mathfrak{r}.\mathfrak{s} = 0 \quad ;$$

una secante-comune del primo e del secondo sistema è la retta, che unisce il punto $\mathfrak{mp}$ (cioè l' intersezione delle rette $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{p}$) col punto $\mathfrak{nq}$; un' altra secante-comune è quella che unisce i punti $\mathfrak{pr}$ $\mathfrak{qs}$; e pel punto d' intersezione di queste rette passerà anche la retta dei punti $\mathfrak{sm}$ $\mathfrak{rn}$. Potrebbe rimanere del dubbio sulla scelta di quest' ultima secante-comune; ecco un' altra dimostrazione del medesimo teorema:

156. Sia MPRNQS un esagono circoscritto alla diattomena $F_2 = 0$ (suppongo che il punto M sia quello precedentemente segnato con $\mathfrak{mp}$, P quello segnato con $\mathfrak{pr}$, ecc.); i due sistemi di tre punti ciascheduno dati dalle equazioni baricentrali

$$(5) \quad \mathrm{M.R.Q} = 0 \quad , \quad \mathrm{P.N.S} = 0$$

possono considerarsi come due inviluppi di 3.ª classe contenenti le nove rette MP RN QS MS QN RP MN QP RS , quindi vi saranno infinite triattomene, che toccheranno le medesime rette, e tra questi infiniti inviluppi di 3.ª classe ve ne sarà uno composto della diattomena F_2 , la quale tocca le sei prime rette, e del punto d'intersezione delle due rette MN QP , tale inviluppo comprenderà anche l' ultima retta RS , e questa non potendo toccare la diattomena passerà necessariamente pel punto d' intersezione MN (QP).

157. *Altra dimostrazione del teorema del Brianchon.* Chiamato L il punto d'intersezione dei due lati opposti SM RN dell'esagono MPRNQS circoscritto alla diattomena F_2 , questa perchè tocca i lati SM (ossia LM) MP PR RN (ossia LR) avrà l' equazione

$$F_2 = \mathrm{M.R} + \lambda . \mathrm{L.P} = 0$$

e perchè tocca i lati MS (ossia LS) SQ QN NR (ossia LN) avrà l' equazione

$$F_2 = \mathrm{N.S} + \mu . \mathrm{L.Q} = 0$$

quindi sarà identicamente

$$(6) \quad \mathrm{M.R} - \mathrm{N.S} = \mathrm{L}\,(\lambda . \mathrm{P} - \mu . \mathrm{Q})$$

eguagliando a zero il primo membro si ha l' inviluppo delle quattro rette MS RN MN RS , le due prime passano per L , quindi le due ultime deggiono incontrarsi nel punto $\lambda.P-\mu.Q$, cioè le tre diagonali MN RS PQ sono congruenti.

158. *Teoremi correlativi ai precedenti.* Per la dualità i teoremi precedenti, che sono tutti projettivi, danno i loro *correlativi* mutando i punti in rette e viceversa, e questi possono dimostrarsi con calcoli pienamente analoghi. Tre ditome aventi un doppio contatto con una quarta F_2 possono rappresentarsi anche colle equazioni baricentrali

$$(1)\quad F_2+A^2=0\ ,\quad F_2+B^2=0\ ,\quad F_2+C^2=0$$

ed A B C saranno gli apici-comuni doppii di ciascuna di esse colla $F_2=0$. Gli apici-comuni delle due prime diattomene sono

$$(2)\quad A+B=0\ ,\quad A-B=0$$

armonici tra i due punti A B . I tre apici-comuni

$$(3)\quad A-B=0\ ,\quad B-C=0\ ,\quad C-A=0$$

sono congruenti; ed i sei apici-comuni delle (1) presi a due a due sono i vertici di un quadrilatero-completo. — Se nella diattomena F_2 sia inscritto un esagono MPRNQS ai tre sistemi dei suoi vertici opposti

$$(4)\quad M.N=0\ ,\quad P.Q=0\ ,\quad R.S=0$$

può applicarsi ciò che dicemmo delle diattomene (1), e perciò sono congruenti i loro apici-comuni MP(NQ) (cioè punto d' intersezione delle rette MP NQ) PR(QS) SM(RN) . — Questo teorema di Pascal può anche dimostrarsi considerando i due sistemi dei lati alternativi dell' esagono inscritto nella ditoma F_2 , i quali formano i due luoghi di terzo ordine

$$(5)\quad \mathfrak{m}.\mathfrak{r}.\mathfrak{q}=0\ ,\quad \mathfrak{p}.\mathfrak{n}.\mathfrak{s}=0\ ;$$

tra le infinite tritome che passano per le loro intersezioni $\mathfrak{mp}$ $\mathfrak{rn}$ $\mathfrak{qs}$ $\mathfrak{ms}$ $\mathfrak{qn}$ $\mathfrak{rp}$ $\mathfrak{mn}$ $\mathfrak{qp}$ $\mathfrak{rs}$ vi è il sistema della ditoma F_2 e della retta, che congiunge i tre punti $\mathfrak{mn}$ $\mathfrak{qp}$ $\mathfrak{rs}$, nei quali s' incontrano i lati opposti dell' esagono. — Finalmente se chiamiamo $\mathfrak{l}$ la diagonale RS dell' esagono, che ha i lati $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{s}$, la ditoma circoscritta f_2 avrà le due equazioni

$$\mathfrak{m}.\mathfrak{r}+\lambda.\mathfrak{l}.\mathfrak{p}=0\ ,\quad \mathfrak{n}.\mathfrak{s}+\mu.\mathfrak{l}.\mathfrak{q}=0$$

quindi (6) $\mathbf{m.r} - \mathbf{n.s} = \mathbf{l}\,(\lambda.\,\mathbf{p} - \mu.\,\mathbf{q})$

il primo membro eguagliato a zero esprime quattro punti, dei quali i due **ms** **nr** sono sulla retta **l** , e gli altri due **mn** **rs** sono su una retta che passa pel punto **pq** .

159. *Equazioni più semplici delle ditome.* Mutando in tutta la generalità il sistema delle coordinate l' equazione di una curva comprende tutte quelle dello stesso *genere*, cioè che si possono dedurre col mezzo della omologia, ossia che sono tra loro collineari. L' equazione della parabola riferita alle coordinate Cartesiane è $y^2 = kxz$; questa sarà per conseguenza l' equazione di tutte le curve del genere della parabola, purchè le x y z si riferiscano ad un qualunque triangolo coordinato (§ 92). Ad una simil conseguenza si giungerebbe partendo dall' equazione $xy = z^2$ dell' iperbola riferita agli asintoti. È noto che le curve del 2.° ordine appartengono a questo unico genere; il che corrisponde col teorema che una funzione omogenea di 2.° grado fra tre variabili può sempre risultare dalla somma di un quadrato e di un prodotto di funzioni lineari. — L' equazione semplicissima di tutte le ditome è quindi la

$$(1) \quad xy = kz^2 ,$$

alla quale si soddisfa ponendo $x = k$, $y = t^2$, $z = t$, sicchè tutti i punti della curva sono indicati da (k, t^2, t) , cioè espressi baricentricamente da

$$\mathrm{M} \simeq k.\,\mathrm{A} + t^2.\,\mathrm{B} + t.\,\mathrm{C} ;$$

quindi (§ 92) il prodotto delle distanze di un punto della ditoma dalle due rette BC CA ha un rapporto costante col quadrato della distanza dello stesso punto dal terzo lato AB del triangolo coordinato. La tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) della curva ha l' equazione (§ 63)

$$(2) \quad y_0 x + x_0 y - 2kz_0 z = 0$$

ossia è indicata da $[y_0 , x_0 , -2kz_0]$ o da $[t^2 , k , -2kt]$ ed espressa baricentralmente da

$$\mathbf{m} \simeq t^2.\,\mathrm{BC} + k.\,\mathrm{CA} - 2\,kt.\,\mathrm{AB} ;$$

quindi (§ 97) il prodotto delle distanze di una tangente della ditoma dai due punti A B ha un rapporto costante col quadrato della distanza della medesima tangente dal terzo vertice C del triangolo coordinato. — L' equazio-

ne di tutte le tangenti, cioè la relazione omogenea tra le $u = t^2$, $v = k$, $w = -2kt$ si ottiene eliminando t ed è

$$(\mathrm{I}) \quad 4kuv = w^2 \ .$$

Essa è della medesima forma della (1), sicchè le ditome sono anche diattomene, e le loro derivate-polari sono dello stesso genere.

160. Risulta palesemente da quanto dicemmo od anche soltanto dalle indicazioni

$$(k\,,\,t^2\,,\,t) \qquad [t^2\,,\,k\,,\,-2\,k\,t]$$

di tutti i punti e delle corrispondenti tangenti della ditoma che questa passa pei punti A B dati da $t = 0$, $t = \infty$ ed ha colà le tangenti CA CB , sicchè il triangolo coordinato ha per lati due tangenti e la corda dei punti di contatto. — I due punti corrispondenti a t ed a $-t$ sono congruenti coll' apice C , giacchè

$$\mathrm{CM} \simeq k.\,\mathrm{CA} + t^2.\,\mathrm{CB} \ ,$$

e le loro tangenti si tagliano in uno stesso punto

$$\mathrm{R} \simeq k.\,\mathrm{A} - t^2.\,\mathrm{B}$$

della secante AB . Finchè t ha lo stesso segno di k il punto M della curva cade dentro del triangolo coordinato.

161. *Ditoma riferita ad un foco.* Quando la ditoma si riferisce ad un triangolo coordinato, di cui ciascun vertice abbia per polare il lato opposto, le equazioni baricentrica e baricentrale prendono le semplici forme (§ 64)

$$(1) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \ , \quad (\mathrm{I}) \quad \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0 \ .$$

Tanto osservando che il polo della $[u_0\,,\,v_0\,,\,w_0]$ è $\left(\frac{u_0}{a}\,,\,\frac{v_0}{b}\,,\,\frac{w_0}{c}\right)$, quanto notando che il punto $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ ha la polare $[ax_0\,,by_0\,,cz_0]$ si trova che il polo della retta all' infinito $[1\,,1\,,1\,,]$ cioè il centro della ditoma, è

$$\left(\frac{1}{a}\,,\,\frac{1}{b}\,,\,\frac{1}{c}\right) \ .$$

— In particolare, se il triangolo coordinato sia rettangolo in C , e le costanti a b sieno proporzionali ai quadrati dei lati CA CB , il punto C è un foco della ditoma, ed AB ne è la polare (direttrice); infatti $ax^2 + by^2 = \mathrm{gr}^2\,\mathrm{CA}.\,x^2 + \mathrm{gr}^2\,\mathrm{CB}.\,y^2$ è (§ 92) la somma dei quadrati delle

distanze del punto M dai lati CB CA , cioè $= \mathrm{gr}^2 \mathrm{CM}$, e $-cz^2$ è proporzionale al quadrato della distanza di M dalla AB .

162. *Inscrivere nella ditoma un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati.* La ditoma riferita all' apice C alle due tangenti CA CB ed alla corda dei punti di contatto AB ha (§ 159) l' equazione baricentrica

$$xy = z^2$$

(giacchè quando si tratta di proprietà projettive può porsi $k=1$), ossia ogni suo punto è indicato da $(1 , t^2 , t)$. Possiamo supporre che due dei punti dati sieno sulla corda AB , quindi li indicheremo con $(1,\alpha,0)$ $(1,\beta,0)$, sia $(1 , t^2, t)$ il vertice del triangolo cercato, da cui partono i due lati che passano per questi due punti, il primo lato sarà $[\alpha t, -t , t^2-\alpha]$, ed incontrerà di nuovo la ditoma nel secondo vertice $(1 , \frac{\alpha^2}{t^2} , \frac{-\alpha}{t})$; similmente il terzo vertice del triangolo inscritto nella ditoma sarà

$$(1 , \frac{\beta^2}{t^2} , \frac{-\beta}{t}) = (1 + \frac{\beta}{t^2})(1, \beta, 0) - \frac{\beta}{t^2}(1 , t^2, t) \ .$$

Rimane da soddisfare alla condizione di congruenza tra questi due vertici del triangolo cercato, e il terzo punto dato, che supponiamo essere $(\gamma , \delta , \varepsilon)$; tal condizione è espressa (§ 69) dal determinante

$$\begin{vmatrix} t^2 , & \alpha^2 , & -\alpha t \\ t^2 , & \beta^2 , & -\beta t \\ \gamma , & \delta , & \varepsilon \end{vmatrix} = 0 = \beta^2 \varepsilon t^2 + \beta \delta t^3 - \alpha^2 \varepsilon t^2 - \alpha \delta t^3 - \alpha^2 \beta \gamma t + \alpha \beta^2 \gamma t$$

che diviso per $(\beta-\alpha)t$ è

$$\delta t^2 + (\alpha+\beta) \varepsilon t + \alpha\beta\gamma = 0 \ ;$$

quindi il primo vertice del triangolo cercato può avere due posizioni differenti

$$(1 , t_1^2, t_1) \quad , \quad (1 , t_2^2, t_2) \quad ,$$

essendo t_1 t_2 le radici della predetta equazione. La retta che congiunge questi due punti di soluzione è (§ 68)

$$[t_1 t_2 , 1 , -t_1 - t_2] \quad ,$$

ossia, per la nota proprietà delle equazioni di secondo grado,

$$[\alpha\beta\gamma , \delta , \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon] \quad ;$$

a motivo poi della relazione

$$2 [\alpha\beta\gamma , \delta , \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon] = [\alpha\beta\gamma - \alpha\delta , \delta - \beta\gamma , 2\alpha\varepsilon + 2\beta\varepsilon] + (\beta\gamma + \delta) [\alpha , 1 , 0]$$

si vede che la predetta retta delle due soluzioni è congruente colla $[\alpha, 1, 0]$ polare (§ 159) del primo fra i punti dati, e colla $[\alpha\beta\gamma - \alpha\delta, \delta - \beta\gamma, 2\alpha\varepsilon + 2\beta\varepsilon]$, che unisce lo stesso punto dato $(1, \alpha, 0)$ coll'intersezione $(2\varepsilon, -2\beta\varepsilon, \delta - \beta\gamma)$ delle polari $[\beta, 1, 0]$ $[\delta, \gamma, -2\varepsilon]$ degli altri due punti dati. A simili conseguenze si perviene permutando tra loro i punti primo e secondo, sicchè si determinano per tal modo due punti della retta, la quale poi taglia la ditoma nel cercato punto $(1, t^2, t)$.

— Del celebre problema d' inscrivere nel circolo un poligono, i cui lati o passino per punti dati od abbiano data lunghezza, io credo aver data la prima soluzione analitica di facile costruzione geometrica trovata direttamente col metodo delle equipollenze; *Saggio* (1835) ed altre memorie citate al § 27.

163. *Tritoma-triattomena.* La forma ordinaria delle equazioni delle due parabole cubiche e dell' iperbola cubica mostrano che esse appartengono al genere di curve, che riferito al triangolo coordinato CAB ha l' equazione baricentrica

$$(1) \quad xy^2 = kz^3 \quad ;$$

la tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) ha l' equazione

$$(2) \quad y_0^2 x + 2 x_0 y_0 y - 3 k z_0^2 z = 0 \quad ;$$

sicchè tutti i punti possiamo esprimerli con

$$(k, t^3, t^2)$$

e le tangenti con

$$[t^3, 2k, -3kt] \ ,$$

avendo tolto ad $u = y^2 = t^6$, $v = 2xy = 2kt^3$, $w = -3kz^2 = -3kt^4$ il fattore comune t^3; e la curva considerata come inviluppo ha l' equazione baricentrale

$$(I) \quad 27ku v^2 + 4w^3 = 0 \ ,$$

che essendo della stessa forma della (1) mostra che queste tritome sono anche triattomene (cioè di 3.° ordine e di 3.ª classe), e che le loro derivate-polari appartengono al medesimo genere.

164. L' espressione baricentrica

$$M \simeq k.A + t^3.B + t^2.C$$

dà l' equipollenza $AM \simeq \frac{t^3.AB + t^2.AC}{k + t^2 + t^3}$, la quale mostra che corrisponden-

temente a $t=0$ la curva ha in A un regresso colla tangente AC . Similmente per $t=\infty$ si ha

$$BM \simeq \frac{k}{t^3} BA + \frac{1}{t} BC$$

che mostra esservi in B un flesso colla tangente BC ; così il triangolo coordinato ha per lati la retta AB , che unisce il regresso col flesso, e le loro tangenti. I due punti corrispondenti a t ed a $-t$ sono in linea retta con B , e le loro tangenti tagliano il lato CA nello stesso punto dato da

$$Q \simeq 3k.A + t^2.C \quad , \quad \text{ossia} \quad (3k, 0, t^2) \quad .$$

165. Un punto qualunque (x_0, y_0, z_0) ha rispetto alla predetta curva $xy^2 = kz^3$ la polare-rettilinea

$$y_0^2 x + 2x_0 y_0 y - 3k z_0^2 z = 0 \quad , \text{ ossia } [y_0^2, 2x_0 y_0, -3k z_0^2],$$

e la polare-ditoma

$$x_0 y^2 + 2y_0 xy - 3k z_0 z^2 = 0 \quad .$$

Ciaschedun punto della tangente del regresso $(y_0 = 0)$ ha questa prima-polare che si decompone in due rette passanti pel regresso A . Ciaschedun punto della retta AB $(z_0 = 0)$ ha la prima-polare composta della CA tangente del regresso e della retta $x_0 y + 2y_0 x = 0$ passante pel punto C . — Il flesso B ha per prima-polare-rettilinea (§ 81) la tangente del regresso; quindi se il flesso passa a distanza infinita la tangente del regresso diventa un *diametro* della curva, e se questo va all' infinito, il flesso diventa *centro* della curva. — La retta $[u_0, v_0, w_0]$ ha rispetto alla triattomena $27ku v^2 + 4w^3 = 0$ il polo

$$(9k v_0^2 \ , \ 18k u_0 v_0 \ , \ 4w_0^2)$$

e la polica-diattomena

$$9k u_0 v^2 + 18k v_0 u v + 4w_0 w^2 = 0 \quad .$$

La tangente del regresso $[0, 1, 0]$ ha la polica-diattomena composta dei due punti $u = 0$ $v = 0$, cioè A che è il punto di contatto, e B che è il primo-polo. — La tritoma-triattomena ha tanti punti all'infinito quante sono le radici reali della $t^3 + t^2 + k = 0$. Se $k = -\frac{4}{27}$ due radici sono $t = -\frac{2}{3}$, il corrispondente punto all'infinito è espresso da $-A-2B+3C$ ed ha la tangente $[-8, -8, -8]$ tutta all' infinito. Un altro punto all'infinito è dato da $t = \frac{1}{3}$ ed ha l' asintoto $[1, -8, 4]$.

166. *Tritome.* Ciascuna tritoma può in infiniti modi esprimersi coll'equazione baricentrica

$$(1) \quad xyz = p^2 q$$

essendo p e q funzioni omogenee delle coordinate baricentriche x y z . Il punto corrispondente a $x=0$ $p=0$ ha la tangente (§ 63) $y_0 z_0 x = 0$, cioè $x=0$, e questa tangente incontra di nuovo la curva nel punto dato da $x=0$, $q=0$: simil cosa può ripetersi di ciascuna delle tangenti $y=0$, $z=0$. Perciò i lati del triangolo coordinato sono le tangenti della tritoma nei tre punti, in cui essa è incontrata da una retta $p=0$ scelta ad arbitrio, e la $q=0$ è la retta, sulla quale cadono i tre punti d' intersezione di quelle tangenti colla curva. Fa eccezione il caso, che siasi scelta la trasversale $p=0$ in modo che le tre tangenti sieno congruenti; allora invece dell' equazione (1) avremo la

$$(2) \quad xy(x+\lambda y) = p^2 q$$

ed in luogo di una delle p q potremo porre la z . — Se la trasversale p passi per un flesso passerà pel medesimo anche la q ; sicchè se la p sia la retta di due flessi, la q coinciderà colla p , ed anche la terza intersezione sarà un flesso, cioè: Teorema del Mac-Laurin. *Ogni tritoma avente più di un flesso, ne ha tre in linea retta.* — La tritoma riferita alla retta $f=0$ dei tre flessi avrà l' equazione

$$(I) \quad xyz = f^3 ,$$

sicchè (§§ 106, 136) il prodotto delle distanze di un punto della curva dalle tangenti dei tre flessi ha un costante rapporto col cubo della distanza dalla retta dei flessi. — Nel genere di tritome che ha le tangenti dei flessi concorrenti in un sol punto, l' equazione (I) dee mutarsi nella

$$(II) \quad xy(x+\lambda y) = f^3 ,$$

ed in luogo di f può porsi la terza coordinata z .

167. Supponiamo che nella (1) sia $p = x+y+z$, cioè che la retta $p=0$ sia quella posta a distanza infinita, il che potrà farsi per ogni tritoma con tre asintoti non congruenti. Pel teorema del Mac-Laurin (§ 89) ogni punto della retta p ha la stessa polare-rettilinea tanto rispetto alla tritoma quanto rispetto al triangolo coordinato formato dai tre asintoti; e siccome il punto è all' infinito, così la polare-rettilinea sarà (§ 82) il luogo dei baricentri delle intersezioni di una qualsivoglia trasversale tanto colla curva quanto cogli asintoti.

Perciò dati due punti L M della tritoma si determinerà il terzo N mediante l' equipollenza

$$LN \simeq LD + LE + LF - LM ,$$

essendo D E F i punti d' intersezione della trasversale LM cogli asintoti. — Se oltre il punto M della tritoma sieno dati i punti Q_1 Q_2 dove essa incontra due asintoti (dai quali si dedurrà il terzo Q_3 situato esso pure sulla $q=0$) si avranno altri punti della curva mediante le espressioni baricentriche

$$M_1 \simeq E_1 + F_1 - M \text{ , ossia } E_1M_1 \simeq MF_1 ,$$
$$M_2 \simeq D_2 + F_2 - M \text{ , } M_3 \simeq D_3 + E_3 - M$$

essendo E_1 F_1 , F_2 D_2 , D_3 D_3 le intersezioni delle rette Q_1M Q_2M Q_3M cogli altri due asintoti. In simil modo congiungendo il punto M_1 coi due Q_2 Q_3 otterremo altri due punti M_{12} M_{13} della tritoma; questi daranno i quattro M_{121} M_{123} M_{131} M_{132} , e così in seguito.

168. *Tritoma-tetrattomena.* Abbiasi per esempio la curva

$$(3) \quad hx^3 + x^2z - k^2y^2z = 0 ,$$

e proponiamoci di prendere per retta p la CA , cioè la $y=0$; questa taglia la curva nel punto $(1, 0, -h)$, che ha la tangente

$$(3hx_0^2 + 2x_0z_0)x - 2k^2y_0z_0y + (x_0^2 - k^2y_0^2)z = 0 \quad , \quad hx + z = 0 ,$$

e nel punto C $(0, 0, 1)$, che è doppio e le cui due tangenti sono date dalla polare-ditoma

$$3hx_0x^2 + z_0x^2 + 2x_0xz - k^2z_0y^2 - 2k^2y_0yz = 0 \quad , \quad x^2 - k^2y^2 = 0 .$$

Così abbiamo trovato le tre tangenti, il cui prodotto costituisce il primo membro della (1); ed infatti la (3) può scriversi così

$$(4) \quad (z + hx)(ky + x)(ky - x) = hk^2xy^2 ,$$

e la $x=0$ incontra la curva nel punto B $(0, 1, 0)$, in cui è di nuovo tagliata dalla prima tangente $hx + z = 0$. — Prendendo invece per la $p=0$ la $x=0$, oltre le precedenti tangenti del punto doppio abbiamo la tangente AB cioè $z=0$ nel punto B $(0, 1, 0)$, che ha la polare-ditoma $yz=0$ costituita dalla polare-rettilinea CA $y=0$, e dalla suddetta tangente $z=0$, che ha un contatto del secondo ordine colla curva (la quale per conseguenza ha in B un flesso); ed infatti la (3) può scriversi

$$(5) \quad z(ky + x)(ky - x) = hx^3$$

e confrontata colla (I) mostra che il punto doppio C tien luogo di due flessi.

169. La predetta curva è algebrico-razionale, giacchè può scriversi

$$x = k(t^2-1) \ , \ y = t(t^2-1) \ , \ z = hk$$

e le tangenti sono date da

$$u = h(1-3t^2) \ , \ v = 2hkt \ , \ w = (t^2-1)^2$$

funzioni che non superano il 4.° grado, perciò la curva è una tetrattòmena.

170. *Punti fittizii.* I Geometri accennarono ben di frequente i punti immaginarii delle curve, e talvolta li rappresentarono con punti reali, ma non seguirono in ciò il modo più opportuno, che pur veggo essere stato adoperato dal Mac-Laurin nel suo trattato delle curve del 3.° ordine (Jonquières, *Mélanges de Géom. pure. Paris* 1856, pag. 199, 203, 222). — Se una retta OP taglia una curva in due punti immaginarii, le cui distanze dal punto O sieno $a \pm \alpha\sqrt{-1}$, si prenderà OP eguale ad a , e perpendicolarmente ad essa le PM PM_1 eguali a $\pm\alpha$, saranno M M_1 i due punti rappresentati da quell' espressione immaginaria, io li dico due punti *fittizii conjugati* della curva. Relativamente agli assi coordinati ortogonali se due punti immaginarii abbiano le coordinate Cartesiane

$$x \pm \xi\sqrt{-1} \quad , \quad y \pm \upsilon\sqrt{-1}$$

i corrispondenti punti *fittizii* sono

$$(x \pm \upsilon \ , \ y \mp \xi : 1) \ ,$$

cioè l' uno ha l' ascissa $x+\upsilon$ e l' ordinata $y-\xi$, e l'altro l'ascissa $x-\upsilon$ e l' ordinata $y+\xi$. Infatti se C è l' origine delle coordinate ortogonali, il punto, che ha le coordinate

$$x + \xi\nu \quad , \quad y + \upsilon\nu \quad ,$$

è nel metodo delle equipollenze dato da

$$CM \simeq x + \xi\nu + (y + \upsilon\nu)\nu \simeq x - \upsilon + (y + \xi)\nu \quad .$$

Se rimanesse qualche dubbio su questa dimostrazione, perchè il $\sqrt{-1}$ del l' Algebra si è cangiato nel ν , che ha un significato geometrico, si facciano girare gli assi coordinati dell' angolo α sicchè le nuove coordinate divengano

$$(x+\xi\sqrt{-1})\cos\alpha-(y+\upsilon\sqrt{-1})\operatorname{sen}\alpha$$
$$(x+\xi\sqrt{-1})\operatorname{sen}\alpha+(y+\upsilon\sqrt{-1})\cos\alpha$$

e se si supponga $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\xi}{\upsilon}$, la nuova ascissa sarà reale $=x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha$, perpendicolarmente ad essa si prenderà la parte reale $x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha$ dell' ordinata, e la parte $\xi\operatorname{sen}\alpha+\upsilon\cos\alpha$ dovrà prendersi perpendicolarmente all'ordinata, cioè parallelamente all'ascissa, sicchè l'ascissa del punto fittizio sarà

$$x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha+\xi\operatorname{sen}\alpha+\upsilon\cos\alpha\ ,$$

e l' ordinata $$x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha\ ,$$

ritornando agli assi primitivi si trovano pel punto fittizio le coordinate

$$x+\upsilon\ ,\quad y-\xi\ .$$

171. Per una curva riferita alle coordinate Cartesiane, se queste ricevono i valori immaginarii $x+\xi\sqrt{\ }$, $y+\upsilon\sqrt{\ }$ soddisfacenti all' equazione della curva, e quindi anche i valori ad essi conjugati $x-\xi\sqrt{\ }$, $y-\upsilon\sqrt{\ }$, si hanno due punti fittizii della curva, e la retta che ne dimezza perpendicolarmente la distanza ha colla curva quelle due intersezioni fittizie. — Lo stesso principio vale anche per le curve espresse mediante il calcolo baricentrico, purchè si stabilisca il significato del baricentro di punti accompagnati da coefficienti immaginarii. Ora l' espressione baricentrica

$$\mathrm{M}\simeq x.\,\mathrm{A}+y.\,\mathrm{B}+z.\,\mathrm{C}$$

si cangia nell' equipollenza

$$\mathrm{OM}=\frac{x.\,\mathrm{OA}+y.\,\mathrm{OB}+z.\,\mathrm{OC}}{x+y+z}$$

e se il coefficiente, per esempio, della OA sia immaginario, cioè $m+\mu\sqrt{\ }$, abbiamo già stabilito che $(m+\mu\sqrt{\ })\,\mathrm{OA}$ è la somma-geometrica della $m.\,\mathrm{OA}$ e della $\mu\sqrt{\ }.\,\mathrm{OA}$ perpendicolare alla OA ; così sarà sempre possibile costruire il punto M ; ed in qualunque ordine si operi si giungerà sempre allo stesso risultamento.

172. Ai punti fittizii si estendono le proprietà delle polari (§ 82), quantunque esse cessino d' esser proprietà projettive. Così se dal punto O si tiri una qualsivoglia trasversale, che abbia con una $n.^{\text{toma}}$ le intersezioni reali o fittizie Q_1 Q_2 ... Q_n e tagli la polare-rettilinea di O in P, avrà luogo l' equipollenza

$$\frac{PQ_1}{OQ_1}+\frac{PQ_2}{OQ_2}\ldots\ldots+\frac{PQ_n}{OQ_n}\simeq 0\ ,$$

ossia

$$\frac{1}{OQ_1}+\frac{1}{OQ_2}\ldots+\frac{1}{OQ_n}\simeq\frac{n}{OP}\ .$$

Quando si tratta di una ditoma, e le intersezioni sono fittizie, il quadrilatero OQ_2PQ_1 è armonico (§ 30) cogli angoli in Q_2 Q_1 retti.

173. *Punti fittizii delle ditome.* Una retta, che non taglia la ditoma, e che perciò dicesi una sua *secante-ideale*, abbia con essa l'intersezione fittizia S (cioè sia S uno di quei due punti, che nel modo superiormente spiegato sta in luogo dei punti immaginarii della curva appartenenti a quella retta) se prendasi S per *centro d'omologia*, e facciasi andare all'infinito la secante-ideale, la ditoma diventerà un circolo. — Siccome prendendo S per centro di reciprocità la curva *reciproca* del circolo è una nuova ditoma avente un foco in S, così il punto fittizio ha rispetto alla ditoma primitiva ed alla sua secante-ideale alcune proprietà analoghe a quelle del foco. In particolare il foco è sempre un'intersezione fittizia della polare del foco (direttrice) colla ditoma. — Nell'ellisse sono osservabili due rette, che hanno un'intersezione fittizia nel centro dell'ellisse stessa, formano colle polari dei fochi un rettangolo concentrico ed omotetico col rettangolo circoscritto all'ellisse coi lati equipollenti agli assi. — Tutte le rette passanti pel centro hanno le loro intersezioni fittizie coll'iperbola situate in un'altra iperbola, i cui asintoti sono perpendicolari a quelli della primitiva, l'asse secondario di questa eguaglia l'asse primario di quella e viceversa (Vegg. Plücker, *Entw.* II, 1831, § 718; Bellavitis, *Saggio di Geom. derivata. Padova*, 1838, § 104).

174. Un *circolo immaginario* è rappresentabile da un punto posto al di fuori del piano perpendicolarmente al di sopra del centro, ne viene che quello che al § 111 dissi quadrato della distanza tangenziale di un punto P dal circolo col centro A e col raggio immaginario $r\sqrt{-1}$ è uguale al quadrato della distanza del punto P dal punto A^0 posto al di sopra di A alla distanza r dal piano, in cui si trova il punto P. — Innalzate perpendicolarmente al piano della figura le AA^0 BB^0 CC^0 MM^0 ecc. le estremità A^0 B^0 .... sono su una superficie sferica avente il centro nel piano della figura ABC...., e se sia

$$(x+y+z)\,M\simeq x.A+y.B+z.C$$

per ciascun punto P del piano, sarà

$$(x+y+z)\,(\mathrm{PM}^0)^2 \simeq x.\,(\mathrm{PA}^0)^2 + y\,(\mathrm{PB}^0)^2 + z\,(\mathrm{PC}^0)^2 \ .$$

175. *Singolarità nella curvatura.* Ordinariamente ogni curva ha un contatto di primo ordine colle proprie tangenti, cioè ad ogni punto corrisponde un circolo osculatore di raggio finito: meritano quindi particolare attenzione quei punti, nei quali le tangenti hanno colla curva un contatto di ordine s differente dal primo; se sulla tangente partendo dal punto di contatto si prenda un' ascissa infinitesima, la corrispondente ordinata sarà infinitesima dell' ordine $(s+1)^{\text{esimo}}$. La miglior distinzione dei punti, o vogliansi dire tangenti, *singolari* è il numero positivo s, che diremo numero di *singolarità*. — La singolarità di curvatura indicata dal numero $s=2$ è un *flesso* (punto di flesso contrario); quella indicata da $s=\frac{1}{2}$ è un *regresso;* quella indicata da $s=3$ è un punto di curvatura nulla, e nel quale pur nullostante la curva rimane tutta da una stessa banda della tangente; fu detto punto di *serpentement* considerandolo come l'unione di due flessi, potrebbe dirsi punto d' *allineamento*, in quanto che in esso la curva si avvicina alla linea retta più che in qualunque altro dei precedenti. Quando $s=\frac{1}{3}$ si potrà dire che si ha una *rivolta*, perchè la curva si rivolge più rapidamente che nel punto ordinario. È inutile dar nomi alle altre singolarità di curvatura, che nella forma apparente si assomigliano alle predette.

176. *Altri punti singolari.* Sono pure osservabili i punti doppii, nei quali si tagliano due rami di curva, che, generalmente parlando, hanno tangenti differenti. Similmente una retta può toccare due rami di curva in due punti differenti, ed essa si dice una tangente doppia. Così pure si hanno punti o tangenti multiple. — Vi sono eziandio alcuni punti singolari a motivo dei rami che in essi finiscono, quantunque la curvatura sia ordinaria; tale è, per esempio, quello corrispondente ad $x=0$ nella curva

$$y=(x+x^{\frac{3}{2}})^2=x^2+2\,x^{\frac{5}{2}}+x^3 \ .$$

177. Una retta taglia una $n.^{\text{toma}}$ in n punti reali od immaginarii; alcuni dei primi possono coincider insieme: così se la retta tocca la $n.^{\text{toma}}$ in un punto di curvatura ordinaria, questo punto conta per due, ossia si dice che la tangente ha due punti comuni colla curva; se la retta passa per un punto di regresso designato dal numero $s=\frac{1}{2}$, questo conta per due, e quindi lo si considera come punto doppio, ed infatti, se la retta si suppone rimossa alcun

poco da quella posizione si vede sorgere le due intersezioni; la tangente del regresso ha tre punti infinitamente vicini comuni colla curva; ciò avviene anche per la tangente del flesso disegnato dal numero $s=2$, quantunque questo punto sia semplice rispetto ad ogni altra retta che passa per esso. La tangente del punto d'allineamento ($s=3$) ha quattro punti comuni colla curva.

178. Relativamente al numero delle tangenti, che possono condursi ad una curva da un dato punto (numero che eguaglia la classe) si può notare che se il punto appartiene alla curva stessa, la sua tangente tien luogo di due tangenti se la curvatura è ordinaria, di tre se vi sia il flesso disegnato dal numero 2, di quattro se si abbia un allineamento disegnato dal numero 3, ecc. Se poi il punto, da cui vogliono condursi le tangenti, appartiene alla tangente di un flesso, questa tangente conta per due, sicchè essa può considerarsi come una tangente doppia i cui due punti di contatto coincidono insieme.

179. *Punti singolari posti all' infinito.* Prima che si fosse posto mente alla derivazione di collineazione (prospettiva, projezione, omografia) non si era pensato che le curve hanno talvolta dei punti singolari anche a distanza infinita, e si considerava la differente disposizione dei rami infiniti rispetto all' asintoto, senza accorgersi che ciò dipendeva dalla natura del punto, di cui l'asintoto è la tangente. Quando passa all' infinito una tangente i rami infiniti che ne provengono si dicono parabolici, che se va all' infinito il punto e non la tangente, questa è l' asintoto, ed i rami si dicono iperbolici. Se il punto passato a distanza infinita è disegnato dal numero s (se $s=1$ il punto è ordinario) prendendo le x parallele all' asintoto si ha

$$y = a + \frac{b}{x^s} + \text{ecc.} \ ;$$

che se sia passata a distanza infinita la tangente, e si prendano le x nella direzione dei rami parabolici, questi sono espressi da

$$y + c\,x^{\frac{s}{s+1}} + \text{ecc.}$$

essendo x y infiniti.

180. *Scacchiere algebrico.* La determinazione dei punti singolari, sieno dessi a distanza finita od infinita, dipende dallo sviluppo del valore di una delle coordinate in serie secondo le potenze ascendenti o discendenti dell' altra: per eseguire tale sviluppo in maniera facile e sicura credo si debba ricorrere allo *scacchiere* (parallelogrammo o triangolo) *algebrico* adoperato dal Newton, e dal

Cramer. Una funzione intera delle x y è posta sullo scacchiere quando i termini di ciascuna riga contengono una medesima potenza della y, e da una riga alla seguente l' esponente cangia di un' unità, similmente gli esponenti della x mutano di uno da una colonna alla vicina; le potenze della x saranno da sinistra a destra *ascendenti* o *discendenti* secondo che la serie dee procedere per le potenze *ascendenti* o *discendenti* della x; e dall' alto al basso le potenze della y, che vuole svilupparsi in serie, saranno *discendenti;* (se si volesse sviluppare in serie $\frac{1}{y}$, le potenze della y si porrebbero *ascendenti* dall' alto al basso). Fatta questa disposizione dei termini dell' equazione sullo scacchiere si considereranno due o più termini che sieno in una medesima linea retta obbliqua o verticale, e sieno i primi dalla banda sinistra; quei termini uguagliati separatamente a zero formeranno un' equazione, da cui si dedurrà mediante il solito calcolo un valore di y. In questa linea, ed anche in tutte le linee ad essa parallele protratte fino ai termini senza y, si eseguirà la solita trasformazione da y ad $y' = y - a$, essendo a il valore già trovato della y; così si otterranno i coefficienti di una trasformata, che si scriveranno nello scacchiere algebrico, sul quale si opererà in egual modo, avvertendo però che la linea dei primi termini da considerarsi nel secondo scacchiere non dev' esser parallela alla linea adoperata nel primo scacchiere, ma deve avere girato nel verso positivo, cioè da destra ascendendo verso sinistra.

181. *Sviluppi in serie infinite.* Abbiasi per esempio l' equazione scritta sullo scacchiere in modo da sviluppare la y secondo le potenze *ascendenti* della x

$$(1)\qquad \begin{array}{cccc} & & -3xy^4 & \\ -y^3 & +0 & +12x^2y^3 & \\ +2y^2 & +xy^2 & +0 & -6x^3y^2 \\ & -5xy & +6x^2y+7x^3y & +0 \\ & & -3x^2 & +0+0+0=0 \end{array}$$

cominciando colla linea obbliqua formata dai termini

$$(a)\qquad 2y^2 - 5xy - 3x^2 = 0$$

essa ha due radici, una delle quali è $y = 3x$; colla cifra 3 calcoliamo le solite tabelle (*Sul più facile modo di trovare le radici reali e sopra un nuovo metodo per le radici immaginarie. M. Istituto* Vol. III. *Saggio sull' Al-*

gebra degli immaginarii Vol. IV, § 34, ecc.) non solamente coi coefficienti $2-5-3$ di tal linea, ma ancora con tutte le linee ad essa parallele

$$\begin{array}{r|l} & 2-5-3 \\ \hline 3 & 2+1+0 \\ & 2+7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -1+1+6+0 \\ \hline 3 & -1-2+0+0 \\ & -1-5-15 \\ & -1-8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 7+0 \\ \hline 3 & 7+21 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -3+12-6+0+0 \\ \hline 3 & -3+3+3+9+27 \\ & -3-6-15-36 \\ & -3-15-60 \\ & -3-24 \end{array}$$

ed i nuovi coefficienti così trovati scriviamoli sullo scacchiere in luogo di quelli da cui si è partiti, sicchè avremo

$$\begin{array}{rl} & \qquad -3 \\ & -1 \quad +0-24 \\ (2) \qquad & +2 \quad -8+\ 0-60 \\ & \quad +7-15+\ 7-36 \\ & \qquad\qquad +21+27 \end{array}$$

qui per brevità sono ommesse le potenze della x e quelle della $y'=y-3x$. In questo secondo scacchiere la sola linea obbliqua che in confronto della (a) già considerata abbia girato nel verso positivo è quella coi coefficienti $+7+21$, cioè $7xy'+21x^4=0$, la quale dà $y'=-3x^3$. Se non vogliamo spingere innanzi la serie ci basterà calcolare la tabella sopra due sole linee parallele

$$\begin{array}{r|l} & 7+21 \\ \hline -3 & 7+\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -15+27 \\ \hline -3 & -15+72 \end{array}$$

e del terzo scacchiere basterà considerare i termini

$$\begin{array}{rl} & +7xy''-15x^2y'' \quad . \quad . \\ (3) & \qquad\qquad +0+72x^5+\text{ec.} =0 \end{array}$$

sicchè raccogliendo i valori trovati avremo

$$(l) \quad y=3x-3x^3-\frac{72}{7}x^4-\text{ecc.} \ .$$

Nello scacchiere (1) consideriamo ora la linea verticale

$$(b) \quad -y^3+2y^2=0 \quad ,$$

che ci dà $y=2$; le tabelle su tutte le linee verticali sono

$$\begin{array}{r|l} & -1+2+0+0 \\ \hline 2 & -1+0+0+0 \\ & -1-2-4 \\ & -1-4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -3+0+1-5+0 \\ \hline 2 & -3-6-11-27-54 \\ & -3-12-35-97 \\ & -3-18-71 \\ & -3-24 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 12+0+6-3 \\ \hline 2 & 12+24+54+105 \\ & 12+48+150 \\ & 12+72 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -6+7+0 \\ \hline 2 & -6-5-10 \\ & -6-17 \end{array}$$

e quindi i coefficienti del secondo scacchiere sono

$$\begin{array}{l} -3 \\ -1\ -24+12 \\ -4\ -71+72\ -\ 6 \\ -4\ -97+150-17 \\ \quad -54+105-10 \end{array} \qquad (4)$$

nel quale la linea che sussegue alla (b) è quella che contiene $-4y'-54x=0$ la quale ci conduce ai calcoli

$$\begin{array}{r|l} & -4-54 \\ \hline -\frac{27}{2} & -4+0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -4-97+105 \\ \hline -\frac{27}{2} & -4-43+\frac{1371}{2} \\ & -4+11 \end{array} \text{ , ecc.}$$

$$\begin{array}{l} -4y''^2 \\ -4y''+11xy'' \\ \qquad\qquad +\frac{1371}{2}x^2 \end{array} \qquad (5)$$

e ci dà

$$(\text{II}) \quad y=2-\frac{27}{2}x+\frac{1371}{8}x^2+\text{ecc.}$$

In terzo luogo lo scacchiere (1) offre la linea obbliqua

$$(c) \quad -3xy^4-y^3=0$$

da cui $y=-\frac{1}{3x}$; i calcoli sulle linee parallele alla (c) sono

$$\begin{array}{r|l} & -3-1+0+0+0 \\ \hline -\frac{1}{3} & -3+0+0+0+0 \\ & -3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9} \\ & -3+2-1 \\ & -3+3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2+0+0 \\ \hline -\frac{1}{3} & 2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9} \\ & 2-\frac{4}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 12+1+0+0 \\ \hline -\frac{1}{3} & 12-3+1-\frac{1}{3} \\ & 12-7+\frac{10}{3} \\ & 12-11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -5+0 \\ \hline -\frac{1}{3} & -5+\frac{5}{3} \end{array} \text{ , ecc.}$$

ed il secondo scacchiere

$$\begin{array}{c} -3 \\ +3 \quad +12 \\ -1+2-11 \\ +\frac{1}{9}-\frac{4}{3}+\frac{10}{3}-5 \\ +\frac{2}{9}-\frac{1}{3}+\frac{5}{3} \end{array} \tag{6}$$

dà colle sue linee verticali

$$-2\left|\begin{array}{c|c} \frac{1}{9}+\frac{2}{9} & \\ \hline \frac{1}{9}+0 & \end{array}\right. \qquad -2\left|\begin{array}{c|c} -1-\frac{4}{3}-\frac{1}{3} & \\ \hline -1+\frac{2}{3}-\frac{5}{3} & \\ -1+\frac{8}{3} & \end{array}\right. \qquad \text{ecc.}$$

sicchè si ha

$$y=-\frac{1}{3x}-2+15x+\text{ecc.} \tag{III}$$

Finalmente la linea (a) dello sacchiere (1) ci dà un' altra radice $y=-\frac{1}{2}x$ che conduce ai seguenti calcoli

$$-\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c|c} 2-5-3 & \\ \hline 2-6-0 & \\ 2-7 & \end{array}\right. \qquad -\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c|c} -1+1+6+0 & \\ \hline -1+\frac{3}{2}+\frac{21}{4}-\frac{21}{8} & \\ -1+2+\frac{17}{4} & \\ -1+\frac{5}{2} & \end{array}\right. \qquad -\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c|c} 7+0 & \\ \hline 7-\frac{7}{2} & \end{array}\right. \qquad \text{ecc.}$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ +2+\frac{5}{2} \end{array} \qquad \text{ecc.}$$

$$\begin{array}{c} -7+\frac{17}{4}+7 \\ -\frac{21}{8}-\frac{7}{2} \end{array} \tag{7}$$

$$-\frac{3}{8}\left|\begin{array}{c|c} -7-\frac{21}{8} & \\ \hline -7+0 & \end{array}\right. \qquad -\frac{3}{8}\left|\begin{array}{c|c} 2+\frac{17}{4}-\frac{7}{2} & \\ \hline 2+\frac{14}{4}-\frac{77}{16} & \end{array}\right.$$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{16}x^3-\text{ecc.} \tag{IV}$$

182. *Punti singolari.* Mediante lo sviluppo della y secondo le potenze *ascendenti* della x si determina la natura dei punti corrispondenti ad $x=0$. Quindi se si vogliano conoscere i punti corrispondenti ad $x=a$, bisognerà calcolare da prima la trasformata in $x_1=x-a$. Nella curva che ha l' equazione Cartesiana trattata nel § precedente gli sviluppi secondo le potenze ascendenti della x

$$\text{(I)}\quad y=3x-3x^3-\text{ecc.}\quad,\quad \text{(IV)}\quad y=-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}x^3-\text{ecc.}$$

$$\text{(II)}\quad y=2-\frac{27}{2}x+\frac{1371}{8}x^2+\text{ecc.}$$

paragonati con $y-a-bx=cx^{s+1}$ mostrano che nel punto $(0,0:1)$ vi è un flesso contrassegnato dal numero $s=2$, ed un punto ordinario contrassegnato da $s=1$, quindi il punto è doppio. In $(0,2:1)$ poi vi è un punto ordinario. L' altro sviluppo

$$\text{(III)}\quad y=-\frac{1}{3x}-2+\text{ecc.}$$

indica un punto all' infinito coll' asintoto $x=0$; paragonando colla $y=ax^{-\frac{1}{s}}$, che risulta dalla $x=by^{-s}$, si vede che il punto è ordinario, perchè contrassegnato da $s=1$.

183. *Rami infiniti.* I punti situati a distanza infinita si determinano sviluppando la y secondo le potenze *discendenti* della x; rimangono eccettuati quelli che hanno gli asintoti paralleli all' asse delle y, che si troveranno sviluppando la x secondo le potenze discendenti della y. La natura dei primi punti si scorge confrontando lo sviluppo coll' una o coll' altra delle due formule

$$y=ax+b+cx^{-s}\quad,\quad y=ax+bx^{\frac{s}{s+1}}$$

alla prima delle quali corrispondono due rami iperbolici coll'asintoto $y=ax+b$ ed alla seconda due rami parabolici, la cui direzione tende al parallelismo verso la retta $y=ax$.

184. I rami infiniti della curva

$$\begin{array}{cccccc} & & -3x^2y^4 & & & \\ -x^3y^3 & + & 0 & +12xy^3 & & \\ +2x^3y^2 & + & x^2y^2 & + & 0 & -6y^4 \\ & - & 5x^2y & + & 6xy & +7y \\ & & & -3x & & =0 \end{array}$$

si ottengono con calcoli identici a quelli del § 181. Gli sviluppi

$$\text{(I)}\quad y=\frac{3}{x}-\text{ecc.} \qquad \text{(IV)}\quad y=-\frac{1}{2x}-\text{ecc.}$$

$$\text{(II)}\quad y=2-\frac{27}{2x}+\text{ecc.} \qquad \text{(III)}\quad y=-\frac{x}{3}-2+\frac{15}{x}+\text{ecc.}$$

della y secondo le potenze discendenti della x mostrano la presenza di quattro rami iperbolici ordinarii coll' asintoto $y=0$, di due pur ordinarii coll' asintoto $y=2$, e di due coll' asintoto $y=-\frac{x}{3}-2$. Così all' estremità dell' asse delle x dee considerarsi esistere un punto triplo, di cui due rami hanno la tangente comune. — Rimane da sviluppare la x secondo le potenze discendenti della y , il che, oltre $x=-3y-6-\frac{15}{y}-\text{ecc.}$, che appartiene ad un punto all' infinito già trovato, ci dà

$$x=\frac{2+\sqrt{2}}{y}+\frac{7\sqrt{2}}{12y^2}+\text{ecc.} \quad , \quad x=\frac{2-\sqrt{2}}{y}-\text{ecc.} \quad ,$$

che appartengono a quattro rami infiniti coll'asintoto $x=0$; quindi all'infinito vi è un punto doppio.

185. Prendiamo un secondo esempio dagli Elementi di Algebra del Paoli (1813 § 93). L' equazione

$$(y+x)y^2(y-x)^3-y(x^2+y^2)^2-3y^2+1=0$$

posta sullo scacchière algebrico

$$\begin{array}{ccccc} & & & & -y^6 \\ & & & +2xy^5 & +y^5 \\ & & +0 & +0 & +0 \\ & -2x^3y^3 & +2x^2y^3 & +0 & +0 \\ +x^4y^2 & +0 & +0 & +0 & +3y^2 \\ +x^4y & +0 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +0 & -1 \end{array} \quad =0$$

ci dà gli sviluppi secondo le potenze discendenti della x

$$y=\frac{1}{x^4}+\text{ecc.} \quad , \quad y=-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{8x}+\text{ecc.} \quad , \quad y=x+\sqrt[3]{2x^2}+\text{ecc.} \; ;$$

sicchè la curva ha due rami coll' asintoto $y=0$ spettanti ad un punto con-

trassegnato dal numero $s=3$, un punto ordinario coll' asintoto $y+x-\frac{1}{2}=0$, ecc. due rami parabolici verso un flesso contrassegnato da $s=2$. La curva non ha asintoti paralleli all' asse delle y .

186. *Punti singolari.* Se la curva sia data col mezzo di un' equazione *baricentrica* (§ 94) e si voglia determinare la natura di un punto corrispondente ad una coordinata nulla, per esempio ad $x=0$, si svilupperà un' altra delle coordinate secondo le potenze ascendenti della x , e se trovisi

$$(1) \qquad z=ay+bx+c\frac{x^{s+1}}{y^s}+\text{ecc.}$$

il punto sarà contrassegnato (§ 175) dal numero positivo s , e $z=ay+bx$ ne sarà la tangente. Se si trovasse

$$(2) \qquad z=ay+bx^r y^{1-r}+\text{ecc.} \qquad \text{essendo} \quad r<1 \ ,$$

se ne dedurrebbe $$xy^s=c\,(z-ay)^{s+1}$$

essendo $$s+1=\frac{1}{r} \ .$$

In ciò si suppone che nel punto di cui si tratta non sia $y=0$; se fosse $y=0$, anzichè sviluppare la z si svilupperebbe la y secondo le potenze ascendenti della x . — Quando il punto, di cui vuol determinarsi la natura corrisponde ad $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ si elimina una x delle coordinate mediante la $x'=\alpha x+\beta y+\gamma z$, poscia si fa per x' ciò che si disse per x.

187. Sia proposta, per esempio, la curva

$$xy^2-3yz^2+z^3=0$$

la natura del punto $(0,1,0)$ si otterrà sviluppando la z secondo le potenze ascendenti della x ; scritta l' equazione sullo scacchiere algebrico relativo alle due lettere z x

$$\begin{array}{l} +\ z^3 \\ -3yz^2 \\ +\ 0 \\ +\ 0\ +xy^2=0 \end{array}$$

si trova $z=\sqrt{\frac{xy}{3}}+\text{ecc.}$ quindi $r=\frac{1}{2}$ ed $s=\frac{1}{r}-1=1$ indica che il punto è ordinario. L' altro sviluppo

$$z=3y-\frac{1}{9}x-\frac{2}{81}\frac{x^2}{y}-\text{ecc.}$$

mostra che anche il punto $(0,1,3)$ è ordinario. I punti che stanno sul lato $z=0$ del triangolo coordinato si trovano sviluppando secondo le potenze ascendenti della z prima la x poscia la y : la $x=3\frac{z^2}{y}+$ ecc. ci torna a dire che il punto $(0,1,0)$ è ordinario; la

$$+xy^2+0+0$$
$$-3yz^2+0$$
$$+z^3=0$$

$$y=\sqrt{-}\frac{z^3}{x}+\text{ecc.} \qquad \text{dà} \qquad s=\frac{1}{2}$$

cioè il punto $(1,0,0)$ è un regresso. Se poniamo $x'=x-2y$ l'equazione

$$+z^3$$
$$-3yz^2$$
$$+0$$
$$+2y^3+y^2x'=0$$

dà

$$z=y+\frac{1}{3}x'+\frac{1}{81}\frac{x'^3}{y^2}+\text{ecc.}$$

quindi $s=2$ mostra che il punto $(2,1,1)$ è un flesso colla tangente

$$z=y+\frac{1}{3}x'=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}x \quad .$$

188. Abbiasi per secondo esempio la

$$y^2z=x^3+\left(\frac{1}{4g^3}-\frac{3}{2g}-\frac{3}{4}g\right)x^2z+xz^2$$

e si cerchi la natura dei punti corrispondenti a $x-gz=x'=0$; fatta la sostituzione poi sviluppata la z secondo le potenze della x' si trova $z=\frac{x'^3}{y^2}+$ ecc. , perciò la curva ha un flesso in $(0,1,0)$; inoltre le due serie

$$z=\pm\frac{2\sqrt{g}}{1-g^2}y+\frac{3g^2-1}{g-g^3}x'-\frac{1}{2}\frac{x'^3}{y^2}+\text{ecc.}$$

mostrano la presenza di due altri flessi sulla stessa retta $x=gz$.

189. Mediante le equazioni *baricentrali* (§ 95) (lo stesso può dirsi delle Plucheriane (§ 65)) si determinano le singolarità di curvatura con un calcolo precisamente uguale a quello, che vale per le equazioni baricentriche; soltanto

bisogna tener presente che applicando alle coordinate baricentrali le regole date (§ 186) per le coordinate baricentriche, la singolarità di curvatura viene contrassegnata dal numero $\frac{1}{s}$ anzichè dal numero s. Ciò è conseguenza del teorema: *Nelle curve reciproche* (§ 43) *le curvature dei punti correlativi sono contrassegnate da due numeri, che hanno il prodotto* 1. Possiamo dimostrarlo osservando che le due curve

$$\mathrm{OM} \simeq t + t^{s+1} \gamma \quad , \quad 2s.\,\mathrm{OM}^0 \simeq \frac{s+1}{t} + \frac{\gamma}{t^{s+1}}$$

(dove t è la variabile da punto a punto) sono tra loro reciproche, e che la prima ha nel punto O la curvatura contrassegnata dal numero s, mentre la seconda ha a distanza infinita il punto, che, a motivo di $x = by^{\frac{1}{s+1}}$ è contrassegnato (§ 183) dal numero $\frac{1}{s}$. Possiamo anche notare che se ω è una quantità infinitesima, il punto $(\omega, \omega^{s+1}, 1)$ è contrassegnato dal numero s; ora la $-x^{s+1} + yz^s = 0$ dà

$$u = -(s+1)x^s \quad , \quad v = z^s \quad , \quad w = syz^{s-1}$$

la corrispondente tangente

$$[\omega^s , 1 , \omega^{s+1}]$$

può anchè indicarsi con $[\omega , 1 , \omega^{1+\frac{1}{s}}]$, sicchè si vede che s si cangia in $\frac{1}{s}$.

190. Abbiasi, per esempio, l' equazione baricentrale

$$vw^3 - u^4 + u^2w^2 = 0 \ ,$$

per le tangenti, che passano pel vertice A del triangolo coordinato, e che perciò corrispondono ad $u = 0$, si trovano gli sviluppi in serie infinita secondo le potenze ascendenti della u

$$\text{(I)} \quad w = \sqrt[3]{\frac{u^4}{v}} + \text{ecc.} \quad , \quad \text{(II)} \quad v = -\frac{u^2}{w} + \text{ecc.}$$

Se le u v w fossero coordinate baricentriche, il punto corrispondente ad $u = 0$ $w = 0$ sarebbe un punto di *rivolta* (§ 175) contrassegnato da

$s = \frac{1}{3}$, invece alla tangente $[0,1,0]$ corrisponde la curvatura contrassegnata da $s = 3$, cioè un punto di *allineamento*. La curvatura in $[0,0,1]$ è ordinaria. Per $v = 0$ abbiamo gli sviluppi

$$\text{(III)} \quad w = \pm u - \frac{1}{2} v \pm \frac{5}{8} \frac{v^2}{u} - \text{ecc.}$$

$$\text{(II)} \quad u = \pm \sqrt{-vw} + \text{ecc.} \ , \quad \text{(III)} \quad u = \pm w + \frac{1}{2} v \mp \frac{5}{8} \frac{v^2}{w} - \text{ecc.}$$

ciascuna delle (III) dà le due tangenti ordinarie $[1,0,\pm 1]$; la (II) corrisponde colla già trovata. Che se vogliansi esaminare anche le tangenti corrispondenti a $w = 0$ troviamo

$$\text{(I)} \quad u = \sqrt[4]{vw^3} + \text{ecc.}$$

cioè abbiamo ancora la tangente di allineamento $[0,1,0]$.

191. *Condizione di curvatura nulla* ecc. Per l' esistenza di un punto di flesso o di allineamento o di ogni altro, in cui la curvatura sia nulla, bisogna che la retta

$$MU = d^2x . OA + d^2y . OB + d^2z . OC$$

coincida colla tangente $ux + vy + wz = 0$, dunque la condizione cercata è

$$\text{(1)} \quad ud^2x + vd^2y + wd^2z = 0 \ ,$$

che a motivo delle (3) del § 141 può scriversi

$$\text{(2)} \quad | \, xdyd^2z \, | = xdyd^2z - ydxd^2z - \text{ecc.} = 0 \ .$$

Nel punto d' allineamento sarà anche

$$\text{(3)} \quad ud^3x + vd^3y + wd^3z = d \, | \, xdyd^2z \, | = 0$$

(*Sposiz. dei determinanti nel Vol.* VII, § 84). Similmente la condizione di raggio di curvatura nullo, che ha luogo nei punti di regresso, di rivolta, ecc. è

$$\text{(4)} \quad xd^2u + yd^2v + zd^2w = | \, udvd^2w \, | = udvd^2w - vdud^2w - \text{ecc.} = 0 \ ,$$

e nel punto di rivolta si ha inoltre

$$\text{(5)} \quad | \, udvd^3w \, | = d \, | \, udvd^2w \, | = 0 \ .$$

192. *Hessiano che dà i flessi.* Nei punti di curvatura nulla i differenziali secondi delle tre coordinate possono annullarsi insieme, cioè se poniamo $z = 1$ e dx costante si ha $d^2y = 0$; quindi se $f(x,y,z) = 0$ è l'equazione Cartesiana o baricentrica d' un luogo, le sue tre derivate-seconde daranno

$$f''''\,dx^2+f''''\,dxdy+f''''\,dxdz=0$$
$$f''''\,dxdy+f''''\,dy^2+f''''\,dydz=0$$
$$f''''\,dxdz+f''''\,dydz+f''''\,dz^2=0$$

acciocchè queste tre equazioni possano insieme sussistere deve (*Sposiz. determin.* § 79) annullarsi il determinante *Hessiano*

$$H=|\,D_xD_x\,,\,D_yD_y\,,\,D_zD_z\,|\,f=0\ .$$

Se questo Hessiano svanisce insieme con f, il luogo ha in ogni punto la curvatura nulla, e perciò è un complesso di rette; come abbiamo già veduto (§ 148) rispetto alle ditome. Può vedersi: Plücker, *System*, 1835, § 298. — Hesse, *J. Crelle*, 1849, XXXVIII, N. 14, 15. — Salmon, *Higher plane curves*, 1852, § 83. — Brioschi, *N. Ann. Terq.* 1854, XIII, p. 402.

193. *Flessi immaginarii delle tritome.* Prendiamo l' equazione generale data al § 166

$$(1)\quad 6xyz+f^3=6xyz+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3=0$$

l' Hessiano che ne determina i flessi è

$$H=\begin{vmatrix}\alpha^2 f\,,\ z+\alpha\beta f\,,\ y+\alpha\gamma f\\ z+\alpha\beta f\,,\ \beta^2 f\,,\ x+\beta\gamma f\\ y+\alpha\gamma f\,,\ x+\beta\gamma f\,,\ \gamma^2 f\end{vmatrix}=\alpha^2\beta^2\gamma^2 f^3-\alpha^2 f(x+\beta\gamma f)^2-\gamma^2 f(z+\alpha\beta f)^2-$$
$$-\beta^2 f(y+\alpha\gamma f)^2+2(x+\beta\gamma f)(y+\alpha\gamma f)(z+\alpha\beta f)=0,$$

che mediante l' equazione della curva si riduce a

$$(2)\quad (\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha\beta xy-\beta\gamma yz-\gamma\alpha zx)f=0\ ,$$

e siccome l' Hessiano del fattore di secondo grado è identicamente nullo, così (§ 148, 192) il luogo (2) è costituito dalla retta reale $f=\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ e da due rette immaginarie. Combinando insieme le due equazioni (1) (2) si forma anche la

$$(3)\quad (f+l\alpha x)\,(f+l\beta y)\,(f+l\gamma z)=0\ ,$$

purchè la l soddisfaccia all' equazione

$$(4)\quad l^3=\frac{h}{3}(l^2+3l+3)\quad ,\quad \text{posto}\quad \alpha\beta\gamma h=6\ ;$$

dunque: *Il luogo dei flessi di una qualsivoglia tritoma* (1) *può ridursi o al sistema* (2) *di una retta reale e due immaginarie o al sistema* (3) *di tre rette reali.*

194. La precedente equazione (§ 193) non potrebbe servire nè per le

tritome con un solo flesso, nè per quelle le cui tangenti dei flessi sono congruenti; prendiamo invece l' equazione

$$(5) \quad x^3+2nx^2z+xz^2-y^2z=0 \quad ,$$

il suo Hessiano è

$$H=\begin{vmatrix} 3x+2nz & , & 0 & , & 2nx+z \\ 0 & , & -z & , & -y \\ 2nx+z & , & -y & , & x \end{vmatrix} = -3x^2z-2nxz^2-3xy^2- \\ -2ny^2z+4n^2x^2z+4nxz^2+ \\ +z^3=0$$

dalla (5) moltiplicata per $(3+2gn)$ sottraendo la $gH=0$ si ottiene

$$(6) \quad 3(gx-z)y^2+(3+2gn)x^3+3(g+2n)x^2z+3xz^2-gz^3=0$$

ed acciocchè questa sia divisibile per $gx-z$ si dovrà determinare g in guisa che

$$(7) \quad g^4-6g^2-8ng-3=0 \quad .$$

Questa equazione è sempre soddisfatta da due soli valori reali, uno positivo g ed uno negativo g' . La (6) divisa per $gx-z$ dà

$$(8) \quad 3y^2+\frac{1}{4g}(g^2-3)^2x^2+(g^2-3)xz+gz^2=0$$

decomponibile in due fattori lineari, reali od immaginarii secondo che g è negativa o positiva ; da ciò viene la stessa conclusione notata al § 193. La tangente di un flesso è la $z=0$; gli altri due sono

$$(\pm 2\sqrt{g} \; , \; g^2-1 \; , \; \pm 2g\sqrt{g})$$

ed hanno le prime-polari-ditome (§ 78)

$$(g^2-3)^2x^2-4gy^2+(2g^3-4g-\frac{6}{g})xz+4z^2\mp\frac{4}{\sqrt{g}}(g^2-1)yz=0$$

che si decompongono nelle tangenti

$$[g^3-3g \; , \; \mp 2g\sqrt{g} \; , \; 2]$$

e nelle prime-polari-rettilinee

$$[g^2-3 \; , \; \pm 2\sqrt{g} \; , \; 2g] \; ,$$

le quali s' incontrano nel punto J

$$(2g \; , \; 0 \; , \; 3-g^2) \; .$$

Mediante il prodotto delle equazioni delle tangenti dei flessi alla (5) potremo dare (§ 166) la forma

(9) $z\{(g^3-3g)x-2g\sqrt{g}y+2z\}\{(g^3-3g)x+2g\sqrt{g}y+2z\}+4(gx-z)^3=0$,

che è analoga alla

$$(1) \quad 6x'y'z'+(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')^3=0 \ .$$

Per passare dalla (9) alla (1) si suppone

$$x.\,A+y.\,B+z.\,C\simeq x'.\,A'+y'.\,B'+z'.\,C'$$

essendo

$$A\simeq\frac{A'+B'}{2}+\frac{1}{4\sqrt{g}}(g^2-3)(A'-B')$$

$$B\simeq\frac{A'+B'}{2}+\frac{\sqrt{g}}{g^2-3}(A'-B')$$

$$C\simeq C'+\frac{1}{g^3-3g}(A'+B'-2C')+\frac{1}{2g\sqrt{g}}(A'-B') \ .$$

Se conserviamo i valori alle coordinate baricentriche, e mutiamo il triangolo coordinato otteniamo tutte le tritome di una stessa *specie*, cioè tra loro *affini*; che se, secondo i principii del calcolo baricentrico abbreviato (§ 128), mutiamo in dati rapporti le coordinate, si ottengono tutte le tritome tra loro collineari, cioè tutto un *genere* di curve. Mutando le x' y' z' della precedente (1) nelle $\frac{x''}{\alpha}$ $\frac{y''}{\beta}$ $\frac{z''}{\gamma}$ e ponendo $\frac{6}{\alpha\beta\gamma}.=h$ la (1) diventa

$$(10) \quad hx''y''z''+(x''+y''+z'')^3=0 \ ,$$

e rappresenta quella specie dei varii generi di tritome, che ha i flessi a distanza infinita: a tale specie do il nome di *tricratere*, perchè la parte visibile della curva è formata di tre tratti *puri* (cioè senza alcuna singolarità) rassomiglianti ai due tratti di un' iperbola. Fatti i calcoli si trova

$$(11) \quad h=\frac{(3-g^2)^3}{g^2-1} \ .$$

195. I varii generi di tritome sono distinti dall' uno o dall' altro dei parametri n g g' h l: nelle tritome-tetrattomene *annodate* (cioè con un punto doppio) si ha

$$n=-1 \ , \ g=1 \ , \ g'=-3 \ , \ h=\infty \ , \ l=\infty \ ;$$

— vengono poi le tritome-esattomene, le cui specie dette tricrateri hanno i tre tratti situati negli spazii infiniti compresi tra un lato del triangolo degli asintoti

e le prolungazioni degli altri due; — il genere delle tangenti dei flessi concorrenti in un punto è individuato da

$$n=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad g=\sqrt{3} \quad , \quad g'=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-1} \quad , \quad h=0 \quad , \quad l=0 \; ;$$

— seguono le tritome, i cui tricrateri hanno i tratti situati negli spazii tra le prolungazioni di ciascun ambo di lati del triangolo degli asintoti; — susseguono le tritome-tetrattomene *puntate* (cioè con un punto isolato) distinte da

$$n=1 \quad , \quad g=3 \quad , \quad g'=-1 \quad , \quad h=-27 \quad , \quad l=-3 \; ;$$

— finalmente si hanno le tritome-esattomene composte di due pezzi separati (i corrispondenti tricrateri hanno un tratto puro rientrante posto dentro del triangolo degli asintoti) per esse è

$$n>1 \quad , \quad g>3 \quad , \quad g'<-1 \quad , \quad h<-27 \quad , \quad l<-3 \; .$$

196. *Doppii-rapporti relativi alle tritome;* alcuni hanno un valor determinato, altri dipendono dal numero generico g (di cui g' , n , h , l sono funzioni), che distingue ciascuna tritoma. La prima-polare-rettilinea di un flesso S taglia in F la retta f dei tre flessi reali, passa per l' *apice* A degli altri due flessi reali S′ S″ (cioè pel punto d' intersezione delle loro tangenti), taglia in D la tangente BC del flesso S , concorre in J colle altre due prime-polari-rettilinee dei flessi S′ S″ , finalmente taglia la curva nel *vertice* V , la cui tangente passa pel flesso S . Rispetto alla (5) (§ 194) si trova (Mia *Classificazione delle curve del* 3.° *ordine*, *Mem. Soc. Ital.* XXV, 2.ª, 1851).

$$\mathrm{VD}=\infty \; , \; \mathrm{VF}=\frac{1}{g} \; , \; \mathrm{VA}=\frac{2}{3g-g^3} \; , \; \mathrm{VJ}=\frac{2g}{3-g^2}$$

(quando la retta JADF incontra la curva in tre punti si scelga per V quello che dà $g>1$) quindi si hanno i doppii-rapporti

$$\frac{\mathrm{JA.FD}}{\mathrm{JD.FA}}=-2 \quad , \quad \frac{\mathrm{JV.AD}}{\mathrm{JD.AV}}=g^2 \quad .$$

Se nell'equazione (6) mutiamo la g nella g' radice negativa della (7), essa rappresenta la retta $g'x-z=0$ e le due rette reali date dalla

$$(8') \quad \pm\sqrt{3}.y+\sqrt{-g'}.z+\frac{1}{2\sqrt{-g'}}(g'^3-3)\,x=0 \quad .$$

La prima di queste tre rette passa pel flesso S e pei due flessi immaginarii

$\mathfrak{S}$ $\mathfrak{S}_0$, essa incontra la predetta retta JADFV nel punto $\mathfrak{F}$ dato da $V\mathfrak{F} = \frac{1}{g'}$, quindi

$$\frac{DF.V\mathfrak{F}}{D\mathfrak{F}.VF} = \frac{g}{g'} \quad .$$

Le tangenti immaginarie nei flessi $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{S}_0$ si tagliano nel punto reale $\mathfrak{A}$, che si trova determinato analogamente ad A da

$$V\mathfrak{A} = \frac{2}{3g' - g'^3} \quad ;$$

quindi si ha

$$\frac{V\mathfrak{F}.D\mathfrak{A}}{V\mathfrak{A}.D\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}(3 - g'^2)$$

analogo a $$\frac{VF.DA}{VA.DF} = \frac{1}{2}(3 - g^2) \quad .$$

Una delle rette (8′) passa pel flesso reale S′ e pei due immaginarii $\mathfrak{S}'$ $\mathfrak{S}_0'$, l' altra pei tre flessi S″ $\mathfrak{S}''$ $\mathfrak{S}_0''$. È cosa degna d' osservazione che queste rette contenenti due flessi immaginarii conservano la medesima loro proprietà caratteristica anche nella collineazione. — Sostituendo nella (6) le due radici immaginarie della (7) si hanno sei rette immaginarie, che possono considerarsi come contenenti ciascuna tre flessi $S\mathfrak{S}'\mathfrak{S}_0''$ $S'\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}''$ $S''\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}$ $S\mathfrak{S}''\mathfrak{S}_0'$ $S'\mathfrak{S}_0''\mathfrak{S}$ $S''\mathfrak{S}'\mathfrak{S}_0$; finalmente la (8), quando g ha il valore reale positivo, esprime due rette immaginarie $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''$ $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}_0''$ contenenti ciascuna tre flessi immaginarii.

197. Quando l' equazione della tritoma ha la forma (§ 193)

$$(1) \quad hxyz + f^3 = 0 \quad , \quad \text{essendo} \quad f = x + y + z \quad ,$$

abbiamo veduto che il luogo dei flessi è

$$(3) \quad (f + lx)(f + ly)(f + lz) = 0 \quad ,$$

essendo $$(4) \quad l^3 - \frac{h}{3}(l^2 + 3l + 3) = 0 \quad .$$

I tre asintoti, cioè le tangenti dei flessi, sono i lati del triangolo coordinato, perciò A è (1, 0, 0) , D (0, 1, 1) e i tre *diametri* (prime-polari-rettilinee dei flessi) si tagliano nel punto J (1, 1, 1) ; il doppio-rapporto

$$\frac{JV.AD}{JD.AV} = g^2 \quad \text{dà} \quad AV = \frac{3.JA}{g^2 - 3} = \frac{2.AD}{g^2 - 3} \quad ,$$

perciò il *vertice* appartenente al diametro JA è $(1-g^2, 1, 1)$ che sostituito nella (1) dà

$$(11) \quad h = \frac{(3-g^2)^3}{g^2-1} ,$$

come abbiamo già trovato al § 194. La retta

$$f + lx = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad [1+l, 1, 1]$$

oltre passare pel flesso reale $(0, 1, -1)$ è corda-ideale di due flessi immaginarii; essa taglia il diametro JA nel punto

$$\mathfrak{F} \quad (-2, 1+l, 1+l) \quad ,$$

e si ha il doppio-rapporto

$$\frac{DF.V\mathfrak{F}}{D\mathfrak{F}.VF} = \frac{(1-g^2)l}{3-g^2} = \frac{g}{g'}$$

essendo g' la radice negativa della

$$g'^3 + gg'^2 + (g^2-6)g' + \frac{3}{g} = 0 \quad .$$

198. Relativamente ai punti singolari, al loro numero, ecc. possono consultarsi: Poncelet, *J. Crelle*, 1832, VIII, p. 250, 370, 401. — Plücker, *J. Crelle*, 1833, XII, p. 105. — *J. Liouv.* 1837, II, p. 11. Ogni $n.^{\text{toma}}$ $m.^{\text{attomena}}$ ha tra reali ed immaginarii s flessi, r regressi, p punti doppii, t tangenti doppie, ed ha luogo la relazione $3s + 2t = m(m-1) - n$, e la sua correlativa $3r + 2p = n(n-1) - m$, inoltre $r - s = 3(n-m)$, ed altra relazione molto più complicata, *Theorie der algebr. Curv.* 1839, pag. 211, ij, § 68. — Coste, *J. Liouv.* 1842, VII, p. 184 mostra con un esempio che le precedenti relazioni non possono estendersi ai sistemi di due curve distinte. — Hesse, *J. Crelle*, 1844, XXVIII, p. 97. — Liouville, *Journ.* 1844, IX, p. 337. — Cayley, *J. Crelle*, 1847, XXXIV. — Hesse, *ivi*, p. 209. — Plücker, *ivi*, p. 329. — Hesse, *J. Crelle*, 1849, XXXVIII, p. 257; 1850, XLI, p. 272; 1851, XLI, p. 288. — Salmon, *J. Crelle*, 1850, XXXIX, p. 365. — Jacobi, *J. Crelle*, 1850, XL, p. 237; *Ann. Tortol.* 1851, II, p. 235; *N. Ann. Terq.* XII, p. 141. — Choquet, *N. Ann. Terq.* 1850, IX, p. 260. — Terquem, *N. Ann.* 1850, IX, p. 282, 382. — Transon, *N. Ann. Terq.* 1851, X, p. 91. — Padula e Rubini, *Ann. Tortol.* 1851, II, p. 463, 1852, III, p. 211. — Hesse, *J. Crelle*, 1853, XLV, p. 93. — Steiner, *J. Crelle*, 1853, XLVII, p. 1; *J. Liouv.* 1853, XVIII, p. 309, *Comptes R.* Juill. 1853, XXXVIII,

p. 121 ; *J. Crelle*, 1854, IL, p. 265; *J. Liouv.* 1855, XX, p. 36. — Hesse, *J. Crelle*, 1854, IL, p. 279, 1856; LII, p. 97. — Bréton, *N. A. Terq.* 1854, XIII, p. 127.

199. *Interpretazione dei flessi immaginarii.* Chi voglia ragionare soltanto sopra oggetti, di cui sia possibile formarsi una idea, non può ammettere punti immaginarii, e dee riguardare le precedenti considerazioni soltanto come risultamenti di calcolo, che rendono probabile che le secanti ideali e gli apici ideali sieno rette e punti, a cui spettino proprietà in qualche modo analoghe alle corde, che congiungono due punti della curva, ed ai punti, dai quali sono condotte due tangenti. Vediamo qual senso possa darsi mediante il metodo delle equipollenze ai flessi immaginarii delle curve. Possiamo supporre che sopra due rette CA OB (poste, per esempio, in piani differenti) sieno prese partendo dai due punti di origine C O delle lunghezze uguali rispettivamente alle x y legate tra di loro da un' equazione; sicchè ad ogni punto di una delle rette corrisponderanno uno o più punti dell' altra : ora se la x assuma un valore immaginario, essa non rappresenterà più un punto della retta CA, bensì (§§ 35, 170) un punto del piano in cui questa è situata ; il corrispondente valore della y darà un corrispondente punto del piano, in cui è situata la OB ; così la relazione tra le x y stabilisce una derivazione tra le due figure piane CA.... , OB.... Ne sono casi particolari la *duplicazione* e le altre derivazioni accennate ai §§ 56, 61. Quantunque la x sia immaginaria, la y (data col mezzo di una ordinaria equazione tra x ed y) è *funzione* della x in questo senso che a qualsiasi variazione infinitesima della x corrispondono determinati valori della y e delle derivate $D_x y$, $D_x^2 y$, ecc. La questione della ricerca dei flessi di una curva si generalizza adunque ricercando nelle due figure piane CA.... , OB.... i punti pei quali sia $D_x^2 y = 0$: cioè i punti, nei quali a qualsiasi retta di una figura corrisponda nell' altra una trajettoria di curvatura nulla. Se l' equazione tra x ed y sia del terzo grado ed a coefficienti reali, tra i nove punti, che rispondono alla questione, ve ne sono tre sulla retta CA mentre i loro corrispondenti sono sulla retta OB , cioè tanto le x quanto le y hanno valori reali, inoltre i tre valori della x ed i tre della y sono tra loro legati da una equazione del primo grado, il che porta la conseguenza che i tre flessi reali di una tritoma sono in linea retta. Tra i valori poi delle x y corrispondenti ai nove punti esistono altre undici relazioni di primo grado; noi abbiamo con-

siderate (§ 196) soltanto le tre relazioni tra uno dei tre punti sulla CA ed un pajo di punti fuori di quella retta, le quali, nel caso della tritoma, vengono a dare tre rette reali che passano per uno dei flessi reali e sono secanti-ideali di un pajo di flessi immaginarii.

V.

COORDINATE INTORNO AD UN PUNTO OSSIA SULLA SFERA.

200. Le figure piane hanno sotto il riguardo della dualità per loro analoghe le figure formate intorno ad un punto. Cioè ai punti, alle rette, ed alle curve tracciate sopra un solo piano corrispondono rispettivamente le rette, i piani, ed i coni aventi uno stesso punto comune: se questo sia il centro di una sfera, sulla sua superficie verranno ad aversi altrettanti punti, archi di circolo massimo, e curve. È quindi in nostro arbitrio considerare la figura intorno ad un punto o la figura sulla sfera; credo peraltro che i migliori motivi dieno la preferenza al primo modo.

201. *Calcolo baricentrale.* Come la posizione di un punto posto su un piano si riferisce col calcolo baricentrico (§ 92) a tre suoi punti, così la posizione di una retta, che passa pel punto fisso S, può riferirsi a tre rette SA SB SC mediante il calcolo *baricentrale* già spiegato al § 95; sicchè ritenuto che le tre rette SA SB SC sieno tutte eguali all' unità di lunghezza (cioè che A B C sieno sulla superficie della predetta (§ 200) sfera) l' equipollenza

$$(1)\quad SM \simeq x.SA + y.SB + z.SC$$

indicherà mediante i rapporti delle tre coordinate x y z la posizione della retta SM, che è la diagonale di un parallelogrammo, i cui lati paralleli alle SA SB SC hanno le lunghezze x y z. La retta SM noi la indicheremo con $(2)\quad [x, y, z]$

avvertendo che, al solito, ciò che determina la retta non sono le grandezze assolute, bensì i rapporti tra le coordinate baricentrali x y z.

202. Se SP_1 sia l' intersezione dei piani SAM SBC, SQ_1 quella dei SBM SCA, ed SR_1 dei SCM SAB, sarà

$$(3)\quad SP_1 \simeq y.SB + z.SC\ ,\ SQ_1 \simeq z.SC + x.SA\ ,\ SR_1 \simeq x.SA + y.SB$$

che possiamo anche scrivere $\mathbf{p}_1 \simeq Y.\mathbf{b} + Z.\mathbf{c}$, ecc. indicando al solito le rette colle lettere rotonde minuscole. La prima delle (3) significa che la direzione della SP_1 è la diagonale del parallelogrammo coi lati Y Z posti sulle SB SC , perlochè le Y Z sono proporzionali ai seni degli angoli BSP_1 P_1SC , ossia, sulla superficie della sfera ai seni degli archi BP_1 P_1C . Si abbiano in considerazione la rassomiglianza e la differenza tra questo § ed il § 93.

203. Se i valori delle coordinate X Y Z rimangono arbitrarii, ma sottoposti ad un' equazione omogenea, la (1) esprimerà un luogo di rette, ossia un cono col vertice S . In particolare l' equazione

$$(C) \quad \xi X + \upsilon Y + \zeta Z = 0$$

appartiene ad un piano, che è determinato mediante i rapporti delle ξ υ ζ , e che noi indicheremo con

$$(4) \quad \{\xi, \upsilon, \zeta\} \ .$$

Si confronti col § 94.

204. *Calcolo baricentrano.* Analogamente al calcolo baricentrale (§ 95) se con α β ecc. s' indichino dei piani posti comunque nello spazio, il piano dato dall' espressione baricentrana

$$\mu \simeq f.\alpha + g.\beta + h.\gamma + \text{ecc.}$$

si determinerà nel seguente modo: per l' intersezione dei piani α β si faccia passare un piano, che noi esprimeremo con $f.\alpha + g.\beta$, il quale sia perpendicolare alla diagonale d' un parallelogrammo avente due lati perpendicolari ai piani α β e delle lunghezze f g ; a questo piano $f.\alpha + g.\beta$ si attribuisca un coefficiente p , che sia la lunghezza della diagonale del predetto parallelogrammo; poscia per l' intersezione di tal piano $f.\alpha + g.\beta$ col terzo γ si faccia passare un piano $f.\alpha + g.\beta + h.\gamma$, che sia perpendicolare alla diagonale di un parallelogrammo avente due lati perpendicolari ai piani $f.\alpha + g.\beta$ γ e delle lunghezze p h ; e così si continui per tutti gli altri piani che vi fossero. Il lettore avrà già capito che le lettere α β.... deggiono indicare una faccia speciale di ciascun piano, la faccia opposta sarebbe indicata con $-\alpha$, ecc. — Nel calcolo abbreviato (§ 128) che si adopera quando si hanno da trattare questioni projettive, i coefficienti numerici f g ... possono supporsi compenetrati nelle lettere α β ... , che indicano

i piani; tranne questo caso, noi supporremo che α β .... esprimano aree tutte tra loro eguali.

205. *Coordinate baricentrali e baricentrane.* Chiamiamo triedro coordinato quello delle tre rette SA SB SC, a cui vogliamo riferire una figura passante per S, e segniamo con **a** **b** **c** tre porzioni eguali di quelle rette e con α β γ tre aree uguali prese sulle facce interne del triedro stesso; una retta **m** sarà data dall' espressione baricentrale

$$(1) \quad \mathbf{m} \simeq X.\mathbf{a} + Y.\mathbf{b} + Z.\mathbf{c} \ ,$$

ed un piano μ dall' espressione baricentrana

$$(2) \quad \mu. \simeq \xi \operatorname{sen} \mathrm{BSC}.\alpha + \upsilon \operatorname{sen} \mathrm{CSA}.\beta + \zeta \operatorname{sen} \mathrm{ASB}.\gamma \ .$$

Sulla superficie della sfera sono A B C i vertici di un triangolo sferico, che diremo il coordinato, α β γ sono le direzioni dei lati BC CA AB, i cui seni sono, come è noto, proporzionali ai seni degli angoli opposti. Il piano μ taglierà i piani coordinati BSC CSA ASB nelle rette **p** **q** **r**, le quali unite cogli spigoli opposti **a** **b** **c** formano tre piani, che segneremo con **(ap)** **(bq)** **(cr)**, e sono dati dalle

$$(3) \quad (\mathbf{ap}) \simeq \upsilon \operatorname{sen} \mathrm{CSA}.\beta + \zeta \operatorname{sen} \mathrm{ASB}.\gamma \ , \quad (\mathbf{bq}) \simeq \zeta \operatorname{sen} \mathrm{ASB}.\gamma + \xi \operatorname{sen} \mathrm{BSC}.\alpha \ , \text{ ecc.}$$

queste sono conformi al modo con cui abbiamo detto (§ 204) che si compongono insieme i due piani β γ muniti dei coefficienti numerici $\upsilon \operatorname{sen} \mathrm{CSA}$ $\zeta \operatorname{sen} \mathrm{ASB}$, ed il piano cercato μ dee passare per l' intersezione **p** di questo piano composto **(ap)** coll' altro piano α. Veggasi l'analogo § 96.

206. Per dimostrare che la condizione di congruenza della retta **m** e del piano μ espressi dalle (1) (2) è la solita

$$(C) \quad \xi X + \upsilon Y + \zeta Z = 0$$

osserveremo da prima che sulla superficie della sfera l' arco AP divide l'angolo sferico CAB in due porzioni, i cui seni sono proporzionali a $\upsilon \operatorname{sen} \mathrm{ASC}$, $-\zeta \operatorname{sen} \mathrm{ASB}$, e siccome i due angoli APB APC hanno segni eguali, così (per la proporzionalità dei seni dei lati e degli angoli opposti) gli archi BP CP avranno i seni proporzionali a υ , $-\zeta$, e quindi sarà

$$(3) \quad \mathbf{p} \simeq \upsilon.\mathbf{c} - \zeta.\mathbf{b} \ , \quad \mathbf{q} \simeq \zeta.\mathbf{a} - \xi.\mathbf{c} \ , \quad \mathbf{r} \simeq \xi.\mathbf{b} - \upsilon.\mathbf{a} \ .$$

Ora la condizione che la **m** appartenga al piano μ, cioè a quello delle due rette **p** **q** è espressa (§ 201) da $\mathbf{m} \simeq f.\mathbf{p} + g.\mathbf{q}$ e deve risultarne $\mathbf{m} \simeq Y.\mathbf{b} + X.\mathbf{a} + Z.\mathbf{c}$, dunque $-\frac{Y}{\zeta}\upsilon - \frac{X}{\zeta}\xi = Z$, che è appunto la (*C*).

— Questa (C) può considerarsi (Vegg. § 98) tanto come l'equazione baricentrale del piano $\{\xi, \upsilon, \zeta\}$ quanto come l'equazione baricentrana della retta $[X, Y, Z]$, perchè tutti i piani le cui coordinate $\xi \ \upsilon \ \xi$ soddisfanno alla (C) passano per la retta $[X, Y, Z]$. — Per tal modo le condizioni di congruenza fra una retta ed un piano, o fra tre rette, o fra tre piani, sono identiche a quelle (§ 67, 69) che nelle figure sopra un piano stabiliscono la congruenza fra un punto ed una retta, o fra tre punti, o fra tre rette.

207. *Coordinate ortogonali.* Quando il triangolo coordinato CAB (sulla superficie della sfera) è trirettangolo, i rapporti $X:Z \ \ Y:Z$ eguagliano le tangenti degli archi $CQ_1 \ \ CP_1$ (§ 202) che gli archi BM AM intercettano sui lati CA CB del triangolo sferico; esse tangenti furono considerate come le coordinate sferiche del punto M, ma è cosa più semplice attenersi alle coordinate Cartesiane $X \ Y \ Z$, i cui rapporti determinano ciascuna retta passante pel centro S.

208. *Inclinazioni.* Nel caso delle coordinate ortogonali sono facilmente esprimibili le distanze angolari tra le rette ed i piani. Il seno dell'inclinazione tra la retta $[X, Y, Z]$ ed il piano $\{\xi, \upsilon, \zeta\}$ è

$$(X\xi + Y\upsilon + Z\zeta) : \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)(\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2)} \ ,$$

formula che diviene analoga a quella del § 100 quando si supponga che le $X \ Y \ Z \ \xi \ \upsilon \ \zeta$ sieno i coseni degli angoli della retta cogli assi coordinati e del piano coi piani coordinati; in questa medesima supposizione

$$XX' + YY' + ZZ' \ , \ \xi\xi' + \upsilon\upsilon' + \zeta\zeta'$$

sono i coseni delle inclinazioni di due rette o di due piani. — Risulta dalla prima formula che la retta $[f, g, h]$ ed il piano $\{f, g, h\}$ sono tra loro perpendicolari.

209. *Involuzione positiva nel triedro.* Facciamo qualche applicazione. In qual modo un arco di circolo massimo PQR taglia il triangolo sferico ABC ? Prendiamo il triedro SABC come triedro coordinato, e sia $\{\xi, \upsilon, \zeta\}$ il piano, che taglia le facce del triedro nelle rette SP SQ SR, le (3) del § 206 danno, indicando con **a b c p q r** i raggi della sfera, che terminano nei punti A, ecc.

$$\upsilon \operatorname{sen}(\mathbf{cp}) = \zeta \operatorname{sen}(\mathbf{bp}) \ , \ \zeta \operatorname{sen}(\mathbf{aq}) = \xi \operatorname{sen}(\mathbf{cq}) \ , \ \xi \operatorname{sen}(\mathbf{br}) = \upsilon \operatorname{sen}(\mathbf{ar})$$

da cui risulta l'involuzione positiva

$$\frac{\text{sen}\,(\mathbf{ar}).\,\text{sen}\,(\mathbf{bp}).\,\text{sen}\,(\mathbf{cq})}{\text{sen}\,(\mathbf{aq}).\,\text{sen}\,(\mathbf{cp}).\,\text{sen}\,(\mathbf{br})} = 1 \quad .$$

Col solo mutare le coordinate baricentrane $\xi \quad \upsilon \quad \zeta$ di un piano nelle baricentrali $X \quad Y \quad Z$ di una retta qualsivoglia, e gli assi $\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}$ del triedro coordinato nelle sue facce $\alpha \quad \beta \quad \gamma$, si dimostra l' involuzione positiva tra i piani del triedro e quelli, che dai suoi spigoli vanno alla retta $[X, Y, Z]$.

210. *Teorema del Gudermann* (*J. Crelle*, 1832, IX, p. 102). Sul piano $\{\xi, \upsilon, \zeta\}$, che taglia le facce $\alpha \quad \beta$ del triedro coordinato nelle rette $\mathbf{p}$ $\mathbf{q}$, siavi la retta $\mathbf{m} \quad [X, Y, Z]$, ed il piano $\mathbf{cm}$ tagli la faccia γ nella retta $\mathbf{r}_1$. Per le (3) dei §§ 206, 202 abbiamo

$$\mathbf{p} \simeq \upsilon.\,\mathbf{c} - \zeta.\,\mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{q} \simeq \zeta.\,\mathbf{a} - \xi.\,\mathbf{c}$$

ed $\mathbf{r}_1 \simeq X.\,\mathbf{a} + Y.\,\mathbf{b}$, $\mathbf{m} \simeq X.\,\mathbf{a} + Y.\,\mathbf{b} + Z.\,\mathbf{c}$, $\mathbf{m} \simeq R_1.\,\mathbf{r}_1 + Z.\,\mathbf{c}$ oltre la solita condizione di congruenza

$$(C) \quad X\xi + Y\upsilon + Z\zeta = 0 \ ;$$

le prime danno

$$\upsilon : \zeta = \text{sen}\,(\mathbf{bp}) : \text{sen}\,(\mathbf{cp}) \quad , \quad \xi : \zeta = \text{sen}\,(\mathbf{aq}) : \text{sen}\,(\mathbf{cq})$$

$X = \text{sen}\,(\mathbf{r}_1\mathbf{b}) : \text{sen}\,(\mathbf{ab})$, $Y = \text{sen}\,(\mathbf{ar}_1) : \text{sen}(\mathbf{ab})$, $Z = -\text{sen}(\mathbf{r}_1\mathbf{m}) : \text{sen}\,(\mathbf{cm})$ sostituendo nella (C) si ottiene il teorema

$$\frac{\text{sen}\,(\mathbf{aq})}{\text{sen}\,(\mathbf{cq})}\,\text{sen}\,(\mathbf{r}_1\mathbf{b}) + \frac{\text{sen}\,(\mathbf{bp})}{\text{sen}\,(\mathbf{cp})}\,\text{sen}\,(\mathbf{ar}_1) = \frac{\text{sen}\,(\mathbf{r}_1\mathbf{m})}{\text{sen}\,(\mathbf{cm})}\,\text{sen}\,(\mathbf{ab}) \quad .$$

211. I *Coni* considerati come *luoghi* di rette o come *inviluppi* di piani sono espressi da equazioni omogenee tra $X \quad Y \quad Z$ o tra $\xi \quad \upsilon \quad \zeta$; secondo i gradi di queste equazioni diremo che i coni sono *ditòmici, tritòmici*, ecc. oppure *diattomènici, triattomènici*, ecc., il che indica che un piano (s' intenda sempre passante per S) taglierà il cono in due, tre, ecc. rette, oppure che per una retta possono condursi due, tre, ecc. piani tangenziali. — Rispetto a quelle equazioni ed alla determinazione del piano tangenziale o della retta di contatto, del piano polare o della retta polica, dei coni polari o dei coni polichi ecc. valgono regole identiche a quelle date nei §§ 63, 74, 64, 75, 78, 87 per le tangenti o pei punti di contatto, per la retta polare o pel polo, per le polari o per le poliche.

212. I *coni ditomici* (che sono nello stesso tempo diattomenici) possono

sempre esprimersi coll' equazione a coordinate baricentrali (ossia Cartesiane) ortogonali

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad .$$

Sulla sfera del centro S il cono-ditomico traccia due ovali diametralmente opposte, che si dissero ellissi sferiche; noi ne riguarderemo una sola, quella che ha per centro l' estremo C dell' asse coordinato SC ; peraltro anche i raggi SA SB sono centrali ossia assi del cono, giacchè ogni piano passante per uno di essi e terminato col cono rimane dimezzato dall' asse. Chiamiamo D D_1 i punti dove la predetta ellisse-sferica è tagliata dal quadrante CA e dalla sua prolungazione, ed E E_1 i punti d'intersezione con CB , sarà

$$\operatorname{tg} \mathrm{CSD}=\frac{a}{c} \quad , \quad \operatorname{tg} \mathrm{CSE}=\frac{b}{c} \quad .$$

Ciaschedun tangenziale del cono è (§ 211)

$$\left\{\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -\frac{z}{c^2}\right\}=\{\xi, \upsilon, \zeta\}$$

perciò il cono (1) ha anche l' equazione baricentrana

$$(2) \qquad a^2\xi^2+b^2\upsilon^2=c^2\zeta^2 \quad .$$

213. Tutti i coni ditomici sono di un solo *genere,* cioè sono tra loro collineari (projettivi, omografici); meritano esser distinte alcune particolari specie, che in mancanza di nomi appositi noteremo coi numeri. Diremo coni di 1.ª specie i coni rotondi, che hanno l' equazione

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}z^2 \quad , \quad \text{cioè} \quad a^2=b^2 \quad ,$$

le loro sezioni circolari si riducono ad una sola perpendicolare all' asse SC . — Coni ditomici di 2.ª specie

$$\frac{c^2}{a^2}x^2+y^2=z^2 \quad , \quad \text{cioè} \quad b^2=c^2$$

le sezioni perpendicolari all' asse SA sono iperbole equilatere; per lo che il Roberts diede il nome d' *iperbola equilatera sferica di* 2.ª *specie* alla corrispondente curva tracciata nella sfera, nella quale è $\mathrm{CSE}=45.^{0}$, cioè l'arco E_1CE è un quadrante. — Coni ditomici di 3.ª specie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2 \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{c^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$$

la sezione fatta dalla sfera di centro S fu detta dal Roberts *iperbola-equilatera* di 1.ª specie, in essa si ha

$$\text{tg CSE} = \text{sen CSD} \quad ;$$

questi coni sono i luoghi geometrici degli spigoli dei diedri retti le cui facce passano per le due rette fisse SE SE_1, cioè $[0, \pm b, c]$: infatti i piani che uniscono queste due rette con $[X, Y, Z]$ sono

$$\{cY \mp, bZ - cX, \pm bX\} \quad ,$$

e la condizione che sieno perpendicolari è (§ 208)

$$c^2 Y^2 - b^2 Z^2 + c^2 X^2 - b^2 X^2 = 0 \quad .$$

— Coni ditomici di 4.ª specie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{a^2 - b^2} \quad , \quad \text{cioè} \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad ;$$

sono gli inviluppi dei piani $\{\xi, \upsilon, \zeta\}$ degli angoli retti, i cui lati cadono sui piani tangenziali lungo gli spigoli SD SD_1 ; infatti questi tangenziali sono $\{\pm c, 0, a\}$ e le loro intersezioni $[a\upsilon, -a\xi \pm c\zeta, \mp c\upsilon]$ con quel piano sono perpendicolari quando $a^2\upsilon^2 + a^2\xi^2 - c^2\zeta^2 - c^2\upsilon^2 = 0$, cioè $a^2\xi^2 + (a^2 - c^2)\upsilon^2 = c^2\zeta^2$. — Coni ditomici di 5.ª specie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) z^2 \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad .$$

— Coni ditomici di 6.ª specie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{a^2 + b^2} \quad , \quad \text{cioè} \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad .$$

214. Si può passare da una figura piana ad una figura intorno ad un punto in due modi, o supponendo che l'una sia prospettiva all'altra, cioè i punti, le rette e le curve della prima sieno situate nelle rette, nei piani e nei coni della seconda: oppure col mezzo della derivazione-polare rispetto ad una sfera, ad ogni punto della prima figura essendo *correlativo* un piano della seconda, che rispetto alla sfera è il polare (§ 259) del punto. Nel primo modo alle ditome, tritome, ecc. corrispondono i coni ditomici, tritomici, ecc.; e nel secondo vi corrispondono i coni diattomenici, triattomenici, ecc.

215. *Derivazione delle figure intorno ad un punto.* La collineazione *(homographie)* ha luogo in modo affatto analogo a quella sul piano. La reciprocità (§ 43) ossia derivazione-polare rispetto ad un circolo, trova per le figure intorno ad un punto il suo più naturale riscontro nella derivazione da una retta

al piano ad essa perpendicolare e viceversa; le due figure furono dette tra loro *polari*, ma, a motivo dell' uso di questa parola in altri significati, le diremo invece *supplementari*, giacchè gli angoli dell' una sono supplementi dei diedri dell' altra. La figura derivata-polare di un' altra rispetto ad un cono rotondo o no è sempre collineare della supplementare. — Il cono supplementare del

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad \text{è} \quad (3) \qquad a^2X^2+b^2Y^2=c^2Z^2 \quad ;$$

infatti i tangenziali del primo sono $\left\{\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{-z}{c^2}\right\}$ ai quali sono perpendicolari (§ 208) le rette $\left[\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{-z}{c^2}\right]$, che appartengono al cono (3). — Confrontando colla (2) (§ 211) si vede che mutando le coordinate baricentrali x y z nelle baricentrane ξ υ ζ o viceversa, si passa da un cono al suo supplementare. — I coni di 3.ª specie (§ 213) e quelli di 4.ª specie sono tra loro supplementari; dicasi lo stesso di quelli di 5.ª e di 6.ª specie.

216. L' *inversione* (§ 40) non può interamente trasportarsi alle figure intorno ad un punto; potremo dire che le rette SM SM′ sono *inverse* quando sono congruenti colla retta fissa SO (cioè SMM′O è un piano), e gli angoli MSO SOM′ sono tra loro complementari (quindi hanno le tangenti col prodotto costante 1) cioè l' angolo MSM′ è retto: così la SM′ è anche la projezione dell' asse d' inversione SO sul piano perpendicolare alla SM . Tagliando ambedue le figure con un piano perpendicolare ad SO si ottengono due figure tra loro inverse nel significato del § 40; ciò può servire a determinare intorno ad un punto S le figure tra loro inverse. Nel piano l' inversa di una retta è una linea circolare passante pel centro d' inversione O ; dunque intorno ad un punto il cono inverso di un piano passa per l'asse d' inversione SO , ed ha una sezione circolare perpendicolare alla SO ; vedremo (§ 222) che questi coni sono della 3.ª specie (§ 213).

217. Anche la *duplicazione* e la *sudduplicazione* può eseguirsi rispetto al punto O nella figura piana, che si ottiene tagliando la figura intorno al punto S con un piano perpendicolare ad SO ; in tal modo sarà

$$\operatorname{tg} \mathrm{OSM}^{(2)} = \operatorname{tg}^2 \mathrm{OSM}$$

ed i piani $\mathrm{OSM}^{(2)}$ OSM avranno su un piano fisso passante per SO inclinazioni la prima doppia della seconda. Se tutte le SM sono in un piano, nella sezione piana la duplicata di una retta è una parabola (§ 57) col foco nel

centro di derivazione O ; perciò il cono duplicato di un piano ha una sezione parabolica perpendicolare alla *focale* SO , che passa pel foco della parabola, esso è (§ 222) un cono di 4.ª specie. — La sudduplicata di una retta è un' iperbola equilatera col centro O (§ 57), perciò il cono sudduplicato di un piano ha le sezioni parallele a due dei suoi assi che sono iperbole equilatere, quindi esso è un cono di 2.ª specie. — Il Roberts considerò pure un' altra maniera di sudduplicazione. — Col mezzo di una derivazione analoga a quella che dicemmo (§ 42) *sviluppante-caustica*, e che consiste a sostituire ad ogni tangenziale l' immagine che dietro di esso, considerato come uno specchio piano, forma la retta fissa SO , il Roberts dedusse dai coni di 2.ª e di 3.ª specie rispetto ad un loro asse altri coni di ordine superiore, le cui tracce sulla sfera di centro S egli disse *sfero-lemniscate* di 2.ª e di 1.ª specie. Veggansi *J. Liouv. Déc.* 1845, X, p. 451, *N. Ann. Terq.* 1848, VII, p. 135, 240, 451. 1850, IX, p. 141, 309.

218. *Focali e piani ciclici.* In ogni cono ditomico vi sono due rette, che per avere proprietà analoghe ai fochi delle ditome si dicono *focali:* pel cono che ha le equazioni baricentrale e baricentrana

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad (2)\qquad a^2\xi^2+b^2\upsilon^2=c^2\zeta^2$$

le focali sono

$$(f)\qquad [\sqrt{(a^2-b^2)}\ ,\ 0\ ,\ \pm\sqrt{(b^2+c^2)}\ ]\ .$$

Sono pure osservabili i due piani

$$(c)\qquad \{0\ ,\ c\sqrt{(a^2-b^2)}\ ,\ \pm b\sqrt{(c^2+a^2)}\ \}$$

detti *ciclici*, perchè le sezioni del cono ad essi parallele sono circolari. — I piani ciclici del cono (3) $a^2x^2+b^2y^2=c^2z^2$ *supplementare* (§ 215) del precedente sono

$$(c^0)\qquad \{\sqrt{(a^2-b^2)}\ ,\ 0\ ,\ \pm\sqrt{(b^2+c^2)}\ \}$$

cioè perpendicolare (§ 208) alle focali (f) del cono (1). — Un piano parallelo ad uno di questi (c^0) taglia il cono (3) in un circolo ed il cono (1) in una ditoma *reciproca* del circolo, e che perciò (§ 173) ha un suo foco nel centro di reciprocità, che è la projezione sul piano del vertice S del cono, ossia l' intersezione del piano colla focale (f) ad esso perpendicolare; dunque: *Ogni piano perpendicolare ad una focale taglia il cono in una ditoma, che ha un foco nella focale stessa.*

219. È facile riconoscere che nei coni di 3.ª specie i piani ciclici sono perpendicolari a due generatrici del cono stesso; e che nei coni di 4.ª specie le focali sono perpendicolari a due tangenziali. — Le focali hanno rispetto al cono i piani polari

$$\{ c^2\sqrt{(a^2-b^2)} \ , \ 0 \ , \ \mp a^2\sqrt{(b^2+c^2)} \} \ ;$$

ed i piani ciclici hanno le poliche

$$[\ 0 \ , \ \mp b\sqrt{(a^2-b^2)} \ , \ c\sqrt{(a^2+c^2)} \ ] \ .$$

S' intende da sè che quelli e queste sono rispettivamente perpendicolari alle poliche dei poli ciclici del cono supplementare ed ai polari delle sue focali.

220. Intorno alle proprietà dei coni ditomici sono da consultarsi: Steiner, *J. Crelle*, 1827, II, p. 45; *Bull. Feruss. nov.* 1827, VIII, n.° 267. — Chasles, *Recherches de Géom. pure, Bruxell.* 1829; *Bull. Fér. janv.* 1830, n.° 8; *M. sur les propr. des cônes du 2.e degré, Mém. Acad. Bruxelles, VI* 1830; *Corr. Quet.* VI, *Bull. Fér., août* 1831, n.° 65. — Gudermann, *J. Crelle*, 1830, VI, p. 244; *Bull. Fér.* 1831, XV, p. 75; *J. Crelle.* 1831, VIII, p. 160, 1834, XIII, p. 262. — Chasles, *Mém. sur les coniques sphériques* 1835; *J. Liouv.* 1836, I, p. 234, 1838, III, p. 14, 102. — Terquem, *J. Liouv.* 1838, III, p. 99. — Borguet, *N. Ann. Terq.* 1848, VII, p. 147, 174. — Gudermann, *J. Crelle*, 1849, XXXIX, p. 42. — Tortolini, *Annali*, 1850, I, p. 471, 510. — Rubini, *Ann. Tortol., giugno* 1854, V, p. 216; *N. Ann. Terq.* 1855, XIV, p. 239.

221. *Cangiamento delle coordinate.* L' equipollenza

$$\mathrm{SM} \simeq x.\mathrm{SA} + y.\mathrm{SB} + z.\mathrm{SC} \simeq x'.\mathrm{SA}' + y'.\mathrm{SB}' + z'.\mathrm{SC}'$$

rende palese senza bisogno d' alcuna considerazione geometrica come si possano mutare gli assi coordinati SA SB SC . Considerando il caso che le rette SA SB SC sieno tra loro eguali ed ortogonali, e ad esse vogliansi sostituire SA′ SB′ SC′ esse pure uguali ed ortogonali; se

$$\mathrm{SA}' \simeq \alpha.\mathrm{SA} + \beta.\mathrm{SB} + \gamma.\mathrm{SC} \ ; \quad \mathrm{SB}' = \alpha_1.\mathrm{SA} + \beta_1.\mathrm{SB} + \gamma_1.\mathrm{SC} \ , \quad \text{ecc.}$$

sarà

$$x = \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \ , \quad y = \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \ , \quad z = \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z' \ ,$$

che sostituiremo nella data equazione baricentrale $F(x, y, z) = 0$ di un cono. — Se questa sia del 2.° grado, cioè

$$(1) \qquad \begin{aligned} & a x^2 + f x y + e x z \\ & + f x y + b y^2 + d y z \\ & + e x z + d y z + c z^2 = 0 \end{aligned}$$

e si voglia ridurla alla forma *canonica*

$$(2) \qquad AX'^2+A_1Y'^2+A_2Z'^2=0$$

si ha

$$a\alpha^2+2f\alpha\beta+2e\alpha\gamma+b\beta^2+2d\beta\gamma+c\gamma^2=A$$

e mediante le note relazioni

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \text{ , ec. , } \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1 \text{ , ec. ,}$$
$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0 \text{ , ec. , } \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0 \text{ , ec.}$$

si perviene alle tre equazioni

$$(3) \quad a\alpha+f\beta+e\gamma=\alpha A \text{ , } f\alpha+b\beta+d\gamma=\beta A \text{ , } e\alpha+d\beta+c\gamma=\gamma A \text{ ,}$$

le quali per poter sussistere insieme richieggono che si annulli il determinante

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a-A & , & f & , & e \\ f & , & b-A & , & d \\ e & , & d & , & c-A \end{vmatrix} = (a-A)(b-A)(c-A)-d^2(a-A)-e^2(b-A)- \\ -f^2(c-A)+2def=0 \text{ .}$$

Questa equazione ha sempre tre radici reali (*Spos. determ. Mem.* Vol. VII, § 44), che sono i valori di A A_1 A_2 ; trovata A due fra le (3) unite colla $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ servono a determinare α β γ ; similmente A_1 determina α_1 β_1 γ_1 , ed A_2 dà α_2 β_2 γ_2 .

222. Se l' equazione (4) ha una radice nulla, cioè se l' Hessiano è nullo, il cono si riduce a due piani reali od immaginarii. — Se le radici sono tutte tre di egual segno la superficie è immaginaria. — Se due radici sono eguali il cono è di 1.ª specie. — Se due radici hanno la somma nulla il cono è di 2.ª specie; ciò avviene quando il vertice del cono ha per proiezione sul piano d' una sezione parabolica il vertice della parabola stessa, perchè allora l' equazione

(1) $-Y^2+2eXZ=0$ conduce alla (4) $-A^3-A^2+e^2(1+A)=0$,

che dà ai tre coefficienti A A_1 A_2 i tre valori -1 , e , $-e$. — Se la somma di due radici è uguale alla terza il cono è di 3.ª specie, giacchè posto $A=\frac{1}{a^2}$, $A_1=\frac{1}{b^2}$, $A_2=-\frac{1}{c^2}$ la $A=A_1+A_2$ dà $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$; ciò avviene quando si cerca (§ 216) il cono inverso del piano $2eX+2dY-aZ=0$ rispetto all' asse SC , poichè si trova $aX^2+aY^2+2eXZ+2dYZ=0$, da cui viene $-A^3+2aA^2+(d^2+e^2-a^2)A-a(d^2+e^2)=0$, quindi $A=a=A_1+A_2$. — Se tra i valori inversi $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A_1}$, $\frac{1}{A_2}$ uno è uguale

alla somma degli altri due il cono è di 4.ª specie; tale è il caso del cono duplicato del piano (§ 217) $-Y^2+2eXZ+e^2Z^2=0$, le cui sezioni perpendicolari ad SC sono parabole col foco sulla SC , giacchè la (4) $(e^2-A)(A+A^2)+e^2(1+A)=0$ dà $\frac{1}{A}=\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}=-1$, perciò ponendo (§ 213) $c^2=1$, $a^2=-\frac{1}{A_2}$ sarà $c^2=a^2-b^2$. — Se è nulla la somma delle tre radici, oppure la somma dei loro valori inversi il cono è di 5.ª oppure di 6.ª specie.

223. Del cangiamento delle coordinate trattarono: Jacobi, *J. Crelle*, 1827, II, p. 188, 228, 235. — Cauchy, *Exerc. de Math.* 1829, IV, 42.e livr. p. 140. — Grunert, *J. Crelle*, 1831, VIII, p. 154. — Frankenheim, *ivi*, p. 178. — Piola, *Opusc. Matem. Milano,* 1832, I, p. 209; *Mem. Soc. Ital.* XXIV, I, p. 57. — Jacobi, *J. Crelle*, 1834, XII, p. 1, 1836, XV, p. 309. — Lebesgue, *J. Liouv. sept.* 1837, II, p. 337; *N. Ann. Terq.* 1850, IX, p. 46. — Rodrigues, *J. Liouv. nov.* 1840, V, p. 385, § 18. — Cauchy, *Exerc. d'An. et de Ph.* 1841, II, p. 273. — Saint Venant, *J. Liouv. juill.* 1844, IX, p. 270, 310. — Jacobi, *J. Crelle*, 1845, XXX, p. 46. — Cayley, *J. Crelle*, 1846, XXXII, p. 119. — Chelini, *Racc. scient. Roma* 1849. *Sull' uso sistematico* ecc. — Dedekin, *J. Crelle*, 1855, p. 272.

VI.

CALCOLO DEI QUATERNIONI.

224. Il metodo delle equipollenze (§ 25) serve ad esprimere le relazioni di grandezza e di posizione delle rette poste in un piano, in guisa che le figure piane sono poi sottoposte ad un facile algoritmo, nel quale più non occorrono le considerazioni geometriche: l' Hamilton inventò un calcolo affatto speciale, che almeno in parte ha per le figure a tre dimensioni i vantaggi del metodo delle equipollenze pel piano. Non mi farò qui ad esporre dettagliatamente il calcolo del Geometra Irlandese, che mi studiai di spiegare in una memoria inserita nel Vol. I, Serie II (1859) della Società Italiana, accennerò soltanto le regole dell' algoritmo ed il suo significato. Coi tre simboli $\imath_1$ $\imath_2$ $\imath_3$ indicherò i tre Hamiltoniani i j k , cioè tre rette uguali all' unità tra loro ortogonali, e che per fissare le idee supponiamo la $\imath_1$ orizzontale rivolta

verso l' Est, la ν_2 orizzontale verso il Nord, e la ν_3 verticale verso lo Zenit; secondo i principii del metodo delle equipollenze la

$$\mathrm{OM} \simeq \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z$$

può esprimere una retta di qualsivoglia direzione, e di qualsivoglia grandezza $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$. Se ci limitassimo ad adoperare le espressioni analoghe alle precedenti, ed a sommarle tra di loro, non si farebbe che esprimere in maniera comoda le relazioni dei punti riferiti alle ordinarie coordinate Cartesiane; giacchè ben si vede che le x y z sono le coordinate ortogonali del punto M rispetto all' origine O.

225. Ecco le regole, secondo le quali si moltiplicano gli Hamiltoniani. Il quadrato di ognuno di essi è $=-1$, cioè sotto questo riguardo si calcolano come il ν; la cosa è ben differente pel prodotto di due Hamiltoniani, poichè bisogna distinguere qual sia il primo e quale il secondo dei fattori che si vogliono moltiplicare, essendochè $\nu_1\nu_2$ e $\nu_2\nu_1$ sono due espressioni non eguali, poichè anzi sommate tra loro si distruggono, cioè $\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_1=0$: i valori di tutti questi prodotti sono i seguenti

$$\begin{array}{lll} \nu_1^2 = -1 & \nu_1\nu_2 = \nu_3 & \nu_1\nu_3 = -\nu_2 \\ \nu_2\nu_1 = -\nu_3 & \nu_2^2 = -1 & \nu_2\nu_3 = \nu_1 \\ \nu_3\nu_1 = \nu_2 & \nu_3\nu_2 = -\nu_1 & \nu_3^2 = -1 \end{array}$$

cui conviene rendersi abituali. Ecco due esempii

$$2\nu_1(3\nu_2-\nu_3) = 6\nu_3+2\nu_2$$

$$(3\nu_1-\nu_2-2\nu_3)(5\nu_1-4\nu_2+7\nu_3) = -15-12\nu_3-21\nu_2+$$
$$+5\nu_3-4-7\nu_1-10\nu_2-8\nu_1+14 = -5-15\nu_1-31\nu_2-7\nu_3 .$$

I trinomii, i cui termini sono rispettivamente moltiplicati per uno dei tre Hamiltoniani ν_1 ν_2 ν_3, li diremo *trinioni*; diconsi *quaternioni* i quadrinomii che contengono eziandio un termine reale, cioè senza alcun Hamiltoniano: del resto col nome di quaternioni non si escludono i trinioni, i quali sono quaternioni colla parte reale nulla; così pure in un trinione potranno mancare uno o due termini senza che perciò si cessi di dirlo trinione.

226. Dal prodotto di due trinioni nasce un quaternione; se si cangia l'ordine dei fattori, i due prodotti che ne risultano hanno la medesima parte reale, mentre i termini contenenti gli Hamiltoniani hanno segni opposti; due quaternioni che hanno tale relazione diconsi tra loro *conjugati*. Così, per esempio, i

due quaternioni

$$-13+3\imath_1+2\imath_2 \quad , \quad -13-3\imath_1-2\imath_2$$

sono tra loro *conjugati:* il primo eguaglia il prodotto

$(2\imath_1-3\imath_2+\imath_3)(2\imath_1-3\imath_2)$, ed il secondo è $=(2\imath_1-3\imath_2)(2\imath_1-3\imath_2+\imath_3)$. — Il conjugato di un trinione è il trinione stesso col segno cangiato, giacchè esso non contiene parte reale. — Anche i quaternioni si moltiplicano tra loro colle solite regole, per esempio

$$(1) \quad (2-\imath_1-3\imath_3)(1+2\imath_1-3\imath_2)=4-6\imath_1-12\imath_2 \ .$$

Cangiando l' ordine dei due fattori il prodotto cangia essenzialmente

$$(2) \quad (1+2\imath_1-3\imath_2)(2-\imath_1-3\imath_3)=4+12\imath_1-6\imath_3 \ .$$

Si ha peraltro il teorema, che comprende il precedente: *Il prodotto di due quaternioni diventa il proprio conjugato, quando ai due fattori si sostituiscono i loro conjugati e nello stesso tempo il primo diventa secondo ed il secondo primo.* Così, per esempio, la (1) dà

$$(1-2\imath_1+3\imath_2)(2+\imath_1+3\imath_3)=4+6\imath_1+12\imath_2$$

e la (2) dà $(2+\imath_1+3\imath_3)(1-2\imath_1+3\imath_2)=4-12\imath_1+6\imath_3$.

227. Corollario. *Il prodotto di due quaternioni tra loro conjugati è conjugato di sè stesso,* perciò esso è unicamente una quantità *reale,* ed è facile vedere che esso è la somma dei quadrati della parte reale e dei coefficienti dei tre Hamiltoniani. Questa somma dicesi il quadrato della *grandezza* del quaternione; esempio

$$(2-\imath_1+3\imath_2)(2+\imath_1-3\imath_2)=4+1+9=14$$

$\sqrt{14}$ è la *grandezza* di ciascuno dei quaternioni tra loro conjugati $2-\imath_1+3\imath_2$, $2+\imath_1-3\imath_2$. Così pure il quadrato della grandezza del trinione $5\imath_1-2\imath_2+\imath_3$ è 30 . — Un trinione od un quaternione dicesi *unitario* quando la sua grandezza è uguale all' unità. Giova osservare che la somma dei coefficienti degli Hamiltoniani nel prodotto di due trinioni

$$(\imath_1 x_1+\imath_2 y_1+\imath_3 z_1)(\imath_1 x_2+\imath_2 y_2+\imath_3 z_2)$$

eguaglia il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$; se i fattori sono quaternioni bisogna aggiungere a tal determinante i prodotti di ciascuna parte reale per la somma dei coefficienti degli Hamiltoniani nell' altro quaternione.

228. Teorema. *In una equipollenza tra due prodotti di quaternioni unitarii il fattore più a sinistra di un membro può trasportarsi a fattore a sinistra dell' altro membro, purchè si muti nel suo conjugato; lo stesso può farsi del fattore più a destra di un membro portandolo a destra dell' altro membro e mutandolo nel suo conjugato.* Così se con a_q b_q ecc. s' indichino altrettanti quaternioni unitarii, e la caratteristica cj serva ad indicare il conjugato, l' equipollenza $a_q b_q = c_q d_q$ porta di conseguenza le

$$a_q = c_q d_q \mathrm{cj}\, b_q \;,\quad \mathrm{cj}\, c_q . a_q = d_q \mathrm{cj}\, b_q \;,\quad \mathrm{cj}\, d_q . \mathrm{cj}\, c_q . a_q = \mathrm{cj}\, b_q \;,\quad \mathrm{cj}\, d_q . \mathrm{cj}\, c_q . a_q b_q = 1 \;,\ \text{ec.}$$

È un corollario di questo teorema quello già dato al § 226, per cui se $a_q b_q = c_q$ è $\mathrm{cj}\, c_q = \mathrm{cj}\, b_q . \mathrm{cj}\, a_q$. Questo ultimo teorema vale anche se i quaternioni non sono unitarii; ciò risulta dall' altro teorema: *La grandezza del prodotto dei quaternioni eguaglia il prodotto delle loro grandezze.*

229. Si dice quoziente $a_q : b_q$ di due quaternioni quel quaternione, che preso per primo fattore il secondo fattore essendo il divisore b_q dà per prodotto il dividendo a_q . Cioè se

$$a_q : b_q = c_q \quad \text{si ha} \quad a_q = c_q b_q \;.$$

Se il divisore b_q sia unitario pel teorema generale del § 228 la $a_q = c_q b_q$ dà $a_q \mathrm{cj}\, b_q = c_q$, perciò

$$a_q : b_q = a_q \mathrm{cj}\, b_q$$

formula molto importante, perchè riduce la divisione dei quaternioni alla moltiplica tanto più facile. Quando b_q non è unitario, la precedente formula si cangia nell' altra

$$a_q : b_q = a_q \mathrm{cj}\, b_q : \mathrm{gr}^2 b_q$$

dove $\mathrm{gr}^2 b_q = b_q \mathrm{cj}\, b_q$ segna il quadrato della grandezza del quaternione.

230. Esposte le regole di calcolo, indichiamo adesso il *significato geometrico dei quaternioni.* Supponiamo che tutte le rette partano dal punto O , e che la figura appartenga tutta ad esso punto; del resto le considerazioni stesse possono trasportarsi allo spazio, poichè ad una retta può sempre sostituirsi una sua equipollente (§ 5) ed anche ad un angolo può sostituirsi uno di eguale posto in piano parallelo. Un *trinione* (§ 224) esprime una retta passante per O , che diremo un *radio*; se il trinione è unitario la retta diventa un *raggio* della sfera di raggio $= 1$. Così i raggi qualisivogliano OA OB ecc. sono espressi dai trinioni unitarii A_t B_t ecc. L' angolo AOB che s' intende

preso dal raggio OA al raggio OB è espresso dal rapporto $B_\iota : A_\iota$ dei due trinioni, cioè dal quaternione

$$B_\iota : A_\iota \quad , \quad \text{che dicemmo (§ 229) essere} \quad = B_\iota . \text{cj} A_\iota \quad .$$

L' angolo BOA eguale al precedente ma di opposta direzione è espresso da $A_\iota : B_\iota = A_\iota \text{cj} B_\iota$, che pel § 226 è il conjugato del predetto $B_\iota \text{cj} A_\iota$. Se sia γ la grandezza dell' angolo AOB il quaternione $\gamma_q = B_\iota : A_\iota$ è della forma $\cos\gamma + \text{sen}\,\gamma . \gamma_\iota$

cioè la parte reale è il coseno dell' angolo AOB , ed il rimanente è un trinione unitario γ_ι moltiplicato pel seno dell'angolo AOB ; inoltre questo trinione unitario esprime un raggio perpendicolare al piano dell' angolo e talmente diretto che intorno ad esso la rotazione da A a B (minore di 180°) è positiva.

231. Un quaternione non unitario, cui può sempre darsi la forma

$$r(\cos\gamma + \gamma_\iota . \text{sen}\,\gamma)$$

rappresenta un *biradiale*, cioè il rapporto in grandezza ed in posizione di due rette OA OB , le cui grandezze hanno il rapporto $OB : OA = r$, e che comprendono tra loro l' angolo $AOB = \gamma$ posto in piano perpendicolare al raggio espresso dal trinione unitario γ_ι .

232. Un trinione, che può considerarsi come un quaternione colla parte reale nulla, rappresenta quindi non solo un *radio*, ma anche un biradiale rettangolo posto in piano perpendicolare a quel radio. — Un trinione unitario elevato alla potenza seconda dà sempre il quadrato -1 ; elevato ad altra potenza rappresenta un biradiale unitario, il cui angolo espresso in parti di angolo retto eguaglia l' esponente della potenza. Cioè si ha per ogni trinione unitario γ_ι e per ogni esponente a

$$\gamma_\iota^a = \cos a + \gamma_\iota . \text{sen}\, a \quad .$$

233. *Prodotto dei biradiali.* Se ad un biradiale, o angolo che dir si voglia, AOB sussegua un biradiale BOC , il cui primo radio OB sia il secondo radio del precedente, e poi sussegua similmente un terzo biradiale COD , e così in seguito a piacere; il prodotto dei quaternioni che rappresentano i biradiali AOB BOC COD presi in ordine opposto a quello con cui sono nominati è uguale al quaternione che rappresenta il biradiale AOD tra il primo e l' ultimo dei radii, cioè

$$\text{COD} . \text{BOC} . \text{AOB} \backsimeq \text{AOD} .$$

234. *Trigonometria sferica.* Così in particolare se i lati AB BC CA di un triangolo sferico, cioè i biradiali AOB BOC COA, sieno espressi dai quaternioni unitarii γ_q α_q β_q, il biradiale AOC sarà (§ 226) $\mathrm{cj}\,\beta_q$ e si avrà

$$\mathrm{cj}\,\beta_q = \alpha_q\,\gamma_q \quad \text{ossia (§ 226)} \quad \beta_q = \mathrm{cj}\,\gamma_q \,.\, \mathrm{cj}\,\alpha_q \;.$$

Eseguendo sulle lettere il solito cangiamento ciclico $\alpha\beta\gamma\alpha\ldots$ questa formula dà la

$$(1) \qquad \gamma_q = \mathrm{cj}\,\alpha_q \,.\, \mathrm{cj}\,\beta_q$$

ed un' altra di analoga. Indicando coi trinioni unitarii A_ι B_ι C_ι i raggi, che terminano ai vertici del triangolo sferico, si ha $\gamma_q = B_\iota : A_\iota$, alla qual equipollenza possono darsi le tre forme

$$(2) \quad B_\iota = \gamma_q A_\iota \;, \quad (3) \quad \gamma_q = -B_\iota A_\iota \;, \quad (4) \quad A_\iota = B_\iota \gamma_q \;,$$

nelle quali si può eseguire il cangiamento ciclico sulle lettere A B C ed insieme sulle α β γ, e così otterremo le (2′) (2″) (3′) (3″) (4′) (4″). Se si conoscano A_ι B_ι la (3) darà γ_q, da cui osservando che

$$(5) \qquad \gamma_q = \cos\gamma + \gamma_\iota . \operatorname{sen}\gamma$$

si deduce non solo il valore γ dell' arco sferico AB, ma eziandio il raggio rappresentato dal trinione unitario γ_ι, il cui punto estremo è il polo positivo dell' arco AB. Gli estremi dei raggi γ_ι α_ι β_ι sono i vertici del triangolo sferico supplementare del dato ABC, i cui lati vengono espressi da A_q B_q C_q quaternioni unitarii che contengono i trinioni A_ι B_ι C_ι, sicchè si hanno le formule analoghe alle precedenti

$$(6) \quad \gamma_\iota = A_q \beta_\iota \;, \quad (7) \quad A_q = -\gamma_\iota \beta_\iota \;, \quad (8) \quad \beta_\iota = \gamma_\iota A_q$$

$$(9) \quad A_q = \cos A + A_\iota . \operatorname{sen} A \;, \quad (10) \quad C_q = \mathrm{cj}\,A_q . \mathrm{cj}\,B_q \;,$$

gli angoli A B C sono gli angoli *esterni* del triangolo sferico ABC. — Si noti che i trinioni appartenenti ad un angolo e ad un lato adjacente, come, per esempio, A_ι e β_ι, sono sempre tra loro perpendicolari, perchè β_ι è l'asse dell' arco CA, che passa pel punto A estremo del raggio A_ι. La condizione che due trinioni esprimano due rette perpendicolari è data, in forza delle (3) (5), dall' essere nulla la parte reale del loro prodotto.

235. Supponiamo, per esempio, che in un triangolo sferico sia dato l' angolo *esterno* A, ed i due lati adjacenti β γ; poniamo per semplicità $A_\iota = \imath_1$; cioè prendiamo per $\imath_1$ il raggio che va al punto A, il qua-

ternione che esprime quell' angolo esterno sarà

$$(9) \quad A_q = \cos A + \imath_1 . \operatorname{sen} A \quad ,$$

supponiamo che il lato AB sia situato sul piano dei due Hamiltoniani $\imath_1$ $\imath_2$, sicchè sia $\gamma_t = \imath_3$, e

$$(5) \quad \gamma_q = \cos\gamma + \imath_3 . \operatorname{sen}\gamma \ ;$$

avremo pure

$$(8) \quad \beta_t = \gamma_t A_q = \imath_3 . \cos A + \imath_2 . \operatorname{sen} A$$

poi $(5'')$ $\beta_q = \cos\beta + \operatorname{sen}\beta\,(\imath_3 \cos A + \imath_2 \operatorname{sen} A)$.

Espresse così tutte le parti note del triangolo sferico ne verrà

$$(1') \quad \alpha_q = \mathrm{cj}\,\beta_q . \mathrm{cj}\,\gamma_q = (\cos\beta - \imath_3 \operatorname{sen}\beta\cos A - \imath_2 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} A)(\cos\gamma - \imath_3 . \operatorname{sen}\gamma)$$
$$= \cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos A + \imath_1 \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen} A - \imath_3 \operatorname{sen}\beta\cos\gamma\cos A - \imath_2 \operatorname{sen}\beta\cos\gamma\operatorname{sen} A$$
$$- \imath_3 \cos\beta\operatorname{sen}\gamma \ ,$$

quindi per la $(5')$ $\alpha_q = \cos\alpha + \alpha_t . \operatorname{sen}\alpha$ risulta la nota relazione

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos A \quad .$$

La precedente (1') poteva anche dedursi dalle (2) $B_t = \imath_1 \cos\gamma + \imath_2 \operatorname{sen}\gamma$

$$(4'') \quad C_t = A_t \beta_q = \imath_1 \cos\beta - \imath_2 \operatorname{sen}\beta\cos A + \imath_3 \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} A$$

e $(3')$ $\alpha_q = -C_t B_t$. — Introducendo nei calcoli l' angolo B e il lato α si ha

$$(6') \quad \alpha_t = B_q \gamma_t = (\cos B + B_t . \operatorname{sen} B)\,\imath_3 = \imath_3 \cos B - \imath_2 \cos\gamma \operatorname{sen} B + \imath_1 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} B$$
$$(2') \quad C_t = \alpha_q B_t = (\cos\alpha + \imath_1 \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen} B - \imath_2 \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma\operatorname{sen} B + \imath_3 \operatorname{sen}\alpha\cos B)(\imath_1 \cos\gamma +$$
$$+ \imath_2 \operatorname{sen}\gamma)$$
$$= \imath_1 \cos\alpha\cos\gamma - \imath_1 \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos B + \imath_2 \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma + \imath_2 \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma\cos B + \imath_3 \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} B$$

e dal confronto dei due trovati valori di C_t si ottengono le equazioni fondamentali della trigonometria sferica, cioè

$$\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}\beta\cos A + \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma\cos B = 0 \ ,$$

questa mediante la precedente diventa

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{\cos B} + 1 + \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A}{\cos\gamma} = 0$$

facile da ritenersi a memoria considerando l' ordine, con cui si succedono gli elementi $\alpha\ B\ \gamma\ A$.

236. *Movimento istantaneo dei corpi.* Adoperiamo il calcolo dei quater-

nioni alla dimostrazione dell' elegantissima teoria sulla rotazione istantanea dei corpi data dai celebri Geometri Chasles e Poinsot. Il moto istantaneo di un corpo è sempre riducibile in un solo modo ad una rotazione infinitesima ω intorno ad un asse OK , che supponiamo parallelo all'Hamiltoniano ν_3 , e ad un moto progressivo $g\omega$ parallelo allo stesso asse. *L' asse della rotazione può trasportarsi parallelamente a sè stesso in un punto* A , *purchè si aggiunga un moto progressivo perpendicolare al piano* OKA *e proporzionale alla distanza dei due assi.* Per dimostrarlo ricorriamo alla regola del calcolo dei quaternioni, per la quale la posizione che prende una retta OM ruotando del diedro ω intorno all' asse $OK \simeq \nu_3$ è espressa da

$$OM_1 \simeq \nu_3^{\frac{\omega}{2}} OM . \nu_3^{-\frac{\omega}{2}} ,$$

che trascurando le potenze superiori di ω si riduce,

posto $OM \simeq \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z$, a

$$OM_1 \simeq (1 + \nu_3 \tfrac{\omega}{2})(\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z)(1 - \nu_3 \tfrac{\omega}{2}) \simeq OM + \nu_2 x\omega - \nu_1 y\omega \quad :$$

aggiungendo a questa rotazione ν_3^{ω} il moto progressivo $\nu_3 g\omega$ si ha

$$(1) \qquad MM' \simeq (-\nu_1 y + \nu_2 x + \nu_3 g)\omega \quad .$$

Supponiamo $OA \simeq \nu_1 r$ sarà $AM \simeq \nu_1 (x - r) + \nu_2 y + \nu_3 z$, e la rotazione intorno ad un asse $AH \simeq \nu_3$ parallelo ad OK trasporterà il punto M in M_0 essendo

$$AM_0 \simeq (1 + \nu_3 \tfrac{\omega}{2})\, AM\, (1 - \nu_3 \tfrac{\omega}{2}) \simeq AM + \nu_2 (x - r)\omega - \nu_1 y\omega \quad ;$$

quindi se a $MM_0 \simeq -\nu_1 y\omega + \nu_2 (x - r)\omega$ aggiungiamo la traslazione costante $(\nu_2 r + \nu_3 g)\omega$, il punto M verrà come prima in M' . Così il trasporto dell' asse di rotazione da OK in AH rese necessario di aggiungere la traslazione $\nu_2 r\omega$ perpendicolare al piano dei due assi. — Questo teorema sui moti istantanei rotatorio e progressivo è precisamente identico a quello sulle forze e sui *giratori* (assi delle coppie) pel quale un sistema qualsivoglia di forze e di giratori è sempre riducibile in un solo modo ad una forza OK e ad un giratore ad essa parallelo g ; e la forza può trasportarsi parallelamente a sè stessa in AH purchè si aggiunga un giratore perpendicolare al piano OKAH ed uguale alla forza (che supponiamo $= 1$) moltiplicata per la distanza OA delle due rette parallele OH KA .

237. *Identità tra la composizione delle forze e quella delle rotazioni.* Questa analogia si estende ad ogni altro caso, e come il predetto sistema di forze e di giratori è riducibile in infinite maniere a due sole forze AP BQ , così egualmente la rotazione infinitesima ν_3^{ω} e la traslazione $\nu_3 . g\omega$ (che possono supporsi risultanti da un sistema di rotazioni e di traslazioni infinitesime) sono riducibili in infinite maniere a due sole rotazioni intorno agli assi AP BQ . — Dato ad arbitrio AP , sia OA la minima distanza fra le rette OK AP , e poniamo $OA \simeq \nu_1 r$. Applicando al punto A ed al punto B dato da $OB \simeq -\nu_1 \rho$ la formula (1) i loro moti infinitesimi si trovano espressi dalle

$$AA' \simeq (\nu_2 r + \nu_3 g)\omega \quad , \quad BB' \simeq (-\nu_2 \rho + \nu_3 g)\omega \; ;$$

quindi se la retta AP abbia la direzione $\nu_2 g + \nu_3 \rho$, che è perpendicolare a $-\nu_2 \rho + \nu_3 g$ il punto B riceverà il suo movimento BB′ mediante la sola rotazione intorno ad AP , e perciò l' altro asse di rotazione dovrà passare per B . E siccome a sua volta la rotazione intorno a BQ dee produrre essa sola il movimento AA′ , così la BQ dovrà esser perpendicolare alla $\nu_2 r + \nu_3 g$, nonchè alla retta BOA , e perciò la BQ dovrà esser parallela alla $-\nu_2 g + \nu_3 r$. Stabilite così le direzioni degli assi di rotazione AP BQ ne determineremo la grandezza in guisa che la loro somma-geometrica (composta-equipollente) eguagli l' asse dell' unica rotazione $OK \simeq \nu_3$, dunque

$$(2) \qquad AP \simeq \frac{\nu_2 g + \nu_3 \rho}{r + \rho} \quad , \quad BQ \simeq \frac{-\nu_2 g + \nu_3 r}{r + \rho} \quad .$$

Ci rimane da dimostrare che l' azione simultanea o successiva di queste due rotazioni infinitesime produce su qualsivoglia punto M lo spostamento MM′ dato dalla (1); ora la succitata regola del calcolo dei quaternioni mostra che una rotazione intorno all' asse AP , la cui grandezza stia alla rotazione ω intorno ad OK come AP sta ad OK , trasporta il punto M nella nuova posizione M° data da

$$AM^{\circ} \simeq \left(1 + \frac{\nu_2 g + \nu_3 \rho}{r + \rho} \cdot \frac{\omega}{2}\right) AM \left(1 - \frac{\nu_2 g + \nu_3 \rho}{r + \rho} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \simeq$$

$$\simeq AM - \nu_3 g \frac{x - r}{r + \rho}\omega + \nu_1 \frac{g z}{r + \rho}\omega + \nu_2 \rho \frac{x - r}{r + \rho}\omega - \nu_1 \frac{\rho y}{r + \rho}\omega$$

cioè produce lo spostamento

$$MM^0 \simeq [-\nu_3 g(x-r) + \nu_1 g z - \nu_1 \rho y + \nu_2 \rho (x-r)] \frac{\omega}{r+\rho} \quad ;$$

similmente la rotazione intorno a BQ produce lo spostamento

$$M^0M' \simeq [\nu_3 g(x+\rho) - \nu_1 g z - \nu_1 r y + \nu_2 r (x+\rho)] \frac{\omega}{r+\rho}$$

e la somma-geometrica di questi spostamenti infinitesimi è appunto la

$$MM' \simeq (\nu_3 g - \nu_1 y + \nu_2 x)\,\omega$$

della (1). — Non abbiamo bisogno d' aggiungere che le due forze espresse dalle AP BQ ed applicate nei punti determinati da $OA \simeq \nu_1 . r$ $OB \simeq -\nu_1 . \rho$ danno origine alla risultante $OK \simeq \nu_3$ ed al giratore g parallelo a questa.

238. *Determinazione dell' asse di unica rotazione.* Molte conseguenze trasse il Chasles da questa riduzione di ogni moto istantaneo a due rotazioni. Se si conoscano le trajettorie LL′ NN′ descritte da due punti L N, noi possiamo supporre che L N appartengano alla retta AP (che dicemmo essere arbitraria), l' asse dell' altra rotazione BQ, che combinata con quella intorno ad AP dee produrre il movimento istantaneo dovrà trovarsi sul piano condotto per L perpendicolarmente ad LL′, nonchè sul piano condotto per N perpendicolarmente ad NN′, e quindi ne sarà l'intersezione; determinate per tal modo le rette indefinite ALNP BQ ne avremo la minima distanza AB perpendicolare ad entrambe, e sapremo che il cercato asse OK dell' unica rotazione dee tagliare perpendicolarmente la AB. Quindi se si conosca la direzione della trajettoria di un terzo punto M combinandolo con uno dei precedenti L N, otterremo la posizione dell' asse OK dell' unica rotazione; dopo di che l' inclinazione su di esso di una delle trajettorie MM′ darà il rapporto g tra il moto progressivo ed il rotatorio.

239. *Fochi e caratteristiche di ogni piano in movimento.* Un caso che merita osservazione è quello in cui

$$(3) \qquad r\rho = g^2 \quad ,$$

pel quale i due assi AP BQ delle rotazioni parziali hanno fra loro l' inclinazione di 90° e rispettivamente coincidono colle tangenti AA′ BB′ delle trajettorie descritte dai punti, che stanno sulla retta AOB perpendicolare agli assi AP BQ nonchè all' unico asse di rotazione OK. Per ogni punto M del piano ABQ si trova col calcolo che la trajettoria

MM′ è perpendicolare alla AM , e lo si può facilmente riconoscere osservando che il moto MM′ è prodotto dalle rotazioni intorno alla BQ posta nel piano, ed intorno alla AP ad esso perpendicolare; perciò *i piani normali alle trajettorie descritte dai punti del piano* ABQ *passano tutti pel punto* A , che il Chasles disse il *foco* del piano. Questo piano gira intorno alla BQ , che perciò ne è la *caratteristica*, e la BQ gira intorno al foco A senza uscire dal piano. — Per un dato movimento istantaneo e in un qualunque piano si potrà trovare sulla sua retta OA perpendicolare all' asse unico OK quel punto A , che avrà la trajettoria AA′ perpendicolare al piano, e perciò ne sarà il foco.

240. Pei moti rotatorii si veggano: Prony, *J. Ec. polytechn.* an. VI, II, v. p. 191. — Poinsot, *J. Ec. polyt.* 1806, VI, xiij, p. 206; *Bull. Féruss. sept.* 1830, XIV, n.° 12, *janv.* 1831, n.° 1. — Cauchy, *Exerc. de Mathem.* 1826, II, xv, p. 70. — Chasles, *Bull. Fér. nov.* 1830, XIV, n.° 198. — Guilhem, *J. Liouv.* 1836, I, p. 309. — Giorgini, *Mem. Soc. Ital.* 1836, XXI. — Poinsot, *Mem. Institut.* 1838, XIV, p. 274. — Möbius, *J. Crelle*, 1838, XVIII, n.° 13. — Piola, *Mem. Soc. Ital.* 1839, XVII. — Rodrigues, *J. Liouv.* 1840, V, p. 385. — Chasles, *Comptes rend.* 26 *juin* 1843, XVI, p. 1420. — Minich, *Atti Istit. Veneto*, *lugl.* 1844, III, p. 321. — Sonnet, *Comptes*, 8 *janv.* 1849, XXVIII, p. 43. — Poinsot, *J. Liouv. janv.* 1851, XVI, p. 35, 9, ecc.; *Théorie nouv. de la Rotat. Paris*, 1851. — Jonquières, *Mélanges de Géom. pure. Paris*, 1856.

VI.

COORDINATE PER LO SPAZIO.

241. *Coordinate Cartesiane.* Tutti sanno come un punto M si riferisca a tre assi coordinati DA DB DC mediante le coordinate x y z ; acciocchè le equazioni divengano omogenee introdurremo una quarta variabile w , cioè supporremo che le coordinate sieno $x:w$, $y:w$, $z:w$, il punto M a cui esse appartengono lo indicheremo con

$$(x, y, z:w) \quad .$$

Un' equazione omogenea tra le x y z w determinerà una superficie;

le $x\ y\ z\ w$ possono anche esser date in funzioni di due variabili indipendenti. Se fossero date in funzioni di una sola variabile indipendente si avrebbe invece una curva.

242. *Coordinate Plucheriane.* L' equazione Cartesiana di un piano è

$$(C) \quad \xi x + \upsilon y + \zeta z + \omega w = 0 \quad ,$$

noi lo indicheremo con

$$\{\xi\ ,\ \upsilon\ ,\ \zeta : \omega\} \quad .$$

Questo piano taglia gli assi coordinati nei punti $P_1\ P_2\ P_3$ dati da

$$DP_1 \simeq -\frac{\omega}{\xi} DA \ , \ DP_2 \simeq -\frac{\omega}{\upsilon} DB \ , \ DP_3 \simeq -\frac{\omega}{\zeta} DC \quad .$$

Un' equazione omogenea tra le $\xi\ \upsilon\ \zeta\ \omega$ determinerà una superficie quale inviluppo dei piani. Se le $\xi\ \upsilon\ \zeta\ \omega$ sieno date in funzione di una sola variabile indipendente, tutti i piani corrispondenti inviluppano una superficie sviluppabile, ossia osculano la sua linea di regresso.

243. *Calcolo baricentrico.* Dando alle tre rette DA DB DC lunghezze arbitrarie, viene a formarsi un tetraedro DABC che diremo il *tetraedro coordinato;* l' espressione baricentrica

$$(1) \quad M \simeq x.A + y.B + z.C + w.D$$

ha il noto significato (§ 92) e serve ad individuare il punto

$$(2) \quad (x, y, z, w) \quad .$$

L' equazione baricentrica di un piano è

$$(C) \quad \xi x + \upsilon y + \zeta z + \omega w = 0 \quad ,$$

lo indicheremo con

$$\{\xi\ ,\ \upsilon\ ,\ \zeta\ ,\ \omega\} \quad ;$$

esso passa pei punti determinati dalle espressioni baricentriche

$$P_1 \simeq \omega.A - \xi.D \ , \ P_2 \simeq \omega.B - \upsilon.D \ , \text{ ecc.}$$

Si noti che per lo studio delle figure piane valgono (§ 95) i calcoli baricentrico e baricentrale; per le figure intorno ad un punto (§ 205) si hanno i calcoli baricentrale e baricentrano, e per le figure nello spazio adopereremo i calcoli baricentrico e baricentrano.

244. *Calcolo baricentrano.* Colle definizioni date al § 204 indicate con $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ le facce interne DCB DAC DBA ABC del tetraedro

coordinato, il piano $\{\xi , \upsilon , \zeta , \omega\}$ sarà dato dall'espressione baricentrana

$$\mu \simeq \frac{\xi}{a}\alpha + \frac{\upsilon}{b}\beta + \frac{\zeta}{c}\gamma + \frac{\omega}{d}\delta \quad ,$$

essendo a b c d le altezze del tetraedro coordinato; potrebbe anche scriversi

$$\mu \simeq \xi . \mathrm{DCB} + \upsilon . \mathrm{DAC} + \zeta . \mathrm{DBA} + \omega . \mathrm{ABC}$$

indicando con DCB , ecc. non le sole facce interne del tetraedro, bensì le facce stesse moltiplicate per numeri proporzionali alle loro aree. Infatti, secondo la definizione (§ 204) il piano espresso da $\frac{\xi}{a}\alpha + \frac{\omega}{d}\delta$ passerà per l' intersezione BC dei due piani α δ e formerà con essi due diedri, i cui seni saranno proporzionali a $\frac{\omega}{d}$, $\frac{\xi}{a}$, e se questo piano taglia lo spigolo opposto DA del tetraedro nel punto P_1 è facile riconoscere che, essendo a d le perpendicolari abbassate dai vertici A D sulle facce opposte DCB ACB , sarà $\mathrm{P}_1 \simeq \omega . \mathrm{A} - \xi . \mathrm{D}$, il che si accorda col § precedente.

245. *Significato delle coordinate baricentriche e baricentrane.* Le x y z w eguagliano le distanze del punto (x , y , z , w) dalle facce del tetraedro coordinato divise per le altezze a b c d del medesimo, così è

$$x + y + z + w = 1 \quad .$$

Le ξ υ ζ ω sono proporzionali, e possono considerarsi come uguali, alle distanze del piano $\{\xi , \upsilon , \zeta , \omega\}$ dai quattro vertici del tetraedro coordinato.

246. *Condizione di congruenza.* La condizione per la quale il piano $\{\xi , \upsilon , \zeta , \omega\}$ passa pel punto (x , y , z , w) è espressa dalla solita

$$(C) \quad \xi x + \upsilon y + \zeta z + \omega w = 0 \quad ;$$

questa relazione tra un piano ed un punto è meno ristretta della congruenza tra una retta ed un punto, o tra un piano ed una retta; nell' esporre l' elegante teoria del Grassmann sugli allineamenti (Mem. Istituto, VIII, pag. 35) io la dissi *incidenza*, molto più opportunamente la si nominerebbe *semicongruenza*. — Una retta può esser determinata mediante l' intersezione di due piani, ed allora la congruenza tra la retta ed un piano si esprimerà mediante la congruenza di tre piani $\{\xi , \upsilon , \zeta , \omega\}$, $\{\xi_1 , \upsilon_1 , \zeta_1 , \omega_1\}$, $\{\xi_2 , \upsilon_2 , \zeta_2 , \omega_2\}$ cioè colla condizione che essi abbiano una medesima intersezione, il che è dato dall' annullarsi di due fra i quattro determinanti

$$(1) \quad |\xi v_1 \zeta_2| \quad , \quad |\xi v_1 \omega_2| \quad , \quad |\xi \zeta_1 \omega_2| \quad , \quad |v \zeta_1 \omega_2| \quad .$$

Che se la retta sia determinata mediante due punti, la congruenza con un piano è espressa da due semicongruenze, cioè da due equazioni simili alla (*C*). — In simil modo è espressa la congruenza tra un punto ed una retta, quando questa è l' intersezione di due piani; invece quando la retta è determinata da due suoi punti, si tratta di esprimere la congruenza di tre punti, il che è dato da due delle equazioni

$$(2) \quad |x y_1 z_2| = 0 \ , \ |x y_1 w_2| = 0 \ , \ |x z_1 w_2| = 0 \ , \ |y z_1 w_2| = 0$$

— Finalmente ci resta da esprimere la *semicongruenza* di due rette, cioè la condizione che esse sieno situate su un medesimo piano; se ciascuna retta è data mediante due punti, la condizione che tutti quattro sieno in un piano è

$$(3) \quad |x y_1 z_2 w_3| = 0 \ ;$$

similmente la condizione che quattro piani abbiano un punto comune è

$$(4) \quad |\xi v_1 \zeta_2 \omega_3| = 0 \ ;$$

meno semplice è l' espressione della semicongruenza di due rette quando una è data mediante due punti, e l' altra è l' intersezione di due piani.

247. La *distanza* di un punto da un piano è uguale (Vegg. § 100) al primo membro della solita (*C*), purchè abbiano luogo le convenzioni specificate nel § 245; ciò vale nei calcoli baricentrico e baricentrano. Per le coordinate Cartesiane e Plucheriane il rapporto delle distanze del piano $\{\xi , v , \zeta : \omega\}$ dal punto $(x , y , z : w)$ e dall' origine D $(0 , 0 , 0 : 1)$ è (§ 71)

$$\frac{\xi x + v y + \zeta z + \omega w}{\omega w} \ ;$$

e se gli assi coordinati sono ortogonali la seconda delle predette distanze è

$$\omega : \sqrt{(\xi^2 + v^2 + \zeta^2)} \quad .$$

Infatti i due piani $\{\xi , v , \zeta : \omega\}$ $\{\xi , v , \zeta : 0\}$ sono paralleli perchè congruenti (§ 246) col piano all' infinito $\{0 , 0 , 0 : 1\}$; il secondo di quei piani non differisce menomamente da quello, che nel calcolo baricentrano applicato alle figure intorno ad un punto D (§ 204) segnammo con $\{\xi , v , \zeta\}$, e che vedemmo (§ 208) esser perpendicolare alla retta allora indicata con $[\xi , v , \zeta]$ ossia con $DM \backsim \xi . DA + v . DB + \zeta\, DC$, e che ha le equazioni Cartesiane $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{v} = \frac{z}{\zeta}$, questa retta passa per l' origine delle coordina-

te ed incontra il piano $\xi x + \upsilon y + \zeta z + \omega = 0$ nel punto

$$(\omega\xi\ ,\ \omega\upsilon\ .\ \omega\ :-\xi^2-\upsilon^2-\zeta^2)$$

che distà dall' origine di $\omega : \sqrt{(\xi^2+\upsilon^2+\zeta^2)}$.

248. *Reciprocità, derivazione polare.* Colle coordinate Cartesiane e Plucheriane ortogonali il piano $\{e, f, g : h\}$ è perpendicolare alla retta che dall' origine D $(0, 0, 0 : 1)$ va al punto $(e, f, g : h)$; di più, le distanze dall' origine del piano e del punto hanno un prodotto costante; dunque il punto $(e, f, g : h)$ ed il piano $\{e, f, g : h\}$ sono tra loro *reciproci;* quindi se si mutano le coordinate Cartesiane nelle Plucheriane, o viceversa, si passa da una figura alla sua reciproca. Due figure reciproche sono anche *derivate-polari* rispetto ad una sfera col centro D . Ne viene per la derivazione di collineazione *(homographie)* che mutando le coordinate baricentriche nelle baricentrane, e viceversa, si passa da una figura alla sua derivata polare rispetto ad un ditomoide convesso (ellissoide, iperboloide a due falde o paraboloide ellittico).

249. *Altra interpretazione del calcolo baricentrano.* Sia

$$(1) \qquad a_1 x_c + a_2 y_c + a_3 z_c + a' = 0 \ ,$$

essendo $$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \ ,$$

l' equazione a coordinate Cartesiane ortogonali di un piano α ; la retta ad esso perpendicolare avrà la direzione indicata dall' equipollenza

$$\mathrm{DP} \simeq a_1 . \mathrm{DA} + a_2 . \mathrm{DB} + a_3 . \mathrm{DC}$$

essendo DA DB DC tre lunghezze uguali all'unità prese sui tre assi coordinati, ed acciocchè il punto P sia il piede della perpendicolare abbassata dall' origine D sul piano α basterà porre

$$\mathrm{DP} \simeq -a' (a_1 . \mathrm{DA} + a_2 . \mathrm{DB} + a_3 . \mathrm{DC})$$

perchè i valori $x_c = -a' a_1$, $y_c = -a' a_2$, $z_c = -a' a_3$ soddisfanno alla (1); la lunghezza DP è $= a'$, dunque a' è la distanza del piano dall' origine delle coordinate D . Supponendo trasportata l'origine delle coordinate nel punto M determinato dall' equipollenza

$$\mathrm{DM} \simeq x_c . \mathrm{DA} + y_c . \mathrm{DB} + z_c . \mathrm{DC} \ ,$$

l' ultimo termine della (1) diventa $a' + a_1 x_c + a_2 y_c + a_3 z_c$; perciò la distanza del punto $(x_c, y_c, z_c : 1)$ dal piano α è precisamente uguale al

primo membro dell' equazione (1); indichiamo tal primo membro colla lettera α. Così pure β sia il primo membro dell' equazione

$b_1 x_c + b_2 y_c + b_3 z_c + b' = 0$ del piano β, essendo $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$; la $p\alpha + q\beta = 0$ sarà l' equazione di un piano che (§ 102) passa per l' intersezione dei due primi; inoltre, per quanto abbiamo precedentemente dimostrato, se un punto di questo terzo piano abbia dai due primi le distanze a b sarà $pa + qb = 0$, se ne deduce che il piano che ha l' equazione $p\alpha + q\beta = 0$ è quello dato dall' espressione baricentrana $\backsim p.\alpha + q.\beta$. Estendendo queste considerazioni si trova che il piano dato dell' espressione baricentrana

$$\backsim \xi.\alpha + \upsilon.\beta + \zeta.\gamma + \text{ecc.}$$

è quello stesso che ha l' equazione a coordinate Cartesiane ortogonali

$$\xi\alpha + \upsilon\beta + \zeta\gamma + \text{ecc.} = 0,$$

essendo α β ζ ecc. i primi membri delle equazioni analoghe alla (1).

250. Con questo nuovo significato attribuito alle lettere α β ecc. s' intende che cosa significhi una qualunque equazione anche di grado superiore al primo. Così, per esempio, la

$$\alpha\beta + l\gamma\delta = 0$$

dove l è un coefficiente numerico, rappresenta un luogo del secondo ordine, il quale comprende le quattro rette d' intersezione di ciascuno dei due piani α β con ciascuno dei due γ δ, ed ogni punto di tal luogo ha le distanze da quei piani, che, segnate esse pure con α β γ δ, soddisfanno alla predetta equazione. (Vegg. § 106). — Quando entrano quattro piani α β γ δ che sieno facce d'un tetraedro, lo prenderemo per tetraedro coordinato, ed allora invece delle α β γ δ possiamo scrivere le coordinate baricentriche x y z w, il cui significato ne (§ 245) differisce soltanto pei rapporti costanti a b c d.

251. *Altro significato del calcolo baricentrico.* Come nel § 107 supponiamo che ciascuna lettera A, ecc. indicante un punto significhi il primo membro dell' equazione Plucheriana

$$a'\xi_p + a''\upsilon_p + a'''\zeta_p + 1 = 0$$

del punto A riferito a tre assi ortogonali, dove ξ_p υ_p ζ_p stanno in luogo delle $\frac{\xi}{\omega}$ $\frac{\upsilon}{\omega}$ $\frac{\zeta}{\omega}$ del § 242, ed a' a'' a''' sono le coordinate Car-

tesiane del punto A . Se in luogo delle ξ_p υ_p ζ_p si pongano le coordinate Plucheriane $\frac{\xi}{\omega}$ $\frac{\upsilon}{\omega}$ $\frac{\zeta}{\omega}$ di un piano $\mu\,\{\xi, \upsilon, \zeta : \omega\}$, il primo membro A della predetta equazione diviene il valore della distanza del punto A dal piano μ . Risulta da ciò che il punto dato dall' equazione Plucheriana

$$p.\mathrm{A}+q.\mathrm{B}+\ldots. = 0$$

(dove in luogo di A B ... s' intendono poste le predette funzioni di ξ_p υ_p ζ_p) è quello stesso dato dall' espressione baricentrica

$$\mathrm{M} = p.\mathrm{A}+q.\mathrm{B}+\ldots$$

252. Con questo significato attribuito alle lettere A B ... s' interpretano anche le equazioni di grado superiore; così, per esempio, l' equazione Plucheriana

$$\mathrm{AB}+l\mathrm{C} = 0$$

appartiene ad un inviluppo della seconda classe (cioè tale che per una retta si possono condurre due tangenziali) il quale comprende le due rette AC BC , ed ogni suo tangenziale ha la distanza dal punto fisso C proporzionale al prodotto delle sue distanze dai due punti A B . Si paragoni col § 109.

253. *Terza interpretazione del calcolo baricentrico.* Possiamo invece supporre che ciascuna lettera A ecc. rappresenti il primo membro dell' ordinaria equazione Cartesiana

$$x_c^2+y_c^2+z_c^2-2\,a'\,x_c-2\,a''\,y_c-2\,a'''\,z_c-a = 0$$

di una sfera avente il centro in A ; in tal caso l' equazione

$$p\,\mathrm{A}+q\mathrm{B} = 0$$

appartiene ad una sfera, che passa pel circolo d' intersezione delle due prime, ed ha il centro nel punto dato dall' espressione baricentrica

$$p.\mathrm{A}+q.\mathrm{B}\ ;$$

ed in generale il punto espresso da

$$\mathrm{M} = p.\mathrm{A}+q.\mathrm{B}+r.\mathrm{C}+\ldots \quad , \quad p+q+r+\ldots. = 1$$

è il centro di una determinata sfera, la cui equazione Cartesiana è

$$p.\mathrm{A}+q.\mathrm{B}+r.\mathrm{C}+\ldots. = 0 \quad .$$

Inoltre può notarsi come al § 111, che i valori che prendono i primi membri delle predette equazioni quando in luogo di x_c y_c z_c si pongono le coor-

dinate Cartesiane di un punto P , eguagliano i quadrati delle distanze tangenziali del punto P da ciascuna sfera.

254. *Piano all' infinito.* Il piano, che comprende tutti i punti, che stanno a distanza infinita, è nel metodo Cartesiano dato dall'equazione (§ 118) $w=0$; esso è quello indicato dalle coordinate Plucheriane

$$\{0,0,0:1\} \ ;$$

nel calcolo baricentrico esso ha l' equazione

$$x+y+z+w=0 \ ,$$

ossia è indicato dal simbolo $\{1,1,1,1\}$, ed ha l'espressione baricentrana

$$\simeq \frac{1}{a}\alpha+\frac{1}{b}\beta+\frac{1}{c}\gamma+\frac{1}{d}\delta$$

ossia $$\simeq \mathrm{DCB}+\mathrm{DAC}+\mathrm{DBA}+\mathrm{ABC} \ .$$

255. *Modo di rendere omogenee le equazioni.* Le equazioni tra le coordinate baricentriche $x \ y \ z \ w$, e quelle tra le coordinate baricentrane $\xi \ \upsilon \ \zeta \ \omega$ devono esser omogenee; ma siccome le prime sono (§ 245) proporzionali alle distanze di un punto dalle facce del tetraedro coordinato, e le seconde sono le distanze di un piano dai vertici del medesimo, così ad esprimere una proprietà del luogo o dell' inviluppo cercato può presentarsi un' equazione non omogenea; importa quindi di saperla rendere omogenea. Nel calcolo baricentrico abbiamo supposto che le $x \ y \ z \ w$ sieno le distanze delle facce del tetraedro divise rispettivamente per le sue altezze, sicchè per ogni punto dello spazio sarà $x+y+z+w=1$, e il primo membro di questa equazione si adoprerà in guisa da rendere omogenea rispetto alle quattro $x \ y \ z \ w$ un' equazione che non lo fosse.

256. Per le equazioni baricentrane imitando il § 144, sia

$$n_1 x_c+n_2 y_c+n_3 z_c+n=0 \quad \text{essendo} \quad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

l' equazione Cartesiana di un piano, e per brevità sieno

$$(0,0,0:1) \quad (e,0,0:1) \quad (f,g,0:1) \quad (h,l,c:1)$$

i quattro vertici D A B C del tetraedro coordinato, le loro distanze dal piano predetto saranno

$$n=\omega \ , \ n_1 e+n=\xi \ , \ f n_1+g n_2+n=\upsilon \ , \ h n_1+l n_2+c n_3+n=\zeta \ ,$$

con queste cinque equazioni si deggiono eliminare le $n_1 \ n_2 \ n_3 \ n$, ed

ottenere una relazione tra le coordinate $\xi \ \upsilon \ \zeta \ \omega$, la quale sussisterà qualunque sia il piano. Si trova

$$1 = \frac{\zeta^2}{c^2} - 2\frac{\zeta}{c}\frac{\upsilon}{b}\cos(b\,c) + \text{ tutti i termini analoghi,}$$

essendo $c \ b \ a \ d$ le altezze del tetraedro coordinato DABC e (bc) l' angolo diedro compreso tra le facce DAC DBA , ecc.

257. *Applicazione.* Supponiamo per brevità che il tetraedro coordinato ABCD sia equilatero, la sfera di raggio r concentrica al tetraedro, i cui tangenziali hanno dal punto $(1, 1, 1, 1)$ la distanza r , è espressa dalla condizione

$$\frac{1}{4}(\xi + \upsilon + \zeta + \omega) = r \ ,$$

e perciò ha l' equazione baricentrana resa omogenea (§ 256)

$$\frac{1}{16}(\xi + \upsilon + \zeta + \omega)^2 = \frac{r^2}{a^2}(\xi^2 - \frac{2}{3}\xi\upsilon + \text{ecc.}) \ ,$$

Se la sfera dee toccare le facce del tetraedro deggiono sparire i termini contenenti i quadrati delle coordinate, perciò $r = \frac{a}{4}$, e l' equazione si riduce a

$$\xi\upsilon + \xi\zeta + \xi\omega + \zeta\upsilon + \zeta\omega + \upsilon\omega = 0$$

che dà una relazione tra le distanze dei vertici del tetraedro da ciascun piano tangenziale alla sfera. L'equazione baricentrana della sfera circoscritta al tetraedro dev'essere soddisfatta da $\xi = \upsilon = \zeta = a$, $\omega = 0$, perciò $r = \frac{3}{4}a$ e l' equazione è

$$\xi^2 + \upsilon^2 + \zeta^2 + \omega^2 - \xi\upsilon - \text{ecc.} = 0 \ .$$

258. *Ordine e classe delle superficie.* I gradi delle equazioni baricentrica e baricentrana di una superficie ne sono l'*ordine* e la *classe*, ed indicano rispettivamente il numero delle intersezioni reali od immaginarie con una retta, e dei tangenziali congruenti con data retta. Ogni sezione piana è necessariamente dello stesso ordine della superficie, ma differente ne può esser la classe; così pure ogni cono *abbracciante* la superficie (cioè che la tocca tutto lungo una linea) è della sua stessa classe e di un ordine generalmente differente: sicchè in ciascuna superficie algebrica, oltre l' ordine e la classe, dee notarsi la *classe* delle sezioni piane e l' *ordine* dei coni abbraccianti, all' ultimo di questi due

numeri il Cayley (*J. Liouv. juill.* 1846, XI, p. 291) diede il nome di *rango*. Seguendo i principii per la nomenclatura raccomandati dal Dupin (*Dévelopd. de Géom.* 1813, p. 291) una superficie curva non sviluppabile di $n.^{esimo}$ ordine e di $m.^{esima}$ classe la dirò un $n.^{tomoide}$ $m.^{attomenoide}$ e potremo aggiungere a sezioni $\mu.^{attomene}$ ed a coni $\nu.^{tomici}$. Così il tetraedroide, di cui la superficie dell' onda luminosa è un caso particolare, sarà un *tetratomòide-tetrattomenòide* a coni *dodecatomici*. Le superficie del secondo ordine le diremo *ditomòidi* o *diattomenòidi*, secondo che li considereremo come luoghi di punti o come inviluppi di piani.

259. *Poli, polari*, ecc. Rispetto all' $n.^{tomoide}$ $m.^{attomenoide}$ dato dalle equazioni omogenee di $n.^{esimo}$ e di $m.^{esimo}$ grado

$$f(x, y, z, w) = 0 \quad , \quad \varphi(\xi, \upsilon, \zeta, \omega) = 0$$

il punto (x_0, y_0, z_0, w_0) ha il tangenziale (§ 63) od il piano-polare (§ 64)

$$f_0'''' x + f_0''' y + f_0'' z + f_0' w = 0 \quad ;$$

ed il piano $\{\xi_0, \upsilon_0, \zeta_0, \omega_0\}$ ha il punto di contatto (§ 74) od il polo (§ 75)

$$(\varphi_0'''', \varphi_0''', \varphi_0'', \varphi_0') \ .$$

Oltre a ciò analogamente ai §§ 78, 87 ogni punto avrà per *primo-polare* un $(n-1).^{tomoide}$, ed ogni piano avrà per *primo-polico* un $(m-1)^{attomenoide}$ ecc. Rispetto ad ogni ditomoide un punto ha per piano polare quello della linea di contatto del cono abbracciante col vertice nel punto, il quale è a sua volta il polo di quel piano. Inoltre ogni retta ha per *polare* la corda che congiunge i punti di contatto dei tangenziali passanti per l' altra retta. — Su questo argomento alle citazioni del § 90 possiamo aggiungere: Monge, *Géom. descript. an.* VII. — Livet, *J. Ec. polyt.* VI, xiij, p. 284. — Brianchon, *ivi*, p. 297. — Olivier, *Bull. Féruss. janv.* 1829, n.° 3. — Grassmann, *J. Crelle*, 1842, XXIV, N. 21, 24, 1843, XXV. N.° 4. — Terquem, *Nouv. Ann.* 1850, IX, p. 343. — Lebesgue, *N. A. Terq.* 1849, VIII, p. 22.

260. *Riduzione dell' equazione quadratica.* L' equazione generale di secondo grado è

$$\begin{aligned} (1) \qquad & a_a x^2 + a_b x y + a_c x z + a_d x w \\ & + a_b x y + b_b y^2 + b_c y z + b_d y w \\ & + a_c x z + b_c y z + c_c z^2 + c_d z w \\ & + a_d x w + b_d y w + c_d z w + d_d w^2 = 0 \end{aligned}$$

il corrispondente Hessiano ed il suo conjugato sono

$$H = |\, a_a b_b c_c d_d \,| \quad , \quad h = |\, \alpha_\alpha \beta_\beta \gamma_\gamma \delta_\delta \,|$$

essendo

$$\alpha_\alpha = |\, b_b c_c d_d \,| \quad , \quad \alpha_\beta = -\begin{vmatrix} a_b & b_c & b_d \\ a_c & c_c & c_d \\ a_d & c_d & d_c \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha_\gamma = \begin{vmatrix} a_b & b_b & b_d \\ a_c & b_c & c_d \\ a_d & b_d & d_d \end{vmatrix} \quad , \quad \text{ecc.} \ ,$$

Se la (I) è l' equazione baricentrica di un *ditomoide*, il suo piano tangenziale $(\xi, \upsilon, \zeta, \delta)$ è dato (§ 259) da

$$a_a x + a_b y + a_c z + a_d w = \xi \quad , \quad a_b x + b_b y + b_c z + b_d w = \upsilon \ , \ \text{ecc.} \ ;$$

sicchè per la teoria dei determinanti si vedrà che l' equazione baricentrana della medesima superficie è

$$\alpha_\alpha \xi^2 + 2\,\alpha_\beta \xi \upsilon + \text{ecc.} = 0 \quad .$$

261. L' equazione (I) potrà, generalmente parlando, ridursi alla forma canonica

$$a'_a x^2 + b'_b y^2 + c'_c z^2 + d'_d w^2 = 0 \quad :$$

sia

(1) $\quad D' \simeq x_0 . A + y_0 . B + z_0 . C + w_0 . D \quad , \quad x_0 + y_0 + z_0 + w_0 = 1$

il polo del piano $w = 0$ rispetto al ditomoide (I); pel § 259 sarà

(2) $\quad a_a x_0 + a_b y_0 + \text{ec.} = 0 \ , \ a_b x_0 + b_b y_0 + \text{ec.} = 0 \ , \ a_c x_0 + \text{ec.} = 0 \ ;$

tutti i punti del ditomoide sono dati da

$$M \simeq x . A + y . B + z . C + w . D \simeq x' . A + y' . B + z' . C + w' . D'$$
$$x + y + z + w = 1 = x' + y' + z' + w' \quad ,$$

sostituendovi la (1) ne risultano le

(3) $\quad x = x' + x_0 w' \ , \ y = y' + y_0 w' \ , \ z = z' + z_0 w' \ , \ w = w_0 w'$

i quali valori sostituiti nella (I) la riducono a

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} & a_a x'^2 + a_b x' y' + a_c x' z' \\ & + a_b x' y' + b_b y'^2 + b_c y' z' \\ & + a_c x' z' + b_c y' z' + c_c z'^2 = -(a_d x_0 + b_d y_0 + c_d z_0 + d_d w_0) w_0 w'^2 = -d'_d w'^2 . \end{aligned}$$

Sia ora

(4) $\quad C' \simeq x_1 . A + y_1 . B + z_1 . C \quad , \quad x_1 + y_1 + z_1 = 1$

il polo della retta $z' = 0 \quad w' = 0$ rispetto alla sezione del ditomoide fatta

dal piano $w' = 0$; avremo

$$(5) \quad a_a x_1 + a_b y_1 + a_c z_1 = 0 \quad , \quad a_b x_1 + b_b y_1 + b_c z_1 = 0$$

e la sostituzione delle (4) nella

$$M \simeq x' . A + y' . B + z' . C + w' . D' \simeq x'' . A + y'' . B + z'' . C' + w' . D'$$

darà $(6) \quad x' = x'' + x_1 z'' \ , \ y' = y'' + y_1 z'' \ , \ z' = z_1 z''$

(che soddisfanno alla $x' + y' + z' = x'' + y'' + z''$) e col loro mezzo la (II) si ridurrà alla

$$(III) \quad a_a x''^2 + 2a_b x'' y'' + b_b y''^2 = -(a_c x_1 + b_c y_1 + c_c z_1) z_1 z''^2 - d'_d w'^2 = \\ = -c'_c z''^2 - d'_d w'^2 \ .$$

Finalmente sia

$$(7) \quad B' \simeq x_2 . A + y_2 . B \quad , \quad x_2 + y_2 = 1$$

il punto conjugato-armonico con A rispetto alle due intersezioni della retta AB col ditomoide; sarà

$$(8) \quad a_a x_2 + a_b y_2 = 0 \quad ,$$

e la sostituzione della (7) nella

$$M \simeq x'' . A + y'' . B + z'' . C' + w' . D' \simeq x''' . A + y''' . B' + z'' . C' + w' . D'$$

darà $(9) \quad x'' = x''' + x_2 y''' \quad , \quad y'' = y_2 y''' \quad ,$

che riducono la (III) alla forma canonica

$$(IV) \quad a_a x'''^2 = -(a_b x_2 + b_b y_2) y_2 y'''^2 - c'_c z''^2 - d'_d w'^2 \quad ;$$

la quale ha luogo quando il tetraedro coordinato DABC è polare di sè stesso rispetto al ditomoide; cioè ciascun suo vertice è il polo della faccia opposta (Veggasi: Plücker, *J. Crelle*, 1842, XXIV, N. 7, 22, *System. der Géom. des Raums*, 1846).

262. *Generi e specie delle superficie di secondo ordine.* Il ditomoide

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + d w^2 = 0$$

sarà immaginario se i quattro coefficienti abbiano lo stesso segno; se uno d sia nullo si avrà un cono ditomico col vertice D ; se due c d sieno nulli, si avrà il sistema di due piani passanti per la retta CD . Rimangono due casi che costituiscono due generi differenti di ditomoidi, l' uno è quello in cui due dei coefficienti a b c d hanno segno opposto a quello degli altri due; allora l' equazione potrà prendere la forma

$$(ax + by)(ax - by) = (cz + dw)(cz - dw)$$

e sarà soddisfatta dalla combinazione delle due equazioni

$$ax + by = \lambda(cz + dw) \quad , \quad \lambda(ax - by) = cz - dw$$

oppure dalle due

$$ax + by = \lambda(cz - dw) \qquad \lambda(ax - by) = cz + dw \quad ,$$

quindi abbiamo i ditomoidi *doppiamente rettilinei*. Quando invece tre coefficienti hanno lo stesso segno si hanno i ditomoidi *convessi*. — Tutte le superficie di uno stesso *genere* sono tra loro collineari; e coll' omologia è impossibile passare da un genere ad un altro; sono poi della stessa *specie* le superficie tra loro affini. Così si hanno quattro specie di coni ditomici, cioè il cilindro ellittico, il parabolico e l' iperbolico, ed un solo cono (le specie accennate al § 213 ne sono semplici varietà): i ditomoidi doppiamente rettilinei sono di due specie, cioè iperboloide ad una falda e paraboloide iperbolico; finalmente l' ellissoide, l' iperboloide a due falde, e il paraboloide ellittico sono le tre specie di ditomoidi convessi (*Mia Geom. descritt.* 1851, § 161).

263. Se nell' equazione (I) (§ 260) le $\frac{x}{w}$ $\frac{y}{w}$ $\frac{z}{w}$ sieno le coordinate ortogonali Cartesiane, dopo fatta la riduzione alla (II) si eseguirà il cangiamento di coordinate dato al § 221, e si otterrà la forma canonica. Ora la prima riduzione non è eseguibile quando sia $|\, a_a b_b c_c \,| = 0$ e nello stesso tempo le tre equazioni (2) non sieno riducibili a due sole (giacchè in tal caso bisognerebbe porre $w_0 = 0$). Sarà meglio eseguire da prima il cangiamento delle coordinate ortogonali (§ 221), sicchè ci ridurremo alla

$$a_a x^2 + b_b y^2 + c_c z^2 + d_d w^2 + 2(a_d x + b_d y + c_d z) w = 0$$

e sarà facile vedere in quali casi non si possano fare sparire i termini contenuti nelle parentesi; sicchè oltre la forma canonica si avranno le due

$$b_b y^2 + c_c z^2 + 2 a_d x w = 0$$
$$b_b y^2 + c_c z^2 + d_d w^2 = 0$$

la prima delle quali appartiene ad uno dei due paraboloidi od al cilindro parabolico, e la seconda ad un cilindro ellittico od iperbolico, od a due piani.

264. *Reciproche del Monge.* Dando all' equazione baricentrica d' una superficie la forma

$$z - f(x, y, w) = 0 \quad ,$$

a motivo della proprietà delle funzioni omogenee avremo

$$z - f''' x - f'' y - f' w = 0 \quad ,$$

quindi il tangenziale (§ 259) sarà

$$\{-f''', -f'', 1, -f'\} = \{-f''', -f'', 1, \frac{x}{w} f''' + \frac{y}{w} f'' - \frac{z}{w}\} \; ;$$

posto $w = 1$, e segnate con p q le derivate della z rispetto alle due x y , si vede che il tangenziale nel punto $(x, y, z, 1)$ di una qualsivoglia superficie è

$$\{-p, -q, 1, px + qy - z\} \; ;$$

sicchè $\xi = -p$, $v = -q$, $\zeta = 1$, $\omega = px + qy - z$. I ragionamenti fatti sulle coordinate baricentriche possono ripetersi parola per parola sulle coordinate baricentrane; quindi ponendo

$$D_\xi \omega = p_1 \quad , \quad D_v \omega = q_1 \quad \text{le} \quad x = -p_1 \quad , \quad y = -q_1 \quad , \quad z = p_1 \xi + q_1 v - \omega$$

devono riprodurre la relazione da cui si è partiti. — Mutando le coordinate baricentriche in baricentrane si passa (§ 248) da una superficie ad una sua derivata-polare; tali sono per conseguenza le superficie i cui punti sono indicati per l'una da $(x, y, z, 1,)$ e per l'altra da $(-p, -q, 1, px + qy - z)$. Si vede che ciò ha un' intima relazione colle superficie *reciproche* considerate dal Monge. — Anche tra le derivate-parziali-seconde

$$D_x^2 z = r \quad , \quad D_x D_y z = s \quad , \quad D_y^2 z = t \; ; \; D_\xi^2 \omega = r_1 \quad , \quad D_\xi D_v \omega = s_1 \quad , \quad D_v^2 \omega = t_1$$

hanno luogo le osservabili relazioni

$$\frac{s}{s_1} = -\frac{r}{t_1} = -\frac{t}{r_1} \quad , \quad s s_1 = -1 - r r_1 = -1 - t t_1 \quad , \quad (rt - s^2)(r_1 t_1 - s_1^2) = 1 \quad .$$

Veggasi Plücker, *J. Crelle*, 1832, IX, p. 124.

265. *Càmpili.* Nello spazio oltre le superficie curve che possono considerarsi come un luogo di punti o come un inviluppo di piani, vi è un altro oggetto cui non si diede un nome speciale, e che perciò diremo provvisoriamente un *càmpilo;* considerato come un luogo di punti, esso è una *curva-gobba*, considerato come un inviluppo di piani, è una *superficie-sviluppabile.* I punti di un càmpilo sono espressi da

$$(1) \quad M \simeq x.A + y.B + z.C + w.C \quad , \quad x + y + z + w = 1$$

essendo x y z w funzioni date di una variabile t ; le sue tangenti

(o generatrici che voglian dirsi) hanno i punti N dati da

$$(2) \qquad MN \simeq \tau . dM$$

essendo τ una nuova variabile, e con d segnandosi la derivata rispetto alla t. I tangenziali del càmpilo (ossia i piani osculatori della curva gobba) sono indicati da

$$(3) \quad \{ \mid y dz d^2w \mid , -- \mid z dw d^2x \mid , \mid w dx d^2y \mid , — \mid x dy d^2z \mid \}$$

essendo $\mid x dy d^2z \mid = x dy d^2z — x dz d^2y — y dx d^2z +$ ecc.

266. Il numero dei punti reali od immaginarii, in cui un piano taglia una curva gobba, si dirà l' *ordine* del càmpilo, e ne sarà la *classe* il numero dei tangenziali alla superficie sviluppabile, che hanno un punto comune. Se le coordinate baricentriche sono funzioni razionali della variabile t, l' ordine n è il massimo esponente della t sia nei numeratori sia nel denominatore comune delle x y z w; così pure la classe m è il massimo esponente della t nei valori delle coordinate baricentrane $\xi = \mid y dz d^2w \mid$, ecc. Le sezioni piane della superficie sviluppabile sono curve dell' ordine r (generalmente parlando differente da n) e della classe m (che è evidentemente quella stessa del càmpilo); così pure i coni, che hanno un vertice arbitrario e per direttrice la curva-gobba, sono dell' ordine n, e della classe r, la quale è uguale all' ordine delle sezioni; infatti per ciascun piano passante per la retta SR e toccante il cono $SMM_1M_2 \ldots$ esiste una tangente MN della curva gobba MM_1M_2, e quindi la SR incontra altrettante generatrici della superficie sviluppabile; a questo r daremo, seguendo il Cayley, il nome di *rango* del càmpilo. Si confronti e si notino le differenze col § 258. — Potremo chiamare il càmpilo una $n.^{toma}$ $m.^{attomenica}$ (il qual nome abbastanza si distingue da $n.^{toma}$ $m.^{attomena}$, che disegna una curva piana) *del rango* $r.^{esimo}$, intendendo con ciò che la superficie sviluppabile ha le sezioni $r.^{tome}$, ed i coni, che hanno per direttrice la curva gobba, sono $r.^{attomenici}$.

267. La retta DM prolungata fino ad incontrare in M_1 la faccia opposta del tetraedro coordinato darà

$$(4) \qquad M_1 \simeq x . A + y . B + z . C$$

per l' espressione baricentrica della traccia sul piano ABC del cono, che ha il vertice D e la curva gobba per direttrice; l' espressione baricentrale di

questo cono sarà (§ 205)

$$(5) \quad \mathbf{m}_1 \simeq X.\,\mathbf{a} + Y.\,\mathbf{b} + Z.\,\mathbf{c}$$

essendo $\mathbf{m}_1$ la retta DMM_1 ed $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$ tre rette tra loro uguali prese sulle DA DB DC ; paragonando coll' equipollenza

$$DM_1 \simeq x.\,DA + y.\,DB + z.\,DC$$

si vede che le coordinate baricentrali X Y Z del cono differiscono dalle x y z soltanto per tre coefficienti costanti.

268. I tangenziali della superficie sviluppabile sono dati da

$$(3) \quad \mu \simeq \xi.\,DCB + \upsilon.\,DAC + \zeta.\,DBA + \omega.\,ABC \ ,$$

perciò essi tagliano il piano ABC in quelle stesse rette, in cui è tagliato dai piani

$$(6) \quad \mu_1 \simeq \xi.\,DCB + \upsilon.\,DAC + \zeta.\,DBA \ ,$$

i quali inviluppano un cono avente (§ 205) l' espressione baricentrana

$$\mu_1 \simeq \xi_1 \operatorname{sen} BDC.\,\alpha + \upsilon_1.\operatorname{sen} CDA.\,\beta + \zeta_1.\operatorname{sen} ADB.\,\gamma \ ,$$

paragonando queste due equazioni si vede che le coordinate baricentrane del cono ξ_1 υ_1 ζ_1 differiscono dalle ξ υ ζ per coefficienti costanti, cioè

$$\xi = \xi_1 \operatorname{gr}.DA \ , \quad \upsilon = \upsilon_1 \operatorname{gr} DB \ , \quad \zeta = \zeta_1 \operatorname{gr} DC \ .$$

269. *Tritoma-triattomenica di quarto rango.* Quando le coordinate baricentriche x y z w sono funzioni razionali della t , l' equipollenza (1) del § 265 di terzo grado ha la forma più generale

$$M \simeq \frac{a.\,A + bt.\,B + ct^2.\,C + dt^3.\,D}{a + bt + ct^2 + dt^3} \ ;$$

se cerchiamo soltanto proprietà projettive possiamo (§ 128) includere un coefficiente costante in ciascuna lettera indicante un punto, sicchè l' espressione baricentrica della curva diventa

$$(1) \quad M \simeq A + t.\,B + t^2.\,C + t^3.\,D \ ,$$

ossia i punti del càmpilo sono indicati da

$$(1 \ , \ t \ , \ t^2 \ , \ t^3) \ .$$

I suoi piani tangenziali si trovano (§ 265)

$$(3) \qquad \{t^3 \ , \ -3t^2 \ , \ 3t \ , \ -1\} \ ;$$

infatti i punti infinitamente vicini a M sono dati da

$$M' \simeq A + t.\,B + t^2.\,C + t^3.\,D + (B + 2t.\,C + 3t^2.\,D)\,dt + (C + 3t.\,D)\,dt^2$$

essendo dt infinitesima, sicchè quel piano comprende tre punti infinitamente vicini. La (3) essendo di terzo grado mostra che la superficie-sviluppabile è triattomenica. — I coni che hanno i vertici in D ed in A e per direttrice la tritoma-gobba tagliano le facce opposte ABC DCB (§ 267) del tetraedro coordinato nelle ditome

$$(1, t, t^2, 0) \quad , \quad (0, t, t^2, t^3)$$

le quali hanno le equazioni baricentriche

$$xz = y^2 \qquad yw = z^2$$

che sono anche le equazioni baricentrali dei coni stessi riferiti il primo ai tre assi coordinati DA DB DC ed il secondo ai tre AB AC AD ; dunque *la tritoma gobba è l' intersezione di due coni ditomici che hanno la generatrice comune* $y = 0 \quad z = 0$, lungo la quale il primo cono è toccato dal piano $z = 0$, ed il secondo dal piano $y = 0$; essi hanno anche rispettivamente le generatrici

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0 \quad , \quad w = 0$$

che sono tangenti alla tritoma nei punti D A , e nelle quali i tangenziali

$$x = 0 \qquad w = 0$$

dei coni sono i piani osculatori della curva.

270. La superficie sviluppabile triattomenica taglia il piano ABC in una curva, che è direttrice di un cono col vertice D , la cui espressione baricentrana (§ 268) differisce soltanto per coefficienti costanti dalla

$$\mu_1 \simeq t^3 . \alpha - 3t^2 . \beta + 3t . \gamma \quad ,$$

cioè ha l' equazione baricentrana

$$3 \xi \zeta = \upsilon^2 \quad ;$$

quindi la curva sul piano ABC è una diattomena (e perciò anche ditoma), e la sua equazione baricentrale riferita al triangolo coordinato ABC sarà della forma (senza badare al coefficiente numerico)

$$XZ = Y^2 \quad .$$

Similmente si trova che la superficie-sviluppabile taglia il piano DCB nella diattomena, che rispetto ai lati del triangolo DCB ha l' equazione baricentrale $YW = Z^2$; dunque *la superficie sviluppabile triattomenica è genera-*

ta da un piano che tocca le due ditome

$$xz = y^2 \quad , \quad yw = z^2$$

aventi la tangente comune $y = 0$, $z = 0$, la quale tocca la prima ditoma nel punto

C e la seconda in B ;

le ditome hanno anche rispettivamente le tangenti

$$x = 0 \ , \ y = 0 \quad ; \quad z = 0 \ , \ w = 0$$

che le toccano nei punti

A D

appartenenti alla tritoma.

271. Mutando t in $t+f$ oppure in $\frac{1}{t+f}$ si trova che le espressioni baricentriche o baricentrane della tritoma-triattomenica hanno sempre eguali forme, comunque sieno scelti i punti A D sulla curva gobba, purchè sieno AB DC le sue tangenti ed ABC DCB i suoi piani osculatori. — Quantunque si venga per tal modo a dimostrare che ogni cono avente per direttrice la tritoma gobba ed il vertice nella curva stessa sia diattomenico, e che ogni tangenziale della superficie sviluppabile la tagli in una ditoma, pure rimane a trovare la classe di un cono col vertice fuori della curva e l' ordine delle sezioni fatte da un piano non tangenziale. — Tutte le tangenti della tritoma gobba, cioè le rette che passano per due punti infinitamente vicini (§ 269) hanno le equazioni baricentriche

$$t^2 x - 2ty + z = 0 \ , \ t^2 y - 2tz + w = 0 \ ,$$

eliminando la variabile t si ha pel luogo di tutte le tangenti, cioè per la superficie sviluppabile, l' equazione

$$(xw - yz)^2 = 4\,(yw - z^2)\,(xz - y^2) \ ;$$

che è del quarto grado; dunque (§ 266) la *tritoma-triattomenica* è del *rango quarto.*

272. La precedente tritoma triattomenica è di un solo *genere*, nè credo possa dirsi che un punto differisca essenzialmente da un altro. Riguardo alle specie si potrà distinguere la specie del § 22, che ha un piano tangenziale situato all' infinito, essa sta tra i due sotto-generi distinti dall' avere a distanza infinita un solo o tre punti.

273. Intorno agli argomenti trattati negli otto ultimi §§ si veggano: Möbius, *Der barycent. Calcul. Leipzig* 1827, § 98. — Poncelet, *J. Crelle*, 1829, IV, p. 19; *Bull. Fér.* 1829, XI, n.° 144. — Chasles, *Aperçu, Brux.* 1837, Nota 33. — Grassmann, *J. Crelle*, 1843, XXV, n.° 4. — Saint-Venant, *J. Ec. polytechn.* 1845, XXX, p. 1 ... 76. — Cayley, *J. Liouv., juin* 1845, X, p. 245, *août* 1844, IX, p. 285; *The Cambrid. and Dubl. Math. J.* V. — Salmon, *ivi.* — Bertrand, *Comptes R.* 28 *oct.* 1850, XXX, p. 623. — Spottinswoode, *J. Crelle*, 1851, XLII, n.° 38. — Jonquières, *Mélanges Paris*, 1856, p. 13. — Terquem, *N. Annal*, 1856, XV, p. 357. — Chasles, *Comptes R.* 1843, 10 *août*, 1857, XL, p. 189, *J. Liouv., nov.* 1857, II, p. 397. — Cremona, *Ann. Tortol.* 1858, I, p. 164, 171, p. 278 ... 295, 1859, II, p. 19 ... 29, p. 65 ... 81 e p. 201 ... 207.

274. Avendo cercato di presentare agli studiosi Italiani i principali metodi di Geometria analitica credetti opportuno di aggiungere le citazioni delle memorie, che almeno in parte io conosco, e che si riferiscono agli argomenti da me trattati. Se il mio esempio fosse seguito da quelli che sono bene istrutti nelle pubblicazioni matematiche, si potrebbe in qualche modo supplire alla mancanza di opere generali, e di repertorii, che facciano conoscere ciò che sta nei Giornali o nelle Memorie delle Accademie. Distribuii le citazioni nei §§ 48, 56, 90, 146, 192, 198, 217, 220, 223, 240, 258, 259, 261, 264, 273, piuttostochè riunirle alla fine della memoria come soglio fare. — Fui condotto ad usare parecchie parole nuove, nel che mi confortarono le osservazioni del Dupin sulle opportune riforme della nomenclatura matematica: prego che non si giudichi qualche parola presa isolatamente, bensì tutto l' insieme; a facilitare la ricerca del loro significato gioverà il seguente

INDICE.

Abbracciante § 258. Abbreviato (Calcolo) 128. Affini 91. Algebriche (Curve) 10, 76. *Algebrico-razionali* (Curve) 10, 55, 76, 136, 137. *Allineamento* (*Punto di*) 175. Anarmonico 129. Angolo 73, 208. *Apice* 33, 153, 158. Armonici 30, 129.

Baricentrale §§ 95, 96, 100, 103, 134, 201. *Baricentrano*. 204, 244, 249. *Baricentro* e baricentrico 30, 82, 92, 95, 100, 107, 110, 120, 133, 243, 251, 253. Bertrand 273. *Biradiale* 231. Bobillier 90, 102, 146. Breton 81. Brianchon 155, 157, 259. Brioschi 81, 192.

Càmpili § 265. Cangiamento delle coordinate 122, 147, 141, 221, 248, 261. Canonica 221, 261. Cardioide 50, 57. Caratteristica 239. Carnot 146. *Cartesiane* 62, 207, 224, 241.

Cassiniana 57. Catenaria 38. Cauchy 5, 25, 89, 223, 240. Cayley 56, 198, 223, 258, 266, 273. Caustica secondaria 42. Ceva 92. Centro 81, 164. Chasles 3, 4, 48, 89, 90, 146, 220, 236, 240, 273. Chelini 223. Choquet 81, 198. Ciclici (Piani) 218. Cicloide 38. Circolo 49, 53, 150. Classe 55, 76, 137, 258, 266. *Collineari* 29, 30, 159. *Composta-equipollente* 6. Concoide 38, 53, 57. *Congruenze* 7, 67, 69, 102, 246. Coni 211. *Conjugati* 37, 226. Contatto (Punto di) 74, 259. Coordinate *baricentrali* 95, 115, 133, 147 ; *baricentrane* 204, 244, 249; *baricentriche* 92, 133, 243; *cartesiane* 62, 116, 207, 241; *centrali* 59, *circotari* 60, ellittiche 61, *paraboliche* 58, *plucheriane* 65, 116, 242. Coriolis 92, 146. *Correlative* 87, 158, 214. Coste 198. Cotes 83, Cramer 180, Cremona 273. Curve 38, gobbe 22, 265, Curvatura (Linee di) 56.

Dandelin §§ 40, 48. Dedekin 223. Derivate 3, 29, 40, 49, 52, 53, 56. Derivate positive o negative 47, 57. Derivate-polari 147, 248, 264. Diametri 81, 82, 164. *Diattòmene* 76, 149. *Diattomènici* 212. *Diattomenòide* 258. Dieu 48. Differenziazione 36. Distanze 71, 72, 100, 111, 135, 208, 247. *Ditome* 63, 76, 149, 151, 154, 159, 161, 162. *Ditòmici* 212. *Ditomòide* 258, 260, 262. *Doppio-rapporto* 129, 152. Dualità 200. Dupin 258. *Duplicazione* 56, 217. Durckenmuller 90.

Ellisse §§ 12, 31, 38, 53, 54, 57. Ellisse sferica 212. Ellissoide 21, 261. Epicicloide 38, 57. *Equipoltenze* 5, 18, 27, 38. *Espressioni* 101, 133, 134. Esagono 28.

Frankenheim § 223. Faure 48. *Fittizii* (Punti) 170, 173. Flessi 81, 165, 166, 175, 192, 198, 199 Focali 218. Foco 16, 32, 114, 239.

Gerlin § 57. *Genere* delle curve 159, 194, 262, 272. Gergonne 76, 89, 90, 102, 146. Giorgini 240. *Giratore* 236. Gobbe (Curve) 22, 265, 269. Grassmann 5, 90, 245, 259, 273. Grunert 223. Gudermann 210, 220. Guilhem 240.

Hamilton, *hamiltoniani* §§ 5, 224. Hesse 146, 148, 192, 198, 222. Hirst 48. Ideale (Apice o Secante) 33, 173. Immaginarii 35, 170, 174, 199. Inclinazione 28, 208. Infinito (Retta o Punto all') 118, 127, 179, 183, 254. *Inversione* 28, 40, 56, 216. Inviluppi 65, 102, 137, 138. Involuzione 28, 149, 209. Iperbola 57. Jacobi 198, 223. Joachimsthal 90, 146. Jonquieres 90, 170, 240, 273.

Lamé § 61. Lebesgue 90, 223, 259. Legallais 48. Lemniscate 54, 57. Liouville 48, 56, 79, 90, 198. Livet 259. Luoghi 62, 102, 136, 139, 140.

Mac-Laurin §§ 81, 89, 166, 167, 170. Metodi 1, 91, 128, 133. Minich 240. Möbius 4, 30, 92, 95, 146, 240, 273. Movimento istantaneo 236. Monge 259, 264. *Multipliei (Rapporti)* 130, 152. Newton 82, 180. Olivier 259. Omogenee (Equazioni) 62, 114, 142, 255. Omologia 159. Ordine 55, 76, 136, 258, 266. Osculatrice 63.

Paoli § 185. Padula 198. Pappo 9. Parabole 15, 34, 38, 49, 57. Piola 223. Plucker 45, 63, 65, 124, 146, 173, 192, 198, 261, 264. Podaire 41, 44. Poinsot 236, 240. Polare 64, 78, 81, 82, 119, 211, 259. *Pòtica* 87, 119, 211. Polo 75, 87, 89, 119, 211, 259. Poncelet 3, 78, 198, 273. Prima-polare 78, 119. *Prima-polica* 87. *Prima-polare-rettitinea* 81, 86, 120. *Primo-polare* 259. *Primo-polo* 88, 259. Projettivi 9, 29, 91, 128, 129. Prony 240. Quadrilatero completo 132. Quaternioni 225, 231. Quetelet 40, 48.

Raabe 48. Radicale (Centro) 112. *Radio* 230. Raggio di curvatura 39. Rami infiniti 179, 183. *Ramuno* 35. Rango 258, 266, 271. Rapporti projettivi 130, 152, 196. *Reciproche* 40, 43, 77, 189, 248, 264. *Reciproco-inverso-reciproca* 46. Regresso 165, 175, 198. *Rivolta* (Punto di)

175. Roberts 48, 56, 213, 217. Rodrigues 223, 240. Rotazioni vegg. Movimento. Rubini 198, 220.

Saint-Venant §§ 5, 223, 273. Salmon 4, 95, 143, 146, 192, 198. *Scacchiere algebrico* 180. Secante-comune 110, 153. *Semieongruenze* 246. Serie infinite 181. Serpentement 175. Serret 48. Sfera 200, 257. *Singolarità* 175, 179, 182, 186. Somma-geometrica 5. Sonnet 240. *Specie* 194, 262, 272. Spirale logaritmica 52. Spottinswoode 275. Steiner 3, 4, 48, 81, 198. 220. *Stelle* 129, 152. Strebor veggasi Roberts. Sturm 48, 146. *Sudduplicate* 57, 217. *Supplementari* 215. *Sviluppante-caustica* 42, 53 Sviluppabili 265.

Talbot § 54. Tangenti 11, 63. *Tangenziale* 211, 259. *Tangenziale (Distanza)* 111, 133, 174, 253. Terquem 90, 146, 220, 259. Tetraedroide 258. *Tetragono completo* 154. *Tetràtoma* 51, 76. *Tetratomòide* 258. *Tetrattòmena* 76, 168 *Tetrattomenòide* 258. Thomson 60. Tortolini 48, 220. Transon 198. *Trasformata* 56. Trasformazione delle coordinate vegg. Cangiamento. Trattoria 38. Triangolo *coordinato* 92, 115, 133 Triangolo sferico 234. *Triattòmena* 76, 163. *Triattomèniea* 269. *Trierateri* 194. *Trinioni* 225, 232. *Tritome* 51, 76, 81, 163, 166, 168, 193. *Tritoma* gobba *triattomèniea* 22, 269. *Triplicata* 57. *Turbazione* 16.

Unitario § 227. Velocità 16. Wantzel 81. Woepcke 146. Wolf 48.

(*Letta il* 16 *gennaio* 1860.)

AGGIUNTA AL § 218.

Le equazioni baricentrane di due coni omofocali (simil cosa potrebbe dirsi delle equazioni baricentrali di due coni aventi gli stessi piani ciclici) differiscono tra di loro per un multiplo di

$$\Omega = \xi^2 + v^2 + \zeta^2 \quad ;$$

ciò risulta dalle (2) (*f*) del § 218, e può estendersi a tutte le equazioni a coordinate ortogonali, giacchè al cangiare di queste non mutasi la funzione Ω . Per tal modo si possono dimostrare i teoremi sui coni omofocali pubblicati dal Chasles nel *Compte rendu* 26 *mars* 1860, L, p. 623. (*Atti Istit. Veneto* 18 *giugno* 1860).

AGGIUNTA AL § 239.

Quando il movimento ha luogo in un piano, oppure intorno ad un punto, è facile determinare non solo la tangente di ciascuna trajettoria, ma eziandio il centro di curvatura — Da quanto riportai negli Atti dell' Istituto (*giugno.* 1859, IV, p. 991) risulta che la tangente e la velocità di ogni punto M

di un piano è perpendicolare e proporzionale alla sua distanza MO dal centro d' *istantanea rotazione* O , e la *turbazione* (§ 16) del movimento è proporzionale alla retta MU , essendo U un altro punto costante per tutti i punti del piano; dal che risulta che se MV è la projezione ortogonale della retta MU sulla MO , il centro di curvatura R della trajettoria descritta dal punto M è dato da

$$(A) \quad MR \simeq (MO)^2 : MV \quad .$$

Similmente se un corpo si muove intorno ad un punto S , il cono descritto da una qualsiasi retta SM ha il tangenziale perpendicolare al piano OSM , essendo SO l'asse d'*istantanea rotazione.* Tagliando questo corpo con un piano perpendicolare all' asse SO risulta evidente la dipendenza tra questo teorema ed il primo fra i due precedenti relativi al moto nel piano. Il prof. Minich (*Atti*, 12 *dic.* 1859, V, p. 183, e 12 *marzo* 1860, V, 506) scoperse un teorema, pel quale è facile determinare anche l'asse di curvatura SR delle trajettorie descritte dai punti della retta SM . Per mostrar meglio la stretta relazione tra i due teoremi relativi alla curvatura, eseguiamo sulla relazione (*A*) una trasformazione che permetta di applicarla anche alla figura intorno al punto S (*Atti*, V, p. 196); un facilissimo calcolo (vegg. *Atti*, IV, p. 996 equazioni (7) ed (8)) muta la (*A*) nella

$$(B) \quad \frac{1}{OM} = \frac{1}{OV} + \frac{1}{OR} \quad .$$

Quando sulla retta OU sia dato il punto M_0 ed il corrispondente R_0 determinato mediante la

$$(A_0) \quad MR_0 = (MO)^2 : MU \quad , \quad \text{ossia la} \quad (B_0) \quad \frac{1}{OM_0} = \frac{1}{OU} + \frac{1}{OR_0} \quad ,$$

la dipendenza tra M ed R può (*Atti*, V, p. 512) stabilirsi, senza adoperare il punto V , osservando che le rette MM_0 RR_0 deggiono incontrarsi in un punto F della retta OF perpendicolare alla ORM . Infatti chiamate m m_0 r r_0 le distanze OM OM_0 OR OR_0 e detto α l' angolo MOM_0 , col metodo delle equipollenze avremo

$$OM \simeq m \quad , \quad OM_0 \simeq m_0 \, \gamma^{\alpha} \simeq m_0 \cos\alpha + \gamma \, m_0 \operatorname{sen}\alpha$$

e posto

$$OF \simeq \frac{m m_0 \operatorname{sen}\alpha}{m - m_0 \cos\alpha} \, \gamma \simeq \frac{m . OM_0 - m_0 \cos\alpha . OM}{m - m_0 \cos\alpha}$$

il punto F apparterrà alla retta MM_0 ; similmente la retta RR_0 passa pel punto H determinato da $OH \simeq \frac{rr_0 \operatorname{sen}\alpha}{r - r_0 \cos\alpha}$, ora essendo $OV = OU \cos\alpha$ le (*B*) (B_0) danno

$$\frac{1}{m_0} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{OU} = \frac{\cos\alpha}{OV} = \frac{\cos\alpha}{m} - \frac{\cos\alpha}{r}$$

cioè $\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m}\cos\alpha = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\cos\alpha$, e quindi il punto H coincide con F .

Secondo il teorema del Minich, che io poi dimostrai (*Atti*, 15 *aprile*, V, p. 519) mediante il calcolo dei quaternioni, se sia SO l'asse di istantanea rotazione di un corpo che si muove intorno al punto S , e si tagli il corpo con un piano perpendicolare ad SO , ad ogni retta SM descrivente un cono coll'asse SR corrisponde nel piano predetto un punto M , la cui trajettoria ha il centro di curvatura R . È palese che i piani SUV ed SOF sono perpendicolari al piano SOMR , sicchè anche nella figura intorno al punto S vi è una retta SU , che ha ufficio simile a quello del punto U nella figura piana; e se nel piano SOU si conosce l'asse SR_0 del cono descritto da una retta SM_0 , in ogni altro piano SOMR la corrispondenza fra SM ed SR si potrà determinare col mezzo dei piani SMM_0 SRR_0 , che deggiono esser *congruenti* col piano SOF perpendicolare ad SOMR .

Il teorema dà immediatamente anche la curvatura dell'inviluppo di una curva mobile nel piano; poichè trovato il punto P della curva, la cui normale passa per O , se sia M il suo centro di curvatura in P , il corrispondente R sarà centro di curvatura tanto della trajettoria descritta da M quanto dell'inviluppo in P .

Per compiere questa teoria rimane da aggiungere i due seguenti teoremi *non* corrispondenti (*Atti* IV, p. 997, § 9, e V, p. 524): Nel piano: se una retta ruota e striscia sul punto D il centro d'istantanea rotazione O è situato sulla retta DO perpendicolare alla retta mobile, e determinato su quella il punto V_1 in guisa che $OV_1 \simeq DO$, $DV_1 \simeq 2.DO$, il centro d'istantanea turbazione U sarà situato sulla V_1U innalzata perpendicolarmente alla V_1O.

Intorno ad un punto S : se un piano ruota e striscia sulla retta SD l'asse d'istantanea rotazione è situata sul piano SDO perpendicolare al piano mobile, e determinata su quello la retta SV_1 in guisa che $2.\operatorname{tg} OSV_1 = -\operatorname{sen}(2\,OSD)$ sarà poi SV_1U perpendicolare ad $SDOV_1$.

La rotazione $2t$ intorno all' asse

$$\nu_3 + \nu_3 ct + \nu_1 at$$

eseguita sulla retta

$$SM \simeq \nu_3 \cos m + (\nu_1 \cos n + \nu_2 \operatorname{sen} n) \operatorname{sen} m$$

equivale alla rotazione 2τ intorno all' asse

$$SR \simeq \nu_3 \cos r + (\nu_1 \cos n + \nu_2 \operatorname{sen} n) \operatorname{sen} r \quad ,$$

purchè sia

$$\operatorname{sen} m \operatorname{sen} r = a \operatorname{sen} (m-r) \operatorname{sen} n \quad , \quad \text{cioè} \quad \operatorname{ctg} m = \operatorname{ctg} r - \frac{1}{a \operatorname{sen} n} \quad ,$$

e

$$\tau = \frac{t \operatorname{sen} m}{\operatorname{sen} (m-r)} + \frac{t^2 \operatorname{sen} m \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} n \operatorname{sen}^2 (m-r)} \left(\frac{c}{a} \operatorname{sen} m - \cos m \cos n \right) \quad ;$$

quindi i punti il cui moto istantaneo è sensibilmente uniforme (rispetto al tempo t) sono dati da $c \operatorname{tg} m = a \cos n$, cioè appartengono ad un cono di 3.ª specie.

SULLO

SCHELETRO DEGLI *SQUALI*

RICERCHE ANATOMICHE

DEL S. C. PROF. RAFFAELE MOLIN

JADRENSE

Con 10 Tavole.

Già nel 1834 *Giov. Müller* esponeva alla regia accademia delle scienze di Berlino i risultamenti delle sue ricerche sullo scheletro dei plagiostomi (1); i quali erano i seguenti.

Nelle vertebre de'plagiostomi si devono distinguere il corpo delle vertebre; gli archi vertebrali; le cartilagini intercalari superiori, ovvero dei corpi delle vertebre; le cartilagini intercalari degli archi; e le cartilagini intercalari spinali. Negli storioni i primi ed i secondi sono molto piccoli; nelle chimere diventano più grandi, e in queste mancano le *ossa intercalaria* delle cartilagini basilari, nonchè le *ossa intercalaria spinalia;* nei petromizonti e negli squali si rinvengono soltanto *ossa intercalaria cruralia* eguali in grandezza agli archi delle vertebre. Le branche arcuate poggiano sul corpo delle vertebre, mentre le cartilagini intercalari degli squali sovrastano al piano di unione di due corpi vertebrali, e quelle sono continuazione della cartilagine jalina dell' interno del corpo della vertebra.

Nella *Raja clavata* mancano le cartilagini intercrurali soltanto nella porzione posteriore della colonna vertebrale. Nelle *Zygænæ* vi sono cartilagini intercalari spinali corrispondenti in numero a quello degli archi crurali e delle cartilagini intercrurali prese insieme; ed in alcune vertebre della porzione mediana della colonna vertebrale, ad ogni vertebra corrispondono da ciascun lato

(1) Johannes Müller, *Vergleichende Anatomie der Myxinoiden.* Abhandlungen der Königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1836, pag. 154.

due cartilagini intercrurali. Nel genere *Rhinobatus* ciascun processo spinoso corrisponde a due e non già ad una sola vertebra. Nelle razze le vertebre della sesta parte anteriore della colonna formano una linea continua, con fondo molto esile, inquantochè i corpi delle vertebre indistinte si assottigliano, e si circondano esternamente di cartilagine jalina e pavimentosa, ma non contengono nemmeno un nocciolo di sostanza ossea più densa. Finalmente: i processi spinosi inferiori nelle vertebre caudali di alcuni plagiostomi sono distinti mediante una sutura dai relativi corpi vertebrali.

Ma allorchè il celeberrimo notomista di Berlino esponeva questi risultamenti, non s' era prefisso altro scopo che quello di arrivare mediante comparazioni a determinare il vero significato di ogni parte d' una vertebra.

Più tardi appena, nel 1836, *Agassiz* (1) lamentando la difficoltà di determinare i Placoidi fossili dai loro frammenti, scriveva:

« D' un autre côté, la rareté des squelettes bien conservés de ces poissons » fait que l' on ne peut pas même s' appuyer sur l' analogie que présentent les » espèces vivantes pour arriver à des résultats plus certains que ceux que fournit » dès-à présent le seul gisement des fossiles. Il serait donc très à désirer que » les naturalistes voyageurs ne perdissent pas de vue les recherches qui peuvent » avancer cette partie intéressante de la Paléontologie. Une collection de pois- » sons cartilagineux faite dans ce sens exigerait peu de peine; il suffirait de dé- » tacher leurs mâchoires, et d' y joindre quelques vertèbres de différentes ré- » gions du corps, quelques rayons des nageoires, surtout les grands rayons os- » seux qui distinguent certaines espèces de Squales et de Raies . . . . . »

Continuava quindi alla pagina 360:

« Dès le commencement de mes Recherches sur les poissons fossiles, j' ai » pressenti les difficultés que je rencontrerais à déterminer les vertèbres de » Squales fossiles que l' on trouve isolées dans divers terrains, et j' ai fait tous » mes efforts pour obtenir des données précises sur les formes variées qu' elles » affectent dans les différens types de cette famille. Malheureusement, il y a » quelques années, les genres et les espèces des diverses familles de l' ordre des » Placoïdes, n' étaient pas encore déterminées avec une précision assez rigou- » reuse, et les collections les plus considérables qui existent maintenant, et que » j' ai visitées, contenaient un trop petit nombre de squelettes pour fournir les

(1) L.s Agassiz, *Recherches sur les poissons fossiles.* Tome III, 1836. Preface, pag. VI.

» matériaux nécessaires pour le travail que j' avais en vue, et depuis la publica-
» tion de l' ouvrage des MM. Müller et Henle je n' ai pas pu revenir en détail
» sur ce sujet, comme je l' aurais désiré. L' invitation que j' avais adressée
» aux naturalistes, de réunir leurs efforts aux miens pour obtenir des voyageurs,
» sinon des squelettes, du moins des portions de squelette jointes à des mâ-
» choires pour qu' on pût apprendre à distinguer les différens types de vertè-
» bres associés aux différens types de dentition, était restée sans résultat.
» J' aurais dû dès lors renoncer à mon désir de déterminer les vertèbres isolées
» de Placoïdes que j' avais appris à connaître, si une dernière tentative que j'ai
» faite pour obtenir des renseignemens suffisans sur les vertèbres des Squales
» vivans n' avait été couronnée d' un plein succès. Voyant arriver le moment
» où je ne pourrais plus différer l' impression de cette partie de mon ouvrage,
» je m' adressai à M. le professeur J. Müller, en le priant de bien vouloir me
» faire part des observations qu'il pourrait avoir faites sur la structure des Pla-
» coïdes. Non seulement il a bien voulu me communiquer une description dé-
» taillée des principaux types de vertèbres de la famille des Squales, mais encore
» il a accompagné cette précieuse notice de très-belles figures représentant tous
» ces types. M. Müller m' ayant autorisé à publier ces renseignemens, je ne puis
» mieux faire ressortir tout le prix que j'attache à cette communication bienveil-
» lante, qu' en reproduisant ici littéralement ses observations. »

Ho riportato testualmente queste parole del naturalista di Neuchâtel, perchè esse nella loro semplicità dimostrano quanto fosse necessario uno studio più esatto sullo scheletro dei plagiostomi.

Or ecco in breve quanto *Giov. Müller* insegnava ad *Agassiz*:

I corpi delle vertebre si formano dalla guaina della corda dorsale. Le branche pari superiori formano gli archi vertebrali superiori, e le inferiori i processi trasversi ma nella coda gli archi inferiori.

« . . . . . .

» Les vertèbres des Plagiostomes, continue M. Müller, se forment de la même
» manière; mais chez les Squales, il existent généralement des pièces accessoires,
» les cartilages intercruraux, indépendamment des pièces supérieures ordinaires
» ou cartilages cruraux; et chez plusieurs familles, en particulier chez les Squa-
» les ovipares (*Scyllium*), et chez les Squales munis d'une membrane nyctitante
» (*Mustelus, Galeus, Galeocerdo, Carcharias, Sphyrna*), on trouve en outre à
» l' endroit où les pièces vertèbrales convergent, des pièces impaires supérieures

» qui correspondent aux cartilages intercruraux aussi bien qu' aux cartilages » cruraux, et qui alternent avec eux. Chez les autres familles de Squales, ex- » cepté les Anges (*Squatina*), ces pièces superieures impaires manquent; les » cartilages cruraux et intercruraux des deux côtés se touchent, ou sont du » moins réunis par une masse cartilagineuse indivise comme chez les Lamies. » Les pièces vertébrales servent d' insertion aux cartilages costaux; cependant, » dans certains cas, ces derniers ne s'attachent pas seulement au cartilage trans- » verse, mais se fixent entre deux cartilages transverses, comme dans les » genres *Carcharias*, *Heptanchus*, et *Alopias*, et alors le cartilage costal, par » suite du racornissement des squelettes desséchés, apparaît comme un cartilage » intertransversal.

» Le développement relatif des différentes parties des vertèbres offre des » variations considérables dans les diverses familles. Chez quelques Squales, la » colonne vertébrale entière reste cartilagineuse durant toute la vie, comme » dans les genres *Echinorhinus*, *Hexanchus* et *Heptanchus*. Chez d' autres, » l' ossification est limitée à une couche mince de la partie centrale, qui entoure » immédiatement les cavités coniques des corps des vertèbres; tout le rest de- » meure cartilagineux, comme dans les genres *Acanthias* et *Centrina*. Chez » d' autres encore, les pièces paires, c' est-à-dire les cartilages cruraux, intercru- » raux, transverses, et les pièces supérieures impaires ou moyennes s' ossifient » partiellement, ou du moins à la surface, et alors il se développe sur les car- » tilages une écorce ossifiée, semblable à l' écorce qui recouvre les cartilages » de la tête et les autres cartilages des Plagiostomes, et que j' ai decrits dans » l' ostéologie des Myxinoïdes. Dans les genres *Scyllium* et *Mustelus*, les corps » osseux des vertèbres est déprimé au milieu de sa longueur, surtout dans le » genre *Mustelus*. Cette dépression exterieure correspond au point où les deux » cavités coniques se rencontrent à l' intérieur. Les corps de vertèbres de la » plupart des genres, qui ont une membrane nyctitante, et en particulier des » *Carcharias*, *Galeus* et *Sphyrna*, sont plus épais plus uniformes et très-peu » comprimés dans cet endroit. Les corps de vertèbres des *Scyllium*, et en gé- » néral de tous les Squales qui ont une membrane nyctitante, sont complète- » ment osseux, à l' exception de quatre points, dirigés de la surface vers le » centre qui sont de cartilage pur, et qui pénètrent jusque près de l' endroit » où les deux surfaces articulaires coniques se rencontrent; mais la couche in- » térieure qui entoure les surface coniques est complètement osseuse. Ces qua-

» tre points cartilagineux font suite aux cartilages cruraux et transverses, et » sont en quelque sorte les racines de ces pièces qui pénètrent dans la substan- » ces des corps des vertèbres, où elles persistent à l' état de cartilage. C' est » pour cela que lorsqu' on fait une coupe verticale d' un corps de vertèbres des » genres *Scyllium*, *Mustelus*, *Galeus*, *Carcharias*, et *Sphyrna* à travers le mi- » lieu de sa longueur, on voit sur la coupe une croix cartilagineuse sans trace » d' ossification, provenant de ces quatre racines des pièces vertébrales supé- » rieure et inférieure. Sur des colonnes vertébrales sèches, sur lesquelles ces » tiges cartilagineuse sont racornies, on voit fréquemment quatre trous au » point d' insertion des quatre pièces vertébrales paires. Lorsqu' on rencontre » cette disposition sur des corps de vertèbres dont la surface est lisse et dépour- » vue de sillon, on peut les rapporter sans hésitation aux genres *Scyllium*, *Car-* » *charias*, *Sphyrna*, *Mustelus*, *Galeus ou Galeocerdo*. Les corps de vertèbres » de ces genres n' offrent jamais d' autres fissures que ces quatre perforations. » En revanche, on distingue de prime abord les vertèbres des *Lamna* aux » nombreuses fissures longitudinales dont toute la périphérie des corps de ver- » tèbres est marquée. Ces fissures ou sillons sont remplis de cartilages mous ; » tout le reste de la substance est ossifié. Je présume que cette structure des » vertèbres n' est pas seulement propre au genre *Lamna*, mais qu' elle se ren- » contre également dans d' autres genres de cette famille des Squales tels que » les Oxyrhines, les Carcharodon et les Sélaches. La figure que sir E. Home » a publiée d' une coupe longitudinale des vertèbres du *Sélache* (*Lec. on comp.* » *Anat.* Tom. II, Tab. 6), n' est pas suffisamment instructive à cet égard. » L' explication dit textuellement : the vertebra itself is partly bone and partly » transparent cartilage ; the bone portion forms two cup-like cavities and the » intermediate substance consits of bony cells in form of lozenges filled with » cartilage.

» Dans le genre *Alopias*, la surface des corps de vertèbres n' est pas en- » tièrement lisse ; elle n' offre pas, il est vrai, de profonds sillons comme dans » le genre *Lamna;* mais entre les bords antérieur et postérieur des corps de » vertèbres qui sont lisses, on voit un grand nombre de petites rainures paral- » lèles et longitudinales. Les vertèbres des genres *Lamna* et *Alopias* montrent » aussi sur une coupe verticale à travers le milieu des corps de vertèbres, un » prolongement des cartilages cruraux et transverses en forme de croix qui » s' étend jusqu' au milieu des corps de vertèbres. La partie osseuse des corps

» de vertèbres consiste, dans le *Spinax*, en une couche mince entourant immé-
» diatement les cavités coniques des vertèbres; extérieurement elle est entourée
» de toutes parts de cartilages mous, ensorte qu' on ne voit aucune trace d' os
» à l' extérieur, comme dans les genres *Acanthias* et *Centrina*. Dans les genres
» *Echinorhinus*, *Hexanchus* et *Heptanchus*, ou chez les Squales qui ont plus
» de cinq ouvertures branchiales (*Notidanus* Cuv.), le centre des vertèbres
» n' est formée que de la gaîne fibro-cartilagineuse de la corde dorsale, qui ne
» montre pas même extérieurement de trace d' une séparation des vertèbres;
» ensorte qu' on ne peut en compter le nombre que d' après les pièces périphé-
» riques paires qui s' y rattachent. Cependant, dans l' intérieur de cette gaîne
» qui est remplie de gélatine, on reconnaît les vertèbres à des cloisons mem-
» braneuses transverses qui sont traversées d' une ouverture centrale. Ces cloi-
» sons correspondent au milieu des vertèbres ou à la région, où, dans les vertè-
» bres osseuses des autres Squales, le canal des corps de vertèbres se rétrécit en-
» tre les deux cavités articulaires coniques. Il en est à-peu-près de même dans le
» genre *Echinorhinus;* les corps de leurs vertèbres sont composés d' une corde
» dorsale devenue cartilagineuse, avec laquelle les autres cartilages sont si inti-
» mement soudés, qu' il est difficile de distinguer les différentes pièces dont se
» compose chaque vertèbre. »

Prima di passare all' esposizione particolareggiata dei caratteri che distinguono la colonna vertebrale di ciascun genere degli squali, *Agassiz* trae da quanto gli aveva scritto Müller le seguenti conclusioni.

1.° Che non si deve sperare di trovare le vertebre fossili dei generi *Echinorhinus*, *Notidanus* (Hexanchus et Heptanchus), *Centrina* e *Acanthias*, quand' anche avessero esistito in epoche anteriori alla nostra.

2.° Che egli conosce i generi *Notidanus*, *Spinax* ovvero *Acanthias* fossili in quanto che del primo ha trovato i denti fossili nel terreno jurassico superiore, e del secondo una spina delle natatoje dorsali nella creta.

3.° Che dei generi *Notidanus* e *Acanthias* si può sperare di trovar tutt' al più oltre a porzioni della cute anche i denti.

Ed aggiugne:

4.° Che le vertebre fossili degli squali sono facili a riconoscersi dalla loro struttura microscopica.

Esaminando più esattamente le descrizioni della colonna vertebrale dei singoli generi, date dall' illustre notomista di Berlino, e paragonando le sue ta-

vole con i miei preparati ho dovuto assicurarmi che quelle tavole e quelle descrizioni non danno che l' imagine delle prime vertebre le quali si trovano immediatamente dietro la testa, che i caratteri i quali si osservano in questo pezzo della colonna vertebrale non sono costanti per la colonna intera, e che oltre ciò quelle imagini non sono del tutto esatte. Mi fu forza quindi conchiudere, che dai caratteri determinati da *Müller* non si arriverà ad una determinazione esatta degli squali fossili che in pochissimi casi eccezionali; mentre nel maggior numero dei casi non si potrà mai stabilire una conclusione che resista ad ogni critica. Mi feci quindi la seguente domanda: Se mi fosse dato di trovare allo stato di petrificazione una parte qualunque dell' organismo di questi esseri, potrò io determinare il genere dell' essere a cui questa parte apparteneva, allo stesso modo come il fitopaleontologo da una foglia petreficata determina la la pianta?... E un' osservazione esatta delle parti omonime degli scheletri dei varii generi mi diede una risposta affermativa.

Oltre il vantaggio che ne risulta all' anatomia comparata da un' esatta descrizione dello scheletro degli squali, fu quello il motivo principale che mi determinò a riempiere quella lacuna che nell' anatomia dei Mixini di *Müller* era occupata alla pagina 133 dalle seguenti parole: « Nel lavoro che dobbiamo » compiere sarebbe poco merito l'investigare gli scheletri non di rado imperfetti » dei plagiostomi che si trovano ne'varii musei, farli disegnare, ed adoperandoli » confidare nell' esattezza degli altri » ; e dalle altre alla pagina 239: « Le de- » scrizioni delle varie parti dell' osteologia degli altri plagiostomi, oltre i mixi- » noidi, contenute nella parte comparata del nostro lavoro, avevano per iscopo » di darci dati sicuri per la comparazione dello scheletro de' Mixinoidi. Queste » descrizioni sono tanto estese, quanto era necessario alla comparazione, nè si » esigerà da noi la descrizione dell' intero scheletro dei plagiostomi; chè questa » era fuori del nostro piano. Noi non aspirammo ad un' intera osteologia dei » plagiostomi. »

Io cercherò perciò di descrivere esattamente, per quanto mi sarà possibile, gli scheletri dei singoli generi, che sono i più comuni nell'Adriatico, ponendo in fronte a queste descrizioni quanto ha detto *Giovanni Müller*, e dal complesso trarrò quelle conclusioni che ne risulteranno naturalmente. Io spero che se questo penoso lavoro (e quanto sia penoso lo saprà colui che ha scheletrizzato qualche plagiostoma) non sarà discaro a' notomisti comparanti, verrà studiato con ispeciale interesse da' paleontologisti.

I. ACANTHIAS VULGARIS.

(Tav. III, Tav. VI, Fig. 1, 2).

È la specie che io descrivo come rappresentante il genere *Acanthias* secondo la caratteristica di *Müller* e *Henle*. Questo genere viene determinato da *Bonaparte* col nome *Spinax;* e intorno alla sua colonna vertebrale si esprime *Giov. Müller* colle seguenti parole:

« La fig. 2 représente des vertèbres de l' *Acanth. vulgaris*. La partie cen-
» trale interne des vertèbres qui est en forme de clepsydre est seule ossifiée et
» entourée d' une écorce épaisse de cartilage. La fig. 2 *a* montre la couche os-
» seuse intérieure des corps de vertèbres après l' eloignement de la substance
» corticale cartilagineuse. Les cartilages cruraux et intercruraux sont en for-
» me de triangles inverses, emboîtés les uns dans les autres. Les uns et les
» autres contribuent à fermer la cavité de la moëlle allongée ; les intercruraux
» y prennent cependant le plus de part ; ils sont entièrement cartilagineux,
» ainsi que les cartilages transverses, qui sont de forme carrée. Les vertèbres
» de l' *Acanth. Blainvillei* (fig. 3) ont une structure semblable, seulement la
» cavité de la moëlle allongée est entièrement fermée par les cartilages inter-
» cruraux (1). »

Fin qui il notomista di Berlino.

In ogni vertebra dello *Spinax Acanthias* si distinguono: il corpo della vertebra (Tav. III. fig. 1, *c*), gli archi vertebrali (Tav. III. fig. 1, *b*, *b*), i processi trasversi (Tav. III. fig. 1, *d*), le cartilagini intercrurali (Tav. III. fig. 1, *a*) e le cartilagini intervertebrali (Tav. III. fig. 1, *e*). Il corpo, gli archi, ed i processi trasversi formano un pezzo solo, e questa suddivisione è ideale o tutt' al più fondata sull' embriologia. Le cartilagini intercrurali e le intervertebrali sono pezzi staccati, indipendenti, e le prime si trovano in numero corrispondente a quello delle vertebre e sono inseriti sempre fra due vertebre, mentre le seconde non si trovano in tutta la colonna vertebrale, ma finiscono un po' innanzi alla seconda dorsale là dove i processi trasversi si congiungono per formare il canale dei vasi caudali, sono sempre inserite fra due processi trasversi consecutivi, e ad ogni vertebra corrispondono due di

(1) Louis Agassiz, *Recherches sur les poissons fossiles.* Tome III, pag. 367.

esse. Per procedere più esattamente nella descrizione rappresentiamoci la colonna vertebrale divisa in tre regioni. La prima, che denomineremo *regione anteriore*, si estende dall' occipite alla linea anteriore della prima pinna dorsale; la seconda, che diremo *regione abdominale*, dalla linea anteriore della prima pinna dorsale alle pinne ventrali, e la terza, che denomineremo *regione caudale*, dalle pinne ventrali all'estremità della coda (Tav. III, fig. 1, 2).

I *corpi delle vertebre* dalla prima vertebra anteriore aumentano gradatamente in lunghezza ed altezza fino alla regione caudale, in modo che queste dimensioni nelle ultime vertebre abdominali sono d' un terzo maggiori di quelle della prima vertebra. La terza dimensione segue il rapporto inverso. Ma il corpo della prima vertebra della regione caudale ha una lunghezza eguale appena a due terzi dell' ultima abdominale, e questa dimensione si dimostra costante nelle altre vertebre della regione caudale fino al sito dove comincia la pinna caudale. Da qua in poi va gradatamente diminuendo. Gli *archi vertebrali* sono poco sviluppati nelle prime vertebre, in modo che colla loro sommità arrivano appena all' asse della colonna, ma ben presto aumentano in altezza tanto che già a due terzi della regione anteriore toccano colle loro sommità i punti più alti della colonna. Ben presto per altro crescono anche in larghezza in modo che quanto più s' avvicinano alla regione caudale tanto maggiormente la loro forma di piramide acuta s' accosta a quella di piramide tronca, e verso la metà della pinna caudale prende la forma di parallelepipedo. In questa regione prendono, rispetto al corpo delle vertebre, una posizione obliqua verso la estremità posteriore del pesce, mentre per lo innanzi avevano una posizione perpendicolare.

Le cartilagini intercrurali ci dimostrano varietà notabili tanto nei loro rapporti cogli archi vertebrali, che nelle loro dimensioni e nella loro forma. Egli è perciò che asserisco insufficienti alla determinazione dei generi le due tavole e la descrizione di Giov. Müller. Intanto queste cartilagini intercrurali non esistono nella metà posteriore della pinna caudale. Nella prima metà della regione anteriore hanno una forma di pentagono (Tav. III, fig. 1, *f*, *f*) con quattro lati e quattro angoli eguali, ed un quinto lato disuguale opposto al quinto angolo impari. Questo quinto angolo si infigge come un cono nell' interstizio fra due coppie di archi consecutivi, mentre il lato opposto forma la linea superiore della colonna. Gli altri due lati combaciano coi corrispondenti della cartilagine intervertebrale antecedente e susseguente. Ma questa forma pentagona-

le nella metà posteriore della regione anteriore diventa ben presto una forma triangolare (Tav. III, fig. 1, *g*, *g*) diminuendo sempre i due lati perpendicolari ed allungandosi quelli che abbracciano l' angolo acuto. Ne viene di conseguenza perciò che due cartilagini consecutive non si toccheranno più con i loro lati ma soltanto col vertice degli angoli della base. Questi triangoli sono triangoli piani fino verso la metà della regione abdominale, ma cominciando in questo punto gli archi vertebrali a diventare piramidi tronche le due faccie delle quali corrispondenti ai lati dei triangoli sono concave, questi triangoli diventano triangoli sferici. Conservano le dette cartilagini la forma di triangoli sferici fino sotto la seconda pinna dorsale; ma cominciando in questo sito ad aumentare maggiormente la convessità delle piramidi tronche, diventano ben presto quasi circolari (Tav. III, fig. 2, *h*, *h*). Di forma circolare continuano fino alla pinna caudale, poi si modificano in piccoli triangoletti nella metà anteriore della detta pinna (Tav. III, fig. 2, *i*, *i*) per poi sparire del tutto.

I processi trasversi nelle prime vertebre somigliano a lamine quadrilatere orizzontali (Tav. III, fig. 1, *j*, *j*) di una grossezza considerabile, ma già dalla quinta vertebra cominciano ad attenuarsi ed a prendere una forma triangolare (Tav. III, fig. 1 *d*), attaccata con la base al corpo della vertebra, ed il cui vertice si prolunga nelle costole cartilaginee. Questi rapporti durano fino al sito dove cessano le costole, cioè al principio del secondo terzo della regione addominale. In tutto il decorso del secondo terzo della regione addominale questi processi trasversi si rivolgono verso la faccia inferiore del pesce in modo da formare un semicanale sotto i corpi delle vertebre, ed accostandosi di nuovo alla forma quadrilatera e combinandosi colle cartilagini intervertebrali, danno ai due margini del semicanale l' aspetto di due striscie cartilaginee col bordo libero leggermente ondeggiato (Tav. III, fig. 1, 2, *k*, *k'*). Dal principio dell'ultimo terzo della regione addominale fino al principio della pinna caudale questi processi trasversi prendono la forma di quadrati, deviano dalla posizione verticale per potersi incontrare sotto i corpi delle vertebre in una linea parallela all' asse del pesce. I processi trasversi d' una vertebra anteriore, essendo a contatto immediato con quelli della posteriore, formano in tutto questo pezzo della regione vertebrale un prisma triangolare, il quale rinchiude un canale parimenti triangolare pel passaggio dei vasi. Sulle faccie laterali esterne di questo prisma si distinguono appena alcuni solchi leggieri perpendicolari all' asse che segnano il confine fra i processi trasversi di due vertebre differenti (Tav. III, fig. 2, *k'*, *k''*). Nella regione

per altro della pinna caudale i processi trasversi di un lato di ciascuna vertebra si connettono a quelli del lato opposto per formare i processi spinosi inferiori (Tav. III, fig. 2, *l*, *l*), i quali per un terzo della pinna aumentano in lunghezza per poi diminuire gradatamente fino all' ultima estremità. Dalla congiunzione delle loro estremità libere risulta una linea curva che ha la massima convessità ai confini tra il primo ed il secondo terzo della pinna caudale. L' estremità libera di ognuno di questi processi ha due bordi salienti in modo che essa piuttosto che terminare in una linea termina in un piano. Singolare si è la forma di questi processi spinosi inferiori. Ognuno d' essi somiglia alla lama d' uno scalpello anatomico a schiena ricurva, non sono attaccati al corpo della vertebra in modo che il loro asse sia la continuazione dell' asse di questo, ma in modo che il loro asse cada nella continuazione degli interstizii intervertebrali, anzi in guisa che se non si succedesse il avverasse del corpo della vertebra al processo inferiore, si potria credere che questo sia connesso ai resti intervertebrali della corda dorsale.

Nella parte superiore della colonna vertebrale che corrisponde alla pinna caudale si osservano alcuni raggi che, molto bassi da principio, vanno gradatamente aumentando in lunghezza fino all' ultimo quinto della pinna per poi precipitosamente diminuire (Tav. III, fig. 2, *m*, *m*). Le loro estremità libere presentano una linea curva, la cui maggiore convessità si trova fra la penultima e l'ultima quinta parte dell' estremità caudale. I meglio sviluppati fra questi raggi hanno la forma d' una lancia e dalla loro combinazione risulta una linea eminente da ciascun lato che scorre parallela all' asse della colonna vertebrale (Tav. III, fig. 2, *n*). Ognuno di essi ha una posizione obbliqua rispetto all'asse della colonna vertebrale colla punta libera rivolta all' indietro. È molto difficile il descrivere la forma dei detti raggi chè i primi guardati in profilo ci presentano la forma seguente: , mentre i più vicini all' estremità caudale hanno questo aspetto: , ed osservati di fronte i primi ci presentano la forma: ; ed i secondi la forma: . Al primo aspetto venivo quasi sedotto a credere che questi raggi fossero processi spinosi superiori staccati dagli archi vertebrali superiori, come si osservano nello scheletro dell' *Accipenser Ruthenus*.

Ma se ciò fosse vero, ad ogni vertebra dovrebbe corrispondere un processo spinoso, il che non si verifica nello *Acanthias vulgaris;* chè anzi specialmente all' estremità anteriore della pinna caudale ho potuto assicurarmi che ad ogni vertebra corrispondono due e persino tre di questi raggi. A che adunque potremo paragonarli?... Io credo che noi dobbiamo considerare questi organi come identici ai portatori dei raggi delle pinne degli altri pesci.

Considerazioni. Da queste investigazioni risulta: 1.° che la figura che ci dà *Giovànni Müller* della colonna vertebrale dello *Acanthias vulgaris* Cuvieri, non corrisponde al nostro *Spinax Acanthias*, determinato secondo il Bonaparte, nè che vi corrisponde la tavola che egli dà dello *Acanthias Blainvilli.* E se le paragoniamo alla descrizione dataci dallo zootomo di Berlino, dovremo conchiudere che con questa non arriveremo mai a determinare il genere *Acanthias* a menochè in pochissimi casi speciali.

2.° Che il carattere delle cartilagini intercrurali sul quale si basa Müller non è un carattere essenziale in quanto che nella coda esse spariscono.

3.° Che la nostra descrizione ci fornisce caratteri più adatti ad una esattissima determinazione. E questi sono:

α) Nelle prime vertebre le cartilagini intercrurali pentagone e molto sviluppate, gli archi vertebrali ed il corpo delle vertebre appena la metà delle intercrurali, e i processi trasversi quadrilateri.

β) In tutta la regione toracica e nell' abdominale, cartilagini intercrurali triangolari, eguali in altezza agli archi vertebrali piramidali e al corpo della vertebra, processi trasversi triangolari, cartilagini intervertebrali triangolari.

γ) *Dalle pinne anali alla caudale*: cartilagini intercrurali rotonde, archi biconcavi, corpo di doppia altezza dei precedenti, processi trasversi rivolti in basso e formanti una lista cartilaginea.

δ) *Pinna caudale*: processi spinosi superiori a lancia, inferiori a lama di scalpello.

Se della coda non si trovasse altro che un' impressione, saria facile determinare il genere del pesce a cui apparteneva, mediante il seguente artifizio: Si tracci l'asse della coda e parallelamente a questo asse due tangenti, una al vertice della curva superiore formata dalle estremità dei processi spinosi superiori, ed un' altra al vertice della curva formata dai processi spinosi inferiori, si congiungano quindi i due punti tangenziali mediante una retta, e noi otterremo un angolo molto acuto compreso fra la parte superiore della retta di congiunzione,

e l' estremità posteriore dell'asse della coda. Noi vedremo in seguito che questo angolo varia nei varii generi.

Sorge ora la seguente domanda: Saremo noi in istato di poter determinare il genere anche da qualunque altra parte dello scheletro come il paleofitologo determina una pianta petrificata ora dalla foglia, ora dal tronco, ecc. ?

A questa domanda risponderà la descrizione esatta delle altre parti dello scheletro.

II. *Il cranio.*

Per poter facilmente intendere la descrizione del cranio supponiamolo diviso in tre regioni, vale a dire la *nasale*, l' *oculare*, e l' *auriculare*. La prima si estende dalla punta libera del muso fino alle due ale laterali, le quali hanno la distanza del maggior diametro trasversale (Tav. III, fig. 1, *A-A'*). La seconda da questo punto fino alle estremità libere delle ale che si trovano dietro la sortita del nervo ottico (Tav. III, fig. 1, *A'-A''*), e la terza dal limite della regione oculare fino al punto dell'articolazione occipitale (Tav. III, fig. 1, *A''-A'''*). Osservando ora il cranio alla faccia superiore si vede anteriormente nella regione nasale una prominenza cartilaginea, continuazione della base del cranio, che ha la forma d'un cucchiajo colla superficie concava rivolta all'insù (Tav. III, fig. 3, *a*). Laddove questo cucchiajo s'attacca al cranio havvi due fori (Tav. III, fig. 3, *b*, *b*) pei quali dalla faccia superiore del cranio si arriva all' inferiore. Il margine anteriore della faccia superiore del cranio si estende nel suo punto di mezzo a formare due piccole punte che guardano nella cavità del cucchiajo cartilagineo, mentre i due terzi laterali dello stesso margine hanno la forma di due mezze lune obblique e si ricurvano verso la base per formare il padiglione delle cavità nasali (Tav. III, fig. 3, *c*, *c*). Nella regione oculare si osservano i margini laterali somiglianti a mezze lune che rivolgono le loro convessità verso l' asse della testa (Tav. III, fig. 3, *d*, *d*), e tra loro trovasi una eminenza che forma la volta cerebrale (Tav. III, fig. 3, *E*). Anteriormente in questa regione vi sono due fori che conducono nelle due orbite rispettive (Tav. III, fig. 3, *f*, *f*). La *regione auricolare*, che veramente dovrebbe dirsi regione *antero auricolare*, mostra i margini laterali somiglianti a mezze lune colla convessità verso l'asse della testa (Tav. III, fig. 3, *g*, *g*), e nel centro si osserva una fossetta, una specie di fontanella (Tav. III, fig. 3, *h*) che mediante quattro fori comunica colla cavità del cranio. Il margine

posteriore è orizzontale, vien formato dalla faccia inferiore che si unisce alla superiore, la quale forma un vôlto e ai suoi due punti estremi si trovano i meati auditori (Tav. III, fig. 3, *i*, *i*). Se si osserva il cranio dalla sua faccia inferiore esso somiglia ad una sella la quale si prolunga anteriormente nel cucchiajo e posteriormente si estende in un piano inclinato della regione antero auricolare. Dal margine anteriore della sella, s' innalza una cresta cartilaginea, la quale lungo l'asse longitudinale arriva fino alla metà del cucchiajo (Tav. VI, fig. 1, *a*). All' origine di questa cresta si trova da ciascun lato un foro che conduce alla faccia superiore del cranio (Tav. VI, fig. 1, *b*, *b*), e più in là di questi due fori i padiglioni delle narici che hanno nel punto centrico i buchi pel passaggio dei nervi olfattori (Tav. VI, fig. 1, *C*, *C*). Là dove la regione auriculare è separata dalla regione oculare s' innalzano due stili cartilaginei che alle loro estremità libere portano due dischetti parimenti cartilaginei sui quali poggia il bulbo dell' occhio (Tav. VI, fig. 1, *d*, *d*).

III. *Apparato della masticazione.*

Giovanni Müller nella succitata opera descrive veramente da quel maestro che egli è le cartilagini labiali, il sospensorio comune delle cartilagini odontoidee e queste cartilagini stesse; ma siccome l' illustre zootomo di Berlino non aveva per iscopo di dare descrizioni tali che possano servire alla determinazione, ma soltanto d' interpretare il significato di ogni singolo organo che osservava, non si estese nei dettagli anatomici tanto quanto trovo necessario per soddisfare allo scopo prefissomi.

Ognuna delle cartilagini odontoidee superiori (Tav. VI, fig. 2, *A*, *A*) ha una superficie esterna convessa alla estremità interna e concava all' altra, ed una superficie interna che ci presenta gli stessi caratteri in senso inverso. Ha la forma di una striscia oblunga con un' appendice inferiore all' estremità esterna per la quale articola colla cartilagine odontoidea inferiore della stessa parte (Tav. VI, fig. 2, *a*, *a*) ed un' appendice acuminata superiore verso l' estremità interna (Tav. VI, fig. 2, *b*, *b*). Fra le due appendici superiori resta uno spazio libero quadrato. Alla superficie esterna là dove l' appendice inferiore si unisce al ramo orizzontale si trova una piccola aletta semilunare diretta all' insù e all' indentro (Tav. VI, fig. 2, *c*, *c*). Il margine superiore del ramo orizzontale è concavo verso l' estremità interiore, e convesso verso la esterna; mentre il mar-

gine inferiore ci presenta gli stessi caratteri in senso inverso. Le cartilagini odontoidee inferiori (Tav. VI, fig. 2, *B*, *B*) consistono di due lamine cartilaginee orizzontali attaccate fra di loro colle estremità interne appuntite, e al sospensorio comune colla loro estremità esterna più larga. Esse ci presentano gli stessi caratteri delle cartilagini odontoidee superiori, colla sola differenza che sono più larghe verso i fianchi e più strette verso l' asse del pesce, e che tutti e due i loro margini sono convessi. All' estremità esterna del margine superiore si trova un' impressione glenoidale per l' articolazione col ramo discendente della cartilagine odontoidea superiore (Tav. VI, fig. 2, *d*, *d*).

IV. *Apparato branchiale e archi ioidei.*

Enrico Rathke (1) descrive questi organi in modo veramente degno del nome che gode fra gli zootomi.

Essendo io costretto a ritornare più volte in questo argomento nelle descrizioni degli altri generi, e non essendo del tutto esatta la relazione del prof. di Dorpat, credo mio dovere di riportarla alla lettera, riserbandomi di aggiugnervi in calce i risultamenti delle mie investigazioni.

Così scrive Enrico Rathke alla pagina 32:

« Negli squali si osserva invece dell' osso ioide dei pesci ossei da ambedue » i lati un forte arco cartilagineo, stiacciato all' innanzi e all' indietro, e diviso » in due branche attaccate mediante tessuto fibroso. L' estremità superiore di » questo arco è immediatamente congiunta al cranio a mediocre distanza dietro » la cavità dell' occhio mediante tessuto fibroso, e l' inferiore con una cartilagi- » ne, la quale sostiene la lingua ed è larga e quasi triangolare nello *Squalus* » *stellaris*, *Sq. canicula*, e *Sq. galeus*, e comparisce stretta ed arcuata nello *Sq.* » *acanthias*, e che tanto per la sua congiunzione che per la sua posizione » deve venir paragonata piuttosto colla *Copula* dell' ioide dei pesci ossei che » coll' osso linguale degli stessi. Sul margine posteriore tanto della branca » superiore che dell' inferiore sono attaccate ad angolo retto più striscie car- » tilaginee, che formano una serie semplice, e tanto fra di loro quanto colla » parte su cui poggiano sono unite mediante una lamina di tessuto cellu-

(1) *Anatomisch-philosophische Untersuchungen ueber das Kiemenapparat und das Zungenbein der Wirbelthiere.* Riga und Dorpat 1832.

« lare-fibroso. Queste striscie sono in parte semplici ed in parte diramate come » le dita di una mano. Oltre a ciò la faccia anteriore di quell'arco, anzi per » precisar meglio, la faccia anteriore dell' estremità inferiore della branca su- » periore di quell' arco è attaccata alla mascella inferiore mediante la con- » giuntiva. Ma la faccia esterna della suddetta lamina cellulare-fibrosa è rive- » stita di uno strato muscolare, che scorre da quell' arco cartilagineo alla cin- » tura toracica. »

Ripiglia quindi alla pagina 23 :

« La chiglia dell' ioide manca del tutto agli *Squali.*

» Più sviluppati dell' ioide troviamo negli squali quegli archi cartilaginei, » che portano le branchie intere, e seguono immediatamente l'ioide ; i quali per » altro non sono collocati sotto il cranio come le parti dello scheletro corri- » spondenti della maggior parte dei pesci ossei, ma sotto la colonna vertebrale. » Essi formano da ambo i lati 4 archi, ciascuno de' quali è composto di quattro » segmenti generalmente sottili, e or più or meno ricurvi, ma differenti fra » loro tanto di grandezza che di forma. Il più alto di questi giace sulla parete » superiore della faringe, e colla sua estremità interna confina, or più or meno » distante, colla colonna vertebrale, senza esserle per altro strettamente attac- » cato mediante tessuto fibroso, come osserviamo negli *Storioni ;* e corrisponde » tanto per la posizione che pel numero dei segmenti componenti i singoli archi » ad uno degli ossi faringei superiori dei pesci ossei. Il segmento inferiore so- » stiene la parete inferiore della faringe sovrappostagli. I due segmenti di mez- » zo sono nascosti nelle branchie stesse.

» La maniera per altro nella quale gli archi branchiali descritti si unisco- » no inferiormente due a due varia negli *Squali* secondo le specie. Per es. nello » *Sq. Acanthias* si trovano fra quegli archi quattro piastre cartilaginee dispo- » ste in una serie una dietro l' altra, la prima delle quali è la più piccola, è » molto distante dalla seguente, ed appartiene al primo pajo degli archi bran- » chiali. Le altre tre, al contrario, sono tanto strettamente unite fra loro me- » diante tessuto fibroso che al primo aspetto sembrano formare un solo pezzo » cartilagineo ed oltre a ciò sono spinte tanto indietro, che propriamente sol- » tanto l' anteriore unisce insieme tutti e tre gli archi cartilaginei delle coppie » branchiali posteriori. Allo *Sq. galeus* manca la più anteriore delle lamine de- » scritte, e perciò i segmenti inferiori degli archi branchiali delle coppie ante- » riori si trovano a contatto, ed invece delle tre piastre posteriori dello *Sq.*

» *Acanthias* non se ne trovano che due parimenti unite insieme, le quali non » solo uniscono insieme tutti gli altri 6 archi branchiali allo stesso modo come » nello *Sq. Acanthias*, ma hanno oltre a ciò una simile grandezza, una simile » posizione spinta molto indietro, ed una simile forma, a tutte quelle tre pia- » stre prese insieme. Finalmente nello *Squalus stellaris*, e *Sq. canicula*, che » hanno l' intero apparato branchiale simile a quello dello *Sq. galeus*, una sola » piastra cartilaginea congiugne gli archi delle tre coppie branchiali posteriori.

» Porzioni dello scheletro, le quali corrispondano alle mascelle faringee » dei pesci ossei, si trovano anche negli *Squali*, quantunque *Cuvier* e *van der* » *Hoeven* li neghino. Essi si presentano in forma di due lamine cartilaginee al- » quanto arcuate, presso a poco come nel *Mugil saliens* e *M. auratus*, nè a » proporzione molto larghe, sulla faccia interna delle quali non si osserva nem- » meno un vestigio di denti. Differente per altro dai pesci ossei è la loro unio- » ne colle parti circonvicine; in quanto che esse non sono attaccate soltanto » alla faringe, ma l' estremità inferiore di ciascuna è oltre a ciò congiunta im- » mediatamente alla lamina di congiunzione cartilaginea degli archi branchiali » posteriori, mentre l' estremità superiore è congiunta al segmento superiore » dell' arco branchiale posteriore della stessa parte mediante un pezzo cartila- » gineo piccolo e parimenti piatto; in modo che questo arco cartilagineo non » consiste già di un segmento solo da ciascun lato, ma di due segmenti, come » ne abbiamo un esempio nel genere *Cyprinus* fra i pesci ossei. Oltre le parti » dello scheletro descritte fino ad ora, le quali compongono l' apparato bran- » chiale degli *Squali*, se ne trovano ancora alcune altre. Queste sono semplici » striscie cartilaginee, sottili, e mediocremente lunghe, che in numero differente » sono unite allo stesso modo come i *Radii branchiostegi* dei pesci ossei col- » l' ioide, coi due segmenti di mezzo di ogni arco branchiale. Formando essi » una serie semplice, si estendono a guisa di raggi da quella faccia dei due seg- » menti di mezzo che è rivolta all' infuori e all' indietro. Secondo l' asserzione » di *Geoffroy* si deve trovare in ogni branchia intera dello *Sq. longirostris* una » unica foglietta cartilaginea e quasi triangolare invece di questi bastoncini car- » tilaginosi. »

La tavola, che Enrico Bathke univa a questa descrizione, è forse più esatta che la descrizione stessa. Io intanto paragonandole a' miei preparati ho potuto osservare che non già quattro ma soltanto due o tutt' al più tre cartilagini congiungenti si trovano nello *Acanthias vulgaris*. La prima (Tav. VI, fig. 2, *e*) di

queste serve a congiungere fra loro le due branche inferiori comuni ai due primi archi branchiali, e la seconda col suo margine anteriore serve d'appoggio alle quattro branche inferiori del terzo e quarto arco branchiale e delle mascelle faringee (Tav. VI, fig. 2, *f*). Il primo arco branchiale non è formato da quattro pezzi cartilaginei come gli altri archi, ma soltanto da tre (Tav. VI, fig. 2, *D*, *D*) mancandogli la branca inferiore. La connessione ha luogo nel modo seguente. Le branche inferiori dei secondi archi branchiali sono a contatto fra di loro colla estremità interna senza mediazione di alcuna altra cartilagine (Tav. VI, fig. 2, *g*, *g*). Dalla loro unione nasce un angolo che coll'apertura riguarda la cartilagine intermedia dell'ioide e poggia col suo vertice tronco sul margine anteriore della prima cartilagine congiungente. La prima cartilagine congiungente (Tav. VI, fig. 2, *e*) ha la forma d' un pentagono, e coi due lati che chiudono l'angolo posteriore entra nell' apertura dell' angolo formato dalle due branche inferiori dei terzi archi branchiali e col lato anteriore opposto è attaccata al vertice troncato delle due branche inferiori dei secondi archi; mentre gli altri due lati sono liberi. La seconda cartilagine congiungente (Tav. VI, fig. 2, *f*) ha la forma d'un triangolo sferico con un lato convesso anteriore e due altri lati a doppia curvatura che rinchiudono l' angolo posteriore. Sul lato convesso s' appoggiano le branche inferiori dei terzi archi; ed esternamente a questi da ambedue le parti si appoggiano le branche inferiori dei quarti archi branchiali, e resta quindi libera una porzione di questo lato convesso, fino agli angoli laterali della lamina cartilaginea di congiunzione ai quali si attaccano le branche inferiori delle mascelle faringee (Tav. VI, fig. 2, *E*, *E*). Nell' interstizio libero fra la branca inferiore delle mascelle faringee e la congiunzione della terza e quarta branca del terzo arco penetra la terza branca del quarto arco, la quale si congiunge posteriormente all' inferiore della mascella faringea. Io non ho trovato nemmeno separate l' una dall' altra le prime branche del quarto arco branchiale e della mascella faringea, ma invece che queste due branche sono una cartilagine sola tagliata ad angolo (Tav. VI, fig. 2, *h*, *h*), con un lato orizzontale che è la prima branca della mascella faringea ed un lato obbliquo superiore che è la prima branca del quarto arco branchiale. Ho notato oltre a ciò che la seconda e la terza branca di tutti gli archi, a poca distanza della loro articolazione, hanno una fossetta al loro margine interno (Tav. VI, fig. 2, *i*, *i*) e che fra queste due fossette consecutive dello stesso arco è teso un muscolo il quale ripiega le due branche superiori sulle due inferiori. Al bordo interno delle due branche di

mezzo dei quattro archi branchiali si sollevano delle cartilagini piramidali le quali formano una serie sola nei due archi anteriori e due serie nei posteriori.

V. *Estremità superiori.*

Intorno alle estremità, anzi, in generale, intorno alle pinne dei plagiostomi, non conosco lavori speciali. Quanto noi sappiamo su questo argomento è contenuto nelle opere immortali d' anatomia comparata di *J. F. Meckel* e di *Georges Cuvier.* Il primo dice intorno alle estremità anteriori dei plagliostomi (1) che nelle razze, negli squali e nelle chimere sono formate dalla cintura toracica e da un' altra porzione composta di due frazioni, la prima delle quali, corrispondente alla spalla, in generale ha due cartilagini, alle quali si articola la seconda frazione. Soggiugne quindi:

« Ces caractères généraux des os de cette portion offrent en partie, dans » différens genres, et même dans diverses espèces du même genre, des va- » riétés fort notables; ces variétés se rapportent à la *connexion*, au *nombre*, » à la *forme*, et au *volume*.

» 1.° *Connexion.* En ce qui concerne cette condition, on observe la » différence remarquable que chez les *squales* sans exception, même chez » l' ange (*squalus squatina*) ainsi que chez les *chimères* et les *torpilles*, la » pièce supérieure n' est pas unie avec le rachis ou le crâne . . . . .

» . . . . . .

» Chez les *squales* enfin les parties supérieures de même nom, des deux côtés sont entièrement séparées l' une de l' autre et du rachis.

» La connexion des deux pièces inférieures dans la ligne médiane n'offre pas moins de différences, quoiqu' elles soient moins saillantes.

» Chez les *raies* les *chimères* et l' *ange*, ces deux pièces se rèunissent » par une articolation immobile en un tout unique, et offrent leur plus grande épaisseur en cet endroit; chez plusieurs *squales*, je citerai spécialement » le griset (*squalus griseus*) et le marteau (*sq. zygaena*), ainsi que chez les » *torpilles*, les pièces en question sont les plus mince à l' endroit de leur » reunion, et jouissent par conséquent de quelque mobilité. Chez les *torpilles* » cette surface de contact est, conformément à la forme générale du corps,

(1) *Traité général d' anatomie comparée*, par J. H. Meckel; *traduit de l' allemand et augmenté de notes* par MM. Riester et Alp. Sauson. Bruxelles, 1829. Tome second, pag. 365.

» étroite d' avant en arrière, et très-large d' un côté à l' autre; la disposi-
» tion contraire a lieu chez les *squales*.

» 2.° *Nombre*. Le nombre des pièces qui composent cette portion du
» membre antérieur n' a pas plus de fiaité. Il est une loi générale à la-
» quelle je ne connais pas d' exception, c' est qu' elles ne sont jamais moins
» de deux. Un examen superficiel pourrait faire croire que chez l' *ange*
» la pièce supérieure manque; mais elle existe constamment, elle n' est que
» très-petite et avortée.

» 3.° *Forme*. Les deux pièces, l' inferieure surtout, varient aussi sous
» ce rapport.

» La pièce supérieure est fort alongée, apointie en haut chez les *chimères*
» et le plus grand nombre de *squales*, offre à l' endroit où elle se recourbe
» deux facettes articulaires convexes; l' une de ces facettes est supérieure et
» antérieure, l' autre est inférieure et postérieure; toutes deux sont séparées
» par une ouverture assez peu considérable . . . . . .
» . . . . . .

» 4.° *Volume*. C' est chez les *torpilles* que cette portion de membre est
» la plus grande; viennent ensuite les *raies*, puis les *chimères*, en dernier lieu
» les *squales*.

» La *seconde portion* est toujours située au bord interne de la nageoire
» dont elle forme la base.

» Elle est toujours unie par des facettes articulaires, concaves, avec la
» partie articulaire de la première portion; les différences que présentent ces
» facettes correspondent exactement à celles de cette portion qui ont été dé-
» crites.

» Cette surface est toujours la plus étroite de la seconde portion, qui, à
» partir de ce point, s' élargit toujours en arrière, et plus ou moins aussi en
» devant chez l' ange, les torpilles e les raies. . . . . .
» . . . . . .

» Chez les *squales* la pièces antérieure se divise en deux autres plus peti-
» tes, ayant à peu près le même volume. La seconde de celles-ci se grossit con-
» sidérablement chez l' *ange*, et augmente surtout en largeur. La troisième pe-
» tite pièce, postérieure, que nous-avons mentionnée, manque ici. . . . . .
» . . . . . .

» La seconde fraction de cette portion de l' appendice locomoteur, ver

» laquelle la fraction qui vient d' être considérée forme en partie, du moins par » ses derniers articles, une transition insensible, est composée d' un nombre » variable de rayons fort alongés, un peu renflés aux deux extrémités, unis entre » eux et avec les bords latéraux des pièces de la première fraction, d' une ma- » nière peu nobile et par amphiarthrose.

» Ils sont généralement d' autant plus multipliés qu' ils sont moins volu- » mineux, et que la nageoire est plus large et plus fractionnée ; d' où il suit né- » cessairement que les plus grandes nageoires sont aussi les plus mobiles, à » cause de l' augmentation du nombre des pièces articulées. C' est à la partie » moyenne, qui est à la fois la plus large de la nageoire qu' on en compte » d' avantage ; ils diminuent de nombre, mais moins de volume, vers l' extré- » mité. Les *raies* offrent les plus grands developpement. J' en trouve chez les » griset *(squalus griseus)*, l'aiguillat *(acanthias)*, la petite roussette *(catulus)*, » le marteau *(zygaena)*, trois à quatre, et seulement trois chez l' ange *(sq.* » *squatina*).

» Le nombre des rangées que forment les rayons varie de l' extrémité » antérieure des nageoires à leur estrémité postérieure. Il y en a communé- » ment de quatre-vingts à cent chez les *raies*, de cinquante à soixante chez les » *torpilles*, vingt et quelques chez les *squales* et les *chimères*.

» Quand on les considére d' avant en arrière, on trouve ordinairement » que ceux du milieu sont les plus longs.

» Ceux de la partie externe sont ordinairement aussi plus petits que les » internes. Cette circonstance a lieu surtout pour les postérieurs, que l'on ren- » contre quelquefois, comme chez les *chimères* et la petite roussette *(squalus* » *catulus)*, subitement beaucoup plus petits et à la fois larges et discoides.

» Chez les *raies*, les derniers articles diminuent aussi peu à peu de la » moitié ; mais cela n' est pas général parmi elles. Ainsi, par exemple, chez le » griset *(sq. griseus)*, l' article moyen est beaucoup plus court que l'externe et » l' interne, qui ont tous deux à peux près le même volume.

» Le marteau (*sq. zygaena*) présente une organisation encore plus digne » de remarque. Il y a trois articles, dont le plus externe, par ses rayons anté- » rieurs est huit ou dix fois plus grand que le second, qui est lui-même trois « fois plus petit que le premier. Cette troisième série se termine par une pointe » minue, et diminue brusquement de volume, a compter du milieu de la » nageoire . . . . . .

» Les *squales* offrent quelques indices de cette disposition dans la bifor-
» cation de l' extrémité libre des rayons externes.

» Quelquefois par exemple chez les chimères, la série moyenne est con-
» sidérablement plus longue que les autres.

» On voit par conséquent par là qu' il y a une différence très-considérable
» dans le rapport de chaque article; ce fait est curieux, soit par lui-même, soit
» à cause des différences analogues qui existent entre les parties correspondan-
» tes des membres des autres classes d' animaux dans leurs divers ordres. A
» compter du troisième article, la nageoire est ordinairement appuyée et con-
» solidée par un très-grand nombre de stries cornées fines, pointues, que l' on
» peut comparer évidemment avec les ongles. Elles sont surtout développées
» chez les *chimères* et les *squales*, beaucoup moins chez les *raies;* cette inéga-
» lité de développement dépend de ce que chez celle-ci les rayons des nageoires
» s' etendent dans toute la largeur de nageoires, tandis que chez les *squales* il
» y a toujours une portion considérable de la partie esterne de nageoires qui
» n' est pas occupée par les rayons. »

Nell' anatomia comparata di *Georges Cuvier* (1) si legge alla pag. 161 le seguenti parole intorno alle estremità superiori degli squali.

« Mais dans quelques-uns, comme les *raies*, les *squales*, etc. ces deux na-
» geoires sont dans un même plan horizontale, et lorsqu' elles se meuvent, elles
» frappent de haut en bas, ou de bas en haut, suivant une direction vertical.
» . . . . . »

Poi alla pagina 163:

« Dans les *squales*, la ceinture n' est composée que d' une pièce, mais
» elle paraît être formée de l' union des omoplates et des coracoïdiens; elle n'est
» plus suspendue à la tête, mais a de larges apophyses de vertèbres. C' est au
» point d' union de ces os, que s' articule la nageoire sur trois premières pièces
» aplaties qui vont en s' élargissant et qui supportent les nombreus rayons. »

Ora che esposi quanto era stato scritto su questo argomento passerò io stesso a descrivere le estremità anteriori dello *Acanthias vulgaris*. La cintura toracica è formata da tre cartilagini connesse insieme in modo da formare un arco intorno alla faccia inferiore (Tav. III, fig. 4, *a*, *b*, *b*). La cartilagine di

(1) *Leçons d' anatomie comparée de* Georges Cuvier *par* M. Dumeril. Troisième édition. Bruxelles, 1836. Tome I.

mezzo ha la forma di una striscia ricurva ad arco, più assottigliata nel punto di mezzo. Essa ha due faccie, una antero-superiore ed una postero-inferiore e due margini. Se noi vogliamo considerarla divisa in cinque segmenti, vedremo alcune particolarità nel secondo e nel quarto segmento. E queste sono: Dalla faccia inferiore presso al margine anteriore si trova una cresta rivestita di compatta sostanza ossea e suddivisa in tre articolazioni (Tav. III, fig. 4, 5, *c*, *c*); e dal margine posteriore si estende una lamina cartilaginea quadrilatera, la quale è tre volte tanto lunga quanto è larga (Tav. III, fig. 4, *d*, *d*). Ai margini superiori di queste piastrelle sono articolate le pinne. Le estremità della cartilagine di mezzo presentano una superficie piana, alla quale è attaccata, mediante tessuto fibroso, la base delle due altre cartilagini di forma piramidale. Le pinne sono costruite nel modo seguente. In un piano perpendicolare all' asse della cintura toracica s' articolano col margine libero dell' appendice quadrilatera tre cartilagini. Per ciò che riguarda la lunghezza di queste tre cartilagini essa aumenta dall' esterna all' interna, mentre la grossezza aumenta dall' esterna all' interna e la larghezza è maggiore di tutte in quella di mezzo e più piccola nell' interna. La cartilagine esterna e quella di mezzo sono a contatto, mentre fra questa e l' interna v' ha un piccolo interstizio simile ad una fessura. La cartilagine esterna ha la forma d' una piramide triangolare recisa dalla metà dello spigolo esterno verso la base, ed è unita per la base colla appendice quadrilatera della cintura toracica. La cartilagine di mezzo ha la forma di un triangolo e s' articola con un angolo acuto tronco, mentre l' angolo maggiore combacia col vertice dell' esterna. La cartilagine interna ha la forma d' un triangolo ottusangolo. Quello dei tre angoli, che forma l' articolazione, è più acuto degli altri due (Tav. III, fig. 6, *a*, *a*). Al suo angolo libero è attaccato un bastoncino cartilagineo di dimensioni differenti da quelle dei raggi delle pinne (Tav. III, fig. 6, *d*, *d*), il quale col margine interno della cartilagine, alla quale è unito, forma un angolo ottuso. I raggi della pinna diminuiscono in grossezza dal margine anteriore al posteriore delle pinne. Essi sono distribuiti in tre serie; vale a dire ogni raggio è composto di tre articolazioni. Quegli articoli che formano la prima serie (Tav. III, fig. 6, *e*) s' attaccano al margine posteriore delle cartilagini sovra descritte ed aumentano in lunghezza dal margine esterno all'interno della pinna, quelli della seconda serie (Tav. III, fig. 6, *f*) sono eguali in lunghezza, meno i quattro più vicini al margine interno i quali diventano un terzo più lunghi, e quelli della terza serie (Tav. III, fig. 6, *g*) dopo il primo terzo diminuiscono fino

al margine interno. Il margine posteriore dello scheletro della pinna ha la forma d' un .

VI. *Estremità inferiori.*

Meckel descriveva alla pagina 427 della succitata opera le estremità inferiori de' plagiostomi colle seguenti parole:

« La hanche des poissons cartilagineux n' est pas partout formée d' après » le même type. Chez les *raies* et les *squales,* elle constitue une sorte de barre » transversale qui est considérablement plus large d' une côté à l' autre que » d' avant en arrière, a sa plus grande minceur de haut en bas, et se termine » à ses deux extrèmités, en avant et en arrière, par une apophyse, dont l' anté- » rieure est tournée en avant et en bas, la postérieure en haut et en arrière. .

» . . . . . .

» La seconde portion, la *nageoire abdominale des poissons cartilagi- » neux*, particulièrement des *raies*, se compose, comme la nageoire thoracique, » de deux parties: 1.° d' une série de pièces osseuses, fort alongées, plates, » quadrilatères, se suivant d' avant en arrière, et diminuant de volume dans le » même ordre, dont la première s' articule avec le bassins au point de réunion » de sa partie transverse avec ses parties latérales; 2.° de quelques séries de » pièces minces, plates, alongées, diminuant aussi beaucoup de volume vers le » bord libre, où elles sont bifurquées; les antérieures, et s' attachent immédia- » tement à l' extrémité externe de l' os pelvien. »

E *Giorgio Cuvier* alla pagina 194 dell' opera citata:

« Dans les *chondroptérygiens* et surtout dans les *raies*, la partie qui » supporte la nageoire ventrale, a une analogie très grande avec le bassin des » reptiles; elle est formée (dans la *raie bouclée* qui nous sert d'exemple) d'une » forte barre transversale inférieure, laquelle, après avoir donné une longue » apophyse antérieure, se recourbe pour prodouire une partie montante qui » tient par des ligaments aux apophyses transverses et aux apophyses épineu- » ses des dernières vertebres dorsales. Cet os tient évidemment lieu des os in- » nominés; on pourrait même y voir dans la partie montante l' iléon, dans » l' apophyse antérieure le pubis, et dans la barre transverse l' ischion. »

La cintura abdominale dello *Acanthias vulgaris* è rappresentata da una striscia cartilaginea orizzontale (Tav. III, fig. 7, *a*) nella quale si distinguono:

Una faccia superiore concava ed una faccia inferiore convessa, un margine anteriore ed uno posteriore e quattro angoli, vale a dire due anteriori e due posteriori. Il margine anteriore è determinato da due linee curve rivolte colla loro convessità verso il margine posteriore, le quali congiungendosi nel punto di mezzo formano un' eminenza. La stessa figura ha il margine posteriore. A ciascuno dei due angoli posteriori sono congiunti mediante articolazioni due pezzi cartilaginei i quali si combinano in quel punto ad angolo retto (Tav. III, fig. 7, *b*, *b*, *c*, *c*). Uno di essi è molto piccolo, ha una forma triangolare e si trova in posizione orizzontale nella continuazione del margine posteriore di quella lamina cartilaginea che rappresenta il pelvi. L' altro pezzo cartilagineo ha due volte la lunghezza della cartilagine del pelvi e la forma di una lama di caniffo colla schiena rivolta all' interno e col taglio verso l' esterno. Nell' angolo compreso da questi due pezzi cartilaginei, e precisamente lungo i lati, sono ordinati i raggi delle pinne abdominali. Ognuno di essi ha una posizione obbliqua rispetto alla cartilagine alla quale è attaccato; è inclinato verso la coda del pesce, e composto di due bastoncini cartilaginei (Tav. III, fig. 7, *d*, *d*, *e*, *e*). Il primo che s' attacca alle cartilagini più solide è circa cinque volte più lungo del secondo che porta alla sua estremità libera.

VII. *Pinne dorsali.*

Lo *Acanthias vulgaris* ha due pinne dorsali ciascuna delle quali è contraddistinta da una spina solida acutissima. Ognuna di queste pinne è formata da più pezzi cartilaginei. E in fatto la prima (Tav. III, fig. 1, *F*) è composta d' una grande cartilagine triangolare, la quale con uno de' suoi lati s' appoggia alla colonna vertebrale (Tav. III, fig. 1, *o*). Questo lato ha due margini laterali sporgenti in fuori. Al lato anteriore s' appoggia la spina (Tav. I, fig. 1, *p*) ed al posteriore si congiungono alcune cartilagini minori. Queste sono in numero di dieci e distribuite in tre serie. La prima serie (Tav. III, fig. 1, *q*) composta di tre cartilagini è attaccata alla metà inferiore del lato posteriore della cartilagine triangolare. La seconda (Tav. III, fig. 1, *r*) composta di quattro pezzi più grandi è congiunta alla metà superiore del detto lato ed al margine posteriore della prima serie, ed è congiunta inoltre col suo margine posteriore alla terza serie formata da altri tre pezzi cartilaginei oblunghi (Tav. III, fig. 1, *s*).

La seconda pinna dorsale è identica alla prima, colla sola differenza che al

margine anteriore della spina è attaccato un pezzo cartilagineo che somiglia ad un quadrilatero irregolare (Tav. III, fig. 2, *i*) che è appoggiato con un angolo alla colonna vertebrale.

VIII. *Ossificazione.*

Le prime investigazioni veramente scientifiche sull'ossificazione dello scheletro dei plagiostomi furono istituite da *Giov. Müller* e si trovano descritte nella succitata classica memoria dei mixinoidi.

Io non trovo inutile di riportare quanto questo sommo notomista scoprì intorno a questo argomento, tanto più che senza ricordarsi le sue osservazioni non saria possibile d' intendere alcune particolarità che sono il resultato delle mie ricerche. Ecco le precise parole di *Müller*:

« Nei plagiostomi si trova nell' interno di quasi tutte le loro cartilagini, » cartilagine jalina con corpuscoli cartilaginei. Essa però non si trova a nudo » in nessun luogo, ma è dovunque rivestita di una crosta opaca di solido tes- » suto cartilagineo a musaico. L'interno di tutte le cartilagini degli squali e delle » ragie è composto interamente di cartilagine cartilaginea ad eccezione dei corpi » vertebrali. Questi sono per lo più formati da una cartilagine ossificata molto più » dura, assolutamente opaca, e soltanto in alcuni si trova nelle pareti dei corpi » vertebrali una croce giacente di cartilagine jalina, che si può scorgere solamente » tagliando la vertebra nel mezzo perpendicolarmente alla sua lunghezza. (Vedi » Tav. IX, fig. 6.) Le braccia di questa croce si allargano alle estremità verso » la superficie della vertebra, sono più anguste verso l' asse, e la loro estremità » esterna arriva per lo più fin quasi alla superficie della vertebra. Le estremità » interne delle braccia arrivano fino quasi all' asse, ma le braccia non si con- » giungono chè anzi sono separate da un nucleo duro, che separa una dall' al- » tra le due faccie coniche incavate della vertebra. Da questo nucleo partono » lateralmente verso la sostanza jalina della croce 4 esili laminette dure. Per » vedere questa cartilagine interna trasparente dei corpi vertebrali degli squali » basta tagliare nel modo suesposto una vertebra dei generi *Carcharias*, *Muste-* » *lus*, *Zygoena*. Guarda alla Tav. 9, fig. 1, una tale sezione dello *Squalus mu-* » *stelus*. Negli scheletri disseccati sulla sezione delle vertebre non si vede altro » che le cavità dove giaceva la sostanza jalina disseccata. Qualche volta però si

» osserva nelle vertebre secche di squalo quattro punti, due superiori e due in-
» feriori, dove apparisce mancante la sostanza del corpo vertebrale. I superiori
» si trovano alla base degli archi vertebrali, gli inferiori alla base dei processi
» trasversi . . . . . .

» La cartilagine pavimentosa non si incontra che negli squali e nelle raz-
» ze, riveste dappertutto la cartilagine jalina come una crosta più dura, e si
» trova in tutte le cartilagini dei plagiostomi ad eccezione dei corpi vertebrali.
» . . . . . .

» Nella colonna vertebrale là dove i corpi vertebrali sono composti spesse
» volte di cartilagine molto dura, ma nè jalina nè pavimentosa, l' interno dei
» processi trasversi, degli archi e dei processi spinosi è jalino, e la superficie è
» pavimentosa. Soltanto rare volte in alcuni squali gli archi acquistano lo stesso
» tessuto consistente dei corpi vertebrali. Nello *Spinax, Centrina, Scyllium* in
» vece la parte esterna dei corpi vertebrali è del tutto jalina, e l' esile strato
» ossificato giace internamente. Nello *Squatina* si alternano concentricamente
» nei corpi vertebrali strati cartilaginei jalini e calcarei . . . . . .
» . . . . . .

» Nell' interno della cartilagine jalina si trova rarissime volte cartilagine
» pavimentosa . . . . . .

» La parte solida dei corpi vertebrali degli squali e delle razze in molti
» sono tanto perfettamente ossificati, quanto lo può essere la vertebra d'un pe-
» sce osseo. Oltre la cartilagine calcarea pavimentosa dei plagiostomi che rive-
» ste tutte le sue cartilagini jaline, non v' ha nello scheletro dei plagiostomi al-
» tre parti ricche di calce che i corpi vertebrali. Ma la sostanza di questi meri-
» ta maggiormente il nome di osso di quello che la crosta della cartilagine pa-
» vimentosa calcarea. Già sopra accennai che i corpi vertebrali di alcuni pla-
» giostomi hanno internamente una croce di cartilagine jalina trasparente, e
» che la cartilagine jalina arriva in quattro punti fin presso alla superficie dei
» corpi vertebrali, vale a dire là dove superiormente sorgono gli archi vertebrali
» ed inferiormente i processi trasversi. Tutte le altre parti del corpo vertebrale
» sono formate da osso durissimo bianco che confina strettamente col jalino. Il
» tessuto di questa sostanza ossea è a maglia stretta ovvero spugnoso. Io non
» so se le piccole lacune sieno chiuse oppure comunichino fra loro. Solo al
» margine delle faccette vertebrali l' osso ha una struttura fibrosa, anzi in modo
» che le fibre sembrano quà e là concatenate insieme, e scorrere nella direzio-

» ne della periferia della vertebra . . . . . .

» . . . . . .

» Dai fatti fin qui esposti risulta che fino ad ora non avevamo per anco » nessuna nozione intorno alla composizione anatomica delle cartilagini dei pe- » sci cartilaginei . . . . . .

» Le vertebre degli squali e delle razze non hanno più foro di communi- » cazione fra le due faccette coniche di una vertebra. Un' altra circostanza per » la quale le vertebre dei plagiostomi si allontanano maggiormente di quello che » le vertebre dei pesci ossei dallo stadio embrionale, si è che il corpo vitreo » si trova soltanto negli embrioni degli squali e delle razze e manca negli adulti. » Le faccette delle vertebre dei plagiostomi adulti sono ripiene di un fluido (1).

L' ossificazione dei condrotterigi fu studiata più tardi dal dott. *Nardo*. Questo investigatore presentò all' i. r. Istituto veneto nell' aprile 1843 i risultamenti delle sue ricerche. Indipendentemente dalle investigazioni di *Müller*, le quali gli erano sfuggite, il zoologo veneto arriva ad identici risultamenti con qualche dettaglio più esatto intorno alla ordinazione delle lacune cartilaginee. Prova questa dell' esattezza delle indagini di tutti e due i naturalisti (2).

Finalmente *Leydig*, sette anni or sono, tornò ad occuparsi di questi studii senza però aggiugnere alcun che di nuovo a quanto avevano detto *Müller* e *Nardo* (3).

Io stesso ad onta delle più scrupolose indagini poco potrò aggiugnere di nuovo a quanto aveva già osservato *Müller*.

Nell' *Acanthias vulgaris* la cartilagine pavimentosa ricopre tutti gli organi di cartilagine jalina meno i corpi vertebrali, ed i dischetti sono molto piccoli ed a mutuo contatto senza interstizio. Essa riveste oltre a ciò la faccia interna del canale del midollo spinale (Tav. III, fig. 8, *d*) e del canale dei vasi caudali. I corpi delle vertebre sono perforati nel loro asse longitudinale, ed hanno uno strato d' ossificazione compatta vera simile ad una clepsidra nella superficie interna delle loro faccette (Tav. III, fig. 9, *a*, *b*). Nella strozzatura di questa clepsidra trovasi uno strato cartilagineo che la circonda come un anello (Tav. III,

(1) Joh. Müller: *Vergleichende Anatomie der Myxinoiden*, pag. 131 et seq.

(2) *Memorie dell' i. r. Istituto veneto, II.* 1845. *Osservazioni anatomiche comparative sull'intima struttura delle cartilagini dei condrotterigi* del dott. Domenico Nardo, pag. 201 e seg.

(3) Leydig: *Beyträge zur Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Rochen und Haien.* Leipzig 1852, pag. 1, 10.

fig. 9, *a*, *b*), e questo è circondato da un altro anello osseo esterno che si immedesima coi margini della clepsidra.

II. MUSTELUS VULGARIS.

(Tav. IV, Tav. VI, Fig. 3, 4).

Questa specie, secondo la caratteristica di *Müller* e *Henle*, i quali compresero in un unico tipo le due specie *M. plebejus* e *M. equestris* di *Bonaparte*, ho scelto come esempio del genere *Mustelus*.

Intorno alla sua colonna vertebrale *Giov. Müller* scriveva:

« Fig. 8.me présente des vertèbres du *Mustelus vulgaris* de profil (fig. 8) » e par la face inférieure (fig. 8 *a*). Le corps de vertèbres sont fortement dé- » primés ou étranglés vers le milieu de leur longueur et ressemblent par là à » des clepsydres. Les pièces vertèbrales supérieures sont ossifiées en forme de » carrés irréguliers. Les cartilages transverses ont une écorce ossifiée. Il existe » des pièces supérieures impaires. Les corps de vertèbres sont un peu plus » longs que hauts (1). »

Affinchè più facile riesca la descrizione divideremo anche la colonna vertebrale di questo pesce in alcune regioni e precisamente in quattro, vale a dire: 1.° nella regione anteriore che si estende dall' occipite fino all' estremità anteriore della prima pinna dorsale; 2.° nella regione addominale che si estende dall' apice anteriore della prima dorsale fino alle addominali; 3.° nella regione anale estesa da queste fino all' estremità posteriore dell' anale; e finalmente 4.° nella caudale estesa dalla estremità posteriore della anale fino all'apice caudale.

Tenendo ferme le denominazioni addottate dal notomista di Berlino, per le varie parti componenti le vertebre, vedremo che quantunque, come egli asserisce, i corpi vertebrali sieno costantemente strozzati nel mezzo, ciò non pertanto il rapporto della lunghezza all' altezza è varia in maniera molteplice. I corpi delle vertebre aumentano costantemente in lunghezza dall' occipite fino alla prima terza parte della regione anale, donde gradatamente diminuiscono fino all' apice caudale. Gli è perciò che le prime sei o sette vertebre sono appena un terzo più lunghe che alte, mentre dietro la prima dorsale misurano in lunghezza il doppio dell' altezza, nel mezzo della regione anale sono altrettanto lunghe

(1) Louis Agassiz l. s. c.

che alte. Si vede perciò che questo carattere è incostante, e che l' altro della strozzatura confonde i corpi delle vertebre del *Mustelus* con quelle dello *Acanthias*. Più tardi però vedremo che questi caratteri combinati con altri diventano preziosi per ulteriori distinzioni. Sopra la catena formata dai corpi delle vertebre si trova una doppia catena di piccoli pezzi ossificati, ciascuno dei quali ha la forma d' un esagono (Tav. IV, fig. 1, 2, *a*, *a*, *a*, *a*) tale che due lati opposti sieno eguali fra loro ma più lunghi degli altri quattro parimenti eguali fra loro. Questi pezzi esagoni sono collocati colla loro diagonale maggiore perpendicolarmente all'asse della colonna vertebrale e si toccano coi loro lati maggiori. Sembrerebbe che questi pezzi dovessero corrispondere, alternandosi, agli archi vertebrali superiori ed alle cartilagini intercrurali. Ma se paragoniamo il loro numero a quello dei corpi delle vertebre vedremo che questa interpretazione diventa assai dubbia, in quanto che egli è ben vero che nella regione anteriore ad ogni corpo di vertebra corrispondono da ciascun lato due pezzi esagoni, uno dei quali viene a cadere sul mezzo del corpo della vertebra e l' altro nell' interstizio fra due vertebre consecutive ; ma in tutta la regione addominale, nella prima terza parte della regione anale, ed anche in qualche altro punto di questa non che della caudale ad ogni corpo di vertebra corrispondono da ciascun lato tre pezzi esagoni, due dei quali cadono sopra il corpo d' una vertebra e il terzo nell'interstizio fra due vertebre. Costantemente si osserva però che a ognuno dei corpi delle vertebre più corte appartengono da ciascun lato due, e ad ognuno dei corpi delle vertebre più lunghe tre pezzi esagoni. Gli angoli superiori di questi formano una dentatura simile a quella d' una sega e tra i singoli denti si trovano addentellati dei pezzi impari pentagoni i quali con un angolo penetrano fra le dentellature dei pezzi esagoni (Tav. IV, fig. 1, 2, *b*), aderiscono l' uno all' altro con due lati, ed hanno il quinto lato collocato orizzontalmente in modo da formare una linea parallela all' asse della colonna vertebrale, la quale occupa la parte più alta di questa. Questi pezzi intercalari impari verso la metà della pinna caudale diminuiscono in modo che spariscono del tutto.

I *processi trasversi* somigliano a piccolissime laminette triangolari le quali occupano una posizione presso a poco orizzontale nelle regioni anteriore, ventrale ed anale (1). Ma nella regione caudale dal principio fino alla pinna cau-

(1) Vennero ommessi nella Tavola perchè facilmente si staccano.

dale s'allungano, ed attenuandosi fino all' estremità libera si ricurvano non solo sotto la colonna vertebrale (Tav. IV, fig. 2, *c, c*) in modo da formare congiungendosi coi loro corrispondenti del lato opposto un canale pei vasi caudali ; ma dopo d' essersi congiunti e ricurvati verso l' estremità caudale, ciascun pajo manda un ramo unico orizzontale appuntito che va ad appoggiarsi colla punta sul ginocchio formato dal pajo seguente (Tav. IV, fig. 2, *d, d*). Fra i processi trasversi di ciascuna vertebra resta da ciascun lato uno spazio triangolare colla base rivolta in giù (Tav. IV, fig. 2, *e, e*) riempiuto da una membrana fibrosa. Questi processi sono altrettanto alti quanto una vertebra. Nella regione della pinna caudale s' allungano improvvisamente del doppio, prendono la forma di una scimitarra che con la base estremamente ingrossata si attacca al corpo della vertebra, ed attenuandosi gradatamente verso l'estremità libera, qui d' improvviso si allarga in due piccole eminenze simili a condili, l' anteriore delle quali è a contatto colla posteriore del processo spinoso che lo precede (Tav. IV, fig. 2, *f, f*). Questi processi si allungano sino circa alla seconda terza parte della pinna, per poi diminuire gradatamente fino all' estremità caudale. Sopra ciascun pezzo intercalare impari della pinna caudale e dove questi mancano, corrispondenti a ciascun corpo vertebrale, trovasi un processo cartilagineo simile ad un cono ricurvo e rivolto indietro in modo da formare un angolo molto acuto col corpo della vertebra sottoposto (Tav. IV, fig. 2, *g, g*), e appoggiato colla base alla colonna vertebrale. Per le prime tre o quattro vertebre sono appena distinte, ma ben presto s' allungano in modo da misurare la doppia altezza del corpo della vertebra corrispondente, ed appena all' ultima estremità caudale improvvisamente diminuiscono. S'assottigliano però gradatamente dal principio al termine della pinna caudale.

Considerazioni. Dal fin qui esposto risulta :

1.° Che trovando una vertebra, il cui corpo è più lungo che alto, con una strozzatura nel mezzo, con pezzi esagoni sovrapposti, e pezzi pentagoni impari fra le dentellature di quelli, potremo conchiudere che queste vertebre sono di un *Mustelus.*

2.° Che se a questa vertebra apparterranno due pezzi esagoni, e non avrà processi trasversi congiunti, essa sarà una della regione anteriore ovvero della porzione posteriore dell' anale, ma mai della toracica ; poichè per esser tale dovrebbe avere tre pezzi esagoni.

3.° Che se una vertebra ha processi trasversi congiunti, con una punta

orizzontale rivolta indietro, essa appartiene alla metà anteriore della regione caudale, e se questi invece terminano con due eminenze condiloidee essa appartiene alla metà posteriore della regione caudale.

4.° Che avendo l' impressione d'una coda; tracciato l'asse, se la curva superiore ha tanta eccentricità che sembra quasi parallela a quello, e la massima convessità della curva inferiore trovasi subito alla fine della sua prima terza parte, questa impressione proviene da un *Mustelus*.

II. *Il cranio.*

Osserviamo il cranio dalla parte superiore. La regione nasale è formata da due emisferi che sono i padiglioni nasali (Tav. IV, fig. 3, *a*, *a*), rivolgono il cerchio massimo verso la faccia ventrale, e sono congiunti nell' asse della testa. Dal punto culminante di ciascun padiglione parte una listarella cartilaginea (Tav. IV, fig. 3, *b*, *b*) che convergendo verso l' asse vanno a congiungersi in punta con altre due listerelle (Tav. IV, fig. 3, *c*, *c*) che partono dalla base del cranio. Siccome queste sono congiunte fin dalla loro origine e sono ad un tempo il prolungamento dell'asse della testa, le quattro listerelle cartilaginee formano i tre spigoli di un angolo triedro che prolungandosi col vertice ben al di là della linea di demarcazione dei padiglioni delle narici costituisce lo scheletro del muso del pesce. La regione nasale è più larga del resto del cranio, ma misura appena un quarto della lunghezza di questo. La regione oculare ha la forma d' un *x*, è lunga due quarte parti del cranio, ha nell'asse un sollevamento ovale (Tav. IV, fig. 3, *d*) e ai due margini laterali due ali semilunari che proteggono in tutta la loro estensione le regioni superiori delle orbite (Tav. IV, fig. 3, *e*, *e*). Là dove le corna anteriori della *x* formano le loro curvature trovasi da ciascun lato un' ampia apertura ovale (Tav. II, fig. 3, *f*, *f*), ed al sito corrispondente delle corna posteriori un piccolo forellino (Tav. IV, fig. 3, *g*, *g*), pei quali si può communicare colla cavità dell' orbita. Nel punto di mezzo del limite fra la regione nasale e l' articolare trovasi un' ampia apertura quadrangolare, una vera fontanella (Tav. IV, fig. 3, *h*), che mette immediatamente nella cavità craniale, ha una posizione obbliqua dall' indietro e dal disopra all'innanzi ed al disotto, ed è limitata superiormente da un margine tagliente formato dalla vôlta craniale. All' estremità opposta dell' asse longitudinale dell'eminenza ovale trovansi in una fossetta due fori ovali, obbliqui, molto ravvicinati, ciascuno dei

quali mette nel rispettivo organo uditivo (Tav. IV, fig. 3, *i*, *i*). La regione auriculare è formata dai due organi auditivi, che occupano i due angoli posteriori del cranio, ciascuno dei quali ha un' impressione quadrilatera (Tav. IV, fig. 3, *j*, *j*). Il cranio osservato alla faccia inferiore presenta le due aperture circolari delle narici (Tav. VI, fig. 3, *a*, *a*), ciascuna delle quali dal quadrante posteriore esterno manda verso il centro un' aletta triangolare (Tav. VI, fig. 3, *b*, *b*) e un' altra più corta dal quadrante anteriore esterno (Tav. VI, fig. 3, *c*, *c*). Queste due aperture sono separate da un prolungamento dell' asse del cranio che divisosi in due listerelle appena appena divergenti (Tav. VI, fig. 3, *d*, *d*) concorrono ad incontrare il vertice dell' angolo triedro formato colle due listerelle che partono dai vertici dei padiglioni delle narici (Tav. VI, fig. 3, *e*, *e*). In fondo a ciascuna narice trovasi l' ampia apertura pel nervo olfattorio (Tav. VI, fig. 3, *f*, *f*). Il resto della faccia inferiore del cranio presenta l' aspetto di un corpo di chitarra la cui strettura trovasi al principio delle orbite, dove pure trovasi da ciascun lato un piccolo forellino che mette in comunicazione con queste. La faccia inferiore di queste è protetta da ciascun lato da una lamina semilunare sporgente (Tav. VI, fig. 3, *g*, *g*) che contribuisce a formare la porzione più dilatata. All' estremità posteriore della regione oculare trovasi da ciascun lato una fossetta glenoidale per la giuntura colla branca superiore dell' ioide (Tav. VI, fig. 3, *h*, *h*). Dietro di quella lateralmente v' è il meato auditorio esterno, che occupa l' ultimo angolo posteriore del cranio. Il margine posteriore di questo è determinato da due linee simili a un quarto di cerchio colla convessità rivolta all' innanzi (Tav. VI, fig. 3, *i*, *i*), fra le quali va ad infiggersi la colonna vertebrale (Tav. VI, fig. 4, *e*). Al confine fra la regione oculare ed auricolare alla base del cranio trovansi quattro forellini (Tav. VI, fig. 3, *k*, *k*) distribuiti a mezza luna verticale all' asse del cranio, dei quali i due esterni comunicano colle due orbite ed i due interni mettono nella cavità cerebrale. Le orbite (Tav. IV, fig. 1, *h*) hanno la forma di semielissoidii, non hanno peduncoli cartilaginei pei bulbi, ed in esse trovansi molti fori pel passaggio dei nervi cerebrali e dei vasi del bulbo dell' occhio. Il foro pel passaggio del nervo ottico è collocato nel fondo posteriore della curvatura.

III. *Apparato della masticazione.*

Ciascuna cartilagine odontoidea (Tav. VI, fig. 4, *A*, *A*) superiore ha la forma d' una striscia che con un' estremità è congiunta alla stessa cartilagine dell' altro lato, e con l' altra alla cartilagine odontoidea inferiore non solo ma ben anco colla branca superiore dell' ioide (Tav. VI, fig. 4, *a*, *a*). Il loro margine superiore è ingrossato e porta ai confini tra la prima e la seconda, e tra la seconda l' ultima terza parte una sporgenza (Tav. VI, fig. 4, *b*, *b*, *b'*, *b'*), delle quali l' interna è rivolta indietro. La loro faccia esterna è convessa e l' interna concava tanto dall' innanzi all' indietro che dall' insù all' ingiù. Le cartilagini odontoidee inferiori somigliano a borse di cacciatore (Tav. IV, fig. 4, *B*, *B*), hanno un margine superiore retto ed un inferiore fortemente ricurvo (Tav. VI, fig. 4, *c*, *c*), la cui massima curvatura viene a cadere verso l' estremità posteriore od esterna. Gli è perciò che l' estremità interna è molto angusta, mentre l' esterna è molto dilatata, ed oltre a ciò un momento rivolta in fuori. Questa s' articola colle due branche superiore ed inferiore dell' ioide nel loro punto di congiunzione (Tav. VI, fig. 4, *d*, *d*), e colla cartilagine odontoidea superiore relative.

IV. *Archi ioidei ed apparato branchiale.*

La copula dell' ioide è triangolare con un angolo rivolto all' innanzi, gli altri due angoli congiunti alle branche inferiori, ed il margine posteriore incavato (Tav. VI, fig. 4, *C*). Le prime branche dei primi due archi branchiali hanno la forma di falci (Tav. VI, fig. 4, *e*, *e*, *e'*, *e'*); quelle degli altri due la forma d' una berretta frigia colla punta attaccata alle seconde branche (Tav. VI, fig. 4, *f*, *f*, *f'*, *f'*). Le terze branche hanno due eminenze condiloidee alle loro estremità interne (Tav. VI, fig. 4, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*). Le quarte branche del primo arco (Tav. VI, fig. 4, *h*, *h*) dalle eminenze glenoidee posteriori delle terze convergono ad angolo acuto all' indietro verso l' asse dell' apparato per congiungersi ad una cartilagine congiungente simile ad una piccola pallottola (Tav. VI, fig. 4, *i*). Questo angolo però non ha altra congiunzione immediata. Quelle del secondo arco (Tav. VI, fig. 4, *h'*, *h'*) presentano le stesse particolarità, colla sola differenza che la cartilagine congiungente è congiunta

alla terza cartilagine congiungente (Tav. VI, fig. 4, *i'*) nel modo seguente. La terza cartilagine congiungente ha la forma d' una lancia (Tav. VI, fig. 4, *j*) con una punta molto allungata ed i margini anteriori obliqui e convergenti ad angolo. Sul vertice di quest' angolo poggia la congiungente del secondo arco; agli angoli formati dai margini anteriori e dai relativi posteriori (Tav. VI, fig. 4, *k*, *k*) s' attaccano le branche inferiori delle mascelle faringee (Tav. VI, fig. 4, *l*, *l*), e nel punto di mezzo dei margini posteriori le quarte branche cortissime e ricurve del terzo arco (Tav. VI, fig. 4, *m*, *m*). Al quarto arco mancano le quarte branche, e, delle due eminenze condiloidee della terza branca, si attacca l' anteriore alla eminenza posteriore del terzo arco, e la posteriore all' estremità interna della branca inferiore della mascella faringea. Questa ha due sole branche da ciascun lato. La superiore è simile ad una mannaja (Tav. VI, fig. 4, *n*, *n*) con un foro ovale nella porzione attenuata e con l' estremità ingrossata attaccata alla branca inferiore. La giuntura fra la copula e la branca inferiore dell' ioide è congiunta da ciascun lato mediante una piccola cartilagine all' eminenza condiloidea anteriore del primo arco (Tav. VI, fig. 4, *o*, *o*); la posteriore di questo alla anteriore del secondo, e la posteriore del secondo all' anteriore del terzo. Alla punta della cartilagine congiungente lanceolata s' attacca una piccola striscia cartilaginea liguliforme (Tav. VI, fig. 4, *p*).

V. *Estremità superiori.*

La cintura toracica (Tav. IV, fig. 4, *A*) è formata da una striscia semicircolare cartilaginea che si attenua dal punto di mezzo verso le estremità libere. Il margine anteriore forma nel punto di mezzo una lieve prominenza la quale nell' apice ha una breve incisione (Tav. IV, fig. 4, *a*). Il margine posteriore ha due eminenze alle quali si articolano le due pinne toraciche (Tav. IV, fig. 4, *b*, *b*). Nell' articolazione s' incontrano le estremità di tre cartilagini piramidali presso a poco eguali in grossezza alle loro basi, ma che aumentano in lunghezza dall' esterna all' interna (Tav. IV, fig. 4, *c*, *c*, *d*, *d*, *e*, *e*). Le due interne sono congiunte alla cintura toracica mediante i loro apici, e l' esterna mediante la base. La base dell'interna è curva, quella della media obbliqua dall'indentro all'infuori. I raggi delle pinne formano tre serie consecutive. La prima (Tav. IV, fig. 4, *f*, *f*) somiglia ad un ventaglio attaccato alla base delle due cartilagini

articolari interne; la seconda ad una mezza luna (Tav. IV, fig. 4, *g*, *g*) col corno esterno reciso; e la terza (Tav. IV, fig. 4, *h*, *h*) ad una mezza luna perfetta. Il margine posteriore dello scheletro delle pinne toraciche somiglia perciò ad un semicerchio.

VI. *Estremità inferiori.*

La pelvi (Tav. IV, fig. 1, *H*) è rappresentata da una striscia cartilaginea ricurva ad arco, attenuata nel mezzo, e con le due estremità libere dilatate. All' angolo interno di queste è attaccato un pezzo cartilagineo simile ad una scimitarra (Tav. IV, fig. 1, *i*, *i*) con un margine interno ingrossato, ed un margine esterno tagliente. A questo, come una palizzata, s' attacca una prima serie di raggi (Tav. IV, fig. 1, *j*, *j*) che aumentano in lunghezza dalla pelvi alla punta opposta. Ciascheduno di questi raggi porta alla sua estremità libera un altro raggio lesiniforme (Tav. IV, fig. 1, *k*, *k*). Questi sono più lunghi nel mezzo e s' articolano ai raggi della prima serie colle loro estremità ingrossate.

VII. *Pinne dorsali.*

Lo scheletro della prima pinna dorsale è formato da tre serie di raggi sovrapposti. L'inferiore (Tav. IV, fig. 1, *l*) è formata da raggi attenuati nel mezzo ed ingrossati alle loro estremità. Questi diminuiscono gradatamente in lunghezza dal mezzo verso le due estremità. Il margine inferiore di questa serie non tocca che colla porzione di mezzo la colonna vertebrale. La serie intermedia (Tav. IV, fig. 1, *m*), i cui raggi hanno rispettivamente la doppia lunghezza dei primi, ma la stessa forma, e sono obbliquamente rivolti verso la coda; diminuiscono dal terzo posteriore verso le due estremità, ma in modo che quando l' ultimo raggio è arrivato alla metà della lunghezza del più grande, il primo è già arrivato ad un quinto della lunghezza di questo. I raggi della terza serie (Tav. IV, fig. 1, *n*) somigliano a lame di scalpelli anatomici colla punta rivolta verso la coda del pesce ed all' insù. Essi diminuiscono negli stessi rapporti dei raggi della seconda serie ed hanno l' altezza di quelli della prima. Il margine libero dello scheletro della prima dorsale del *Mustelus vulgaris* segna una linea convessa, il cui vertice dinota il confine tra il terzo di mezzo ed il posteriore.

Lo scheletro della seconda dorsale (Tav. IV, fig. 2, *O*) possiamo far a meno di descrivere, se ci rappresentiamo la prima rovesciata in modo che l'estremità anteriore diventi posteriore, che i raggi della seconda serie si raccorcino un momento e diminuiscano di tre, e che gli ultimi due raggi posteriori sieno formati ciascheduno da un solo pezzo restando tutti rivolti indietro.

VIII. *Pinna anale.*

Lo scheletro della pinna anale è esso pure formato da tre serie di raggi. La prima, quella più vicina alla colonna vertebrale (Tav. IV, fig. 2, *r*), è composta di raggi piccoli, i quali aumentano grandemente dall' indietro all' innanzi; e presso all' estremità anteriore si ricurva in giù. I singoli raggi hanno la forma di quelli della serie corrispondente delle pinne dorsali. La seconda serie (Tav. IV, fig. 2, *Q*) è composta di raggi tre volte più lunghi di quelli della prima, che conservano diametro non che lunghezza costante, e diminuiscono soltanto rapidamente verso l' estremità anteriore fino a che l' ultimo arriva alla lunghezza di quelli della prima serie. Quelli della terza serie (Tav. IV, fig. 2, *p*), dei quali però mancano i primi due, sono eguali fra loro, ma d'una metà più piccoli di quelli della prima serie e di forma eguali a quelli della serie corrispondente delle dorsali. Tutti i raggi sono rivolti obbliquamente verso la coda. Il margine libero di questa pinna è segnato da una linea leggermente arcuata.

IX. *Ossificazione.*

Anche in questo squalo la cartilagine pavimentosa ci presenta gli stessi caratteri e la stessa distribuzione che nell'*Acanthias vulgaris*. Le vertebre però sono costruite nel modo seguente. Se si taglia una vertebra con sezione verticale nel punto di mezzo dell' asse longitudinale si scorge nel centro del corpo vertebrale un piccolissimo forellino che serve di comunicazione fra le due faccette coniche. Esso è circondato da un piccolo anello osseo, che è la sezione della clepsidra di strato più compatto, che riveste la faccia interna delle facette (Tav. IV, fig. 5, *a*). Dell' esistenza di questa clepsidra si può assicurarsi facilmente tagliando nel mezzo per lungo il corpo d' una vertebra. Questo anello è il centro d' una croce maltese di sostanza ossea ma meno compatta di quella della clepsidra, nella quale le branche verticali (Tav. IV, fig. 5, *b*) sono molto più esili

delle orizzontali (Tav. IV, fig. 5, *c*). Dagli interstizii superiori della croce si sollevano i due archi vertebrali, i quali tanto alla faccia interna che all' esterna sono rivestiti di una crosta ossea che si estende fino al vertice degli angoli compresi fra le braccia della croce (Tav. IV, fig. 5, *d*). Sotto questa crosta pavimentosa trovasi tanto esternamente che internamente uno strato di cartilagine jalina, e fra questi due un nucleo osseo di sostanza simile a quella del corpo vertebrale che nella sezione suddetta in ciascun lato presenta l' aspetto d' una mezzaluna (Tav. IV, fig. 5, *e*). Da una sezione longitudinale si apprende che la clepsidra s' ingrossa verso la base dei coni (Tav. IV, fig. 6, *a*, *a*, *a*, *a*).

III. CARCHARIAS (PRIONODON) MILBERTI.

Ho scelto questo pesce come tipo del genere *Carcharias*. *Giovanni Müller*, nell' opera più volte citata, s' esprime intorno alla colonna vertebrale del genere *Carcharias* colle seguenti parole:

« La fig. 10 représente la partie antérieure de la colonne vertébrale d'un » Prionodon vue de profil, e la fig. 10 *a* par la face inférieure. Le corps de » vertèbres sont presque cylindriques, un peu comprimés latéralement et plus » courts que hauts. Les cartilages cruraux et intercruraux sont allongés, à » bords parallèls et ossifiés. Les cartilages transverses ont une écorce ossifiée; » les cartilages costaux sont insérés entre les transverses. Il existe des pièces » supérieures impaires cartilagineuses. Dans les corps des vertèbres l' espace » visible entre les cartilages transverses est très-large. »

La forma del corpo delle vertebre del *Carcharias Milberti* è tanto uniforme che si può facilmente intenderne la descrizione anche senza suddividere in regioni la colonna vertebrale. Essi hanno costantemente una forma pressochè cilindrica, ma sono stiacciati un momento tanto lateralmente che dall' alto in basso (Tav. V, fig. 1, *a*). A ciascuno dei quattro spigoli che ne risultano in tal modo trovasi una fossetta ovale suddivisa longitudinalmente da una piccola trabecola ossea. Le due fossette superiori servono d' inserzione agli archi vertebrali superiori, e le due inferiori ai processi trasversi. In questi corpi vertebrali la lunghezza è eguale all' altezza, meno che in cinque o sei vertebre un po' innanzi alla pelvi nelle quali la lunghezza è un momento più grande. A ciascuna vertebra sovrasta da ciascun lato un rudimento d' arco cartilagineo (Tav. V, fig. 1, *b*), ed a ciascun interstizio intervertebrale un pezzo intercrurale (Tav. V,

fig. 2, *c*, *c*) meno che alle sei vertebre più lunghe, a ciascuna delle quali sono sovrapposti da ciascun lato due archi vertebrali (Tav. V, fig. 2, *d*, *d*), ed alle vertebre sulle quali si estende il lembo superiore della pinna caudale alle quali mancano i pezzi intercrurali. In tutta la colonna, meno che in queste ultime vertebre, gli archi superiori hanno la forma di piccoli parallelogrammi aderenti al corpo della vertebra con uno dei lati minori; mentre i pezzi intercrurali somigliano a coni infissi colla punta negli interstizii intervertebrali. Sopra questa striscia formata dagli archi vertebrali e dai pezzi intercrurali dovrebbe trovarsi una catena di pezzi impari, i quali, secondo le osservazioni di *Giov. Müller*, dovrebbero chiudere superiormente il canale del midollo spinale. Io non rinvenni però questi pezzi impari, ma sibbene trovai chiuso il canale suddetto da una membrana fibrosa (Tav. V, fig. 1, 2, *e*, *e*, *e*, *e*). Ciò non infirma menomamente la osservazione dell' illustre zootomo di Berlino, perchè il mio esemplare era probabilmente più giovine e la membrana fibrosa non era in tal caso che il resto della membrana embrionale, dalla quale più tardi appena allo stesso modo come gli archi vertebrali superiori ed i pezzi intercalari si potrebbero sviluppare i pezzi impari. Come già più sopra notai, a quelle vertebre sulle quali si estende il lembo superiore della pinna caudale mancano i pezzi intercrurali. Esse sono perciò provvedute dei soli archi vertebrali. Questi sono lunghi quanto le vertebre relative e diminuiscono continuamente la loro altezza fino a divenire impercettibili all' estremità caudale. Essi hanno la forma d' una finestra gotica (Tav. V, fig. 2, *f*, *f*) e quelli di un lato combaciano al loro vertice coi relativi del lato opposto. Nella loro porzione superiore che viene ad essere la continuazione della vôlta fibrosa del resto della colonna vertebrale, restano fra i singoli paji degli interstizii cuneiformi i quali sono riempiuti da cartilagini impari (Tav. V, fig. 2, *g*, *g*). I processi trasversi di tutte le vertebre anteriori alla pelvi hanno la forma di linguette colla punta libera e ricurve verso la coda, e restano costantemente separate ed eguali (Tav. V, fig. 1, 2, *h*, *h*, *h*, *h*). Dalla pelvi fino a due vertebre innanzi al lembo inferiore della pinna caudale (Tavola V, fig. 2, *i-j*), il quale comincia otto vertebre innanzi al superiore, queste linguette di ciascun lato allargando la loro base si congiungono in un tutto continuo e rivolgendosi sotto la colonna vertebrale si congiungono colle loro punte alle relative dell' altro lato per chiudere il canale pei vasi caudali. Ciascun pajo manda dalla sua punta verso la vertebra susseguente una propagine cartilaginea, le quali congiungendosi in un tutto continuo chiudono inferiormen-

te con una specie di grondaja il canale dei vasi caudali (Tav. V, fig. 2, *k*, *k*), in modo però che da ciascun lato fra due di questi processi consecutivi resti una finestra triangolare che viene otturata da una membrana fibrosa (Tav. V, fig. 2, *l*, *l*). Nelle due vertebre che precedono il lembo inferiore della pinna caudale, non che nelle altre otto che precedono il lembo superiore, questi processi conservando la stessa posizione dei precedenti si dilatano in tutta la loro estensione, e congiungendosi ai loro margini chiudono lateralmente il canale dei vasi caudali fra due pareti cartilaginee (Tav. V, fig. 2, *j-m*). All' estremità libera di ciascun pajo di questi otto processi trasversi s' attacca una laminetta cartilaginea, la quale attenuandosi verso l'estremità libera va a terminare tronca e dilatata all' innanzi ed all' indietro in due piccoli condili (Tav. V, fig. 2, *n*). Queste laminette crescono gradatamente in lunghezza dalla prima all' ultima. I processi trasversi di tutte le altre vertebre componenti la coda si ripiegano immediatamente in giù sotto la colonna vertebrale per formare il canale dei vasi caudali, sono tanto larghi che i loro margini si toccano, e ciascun pajo dalla linea di congiunzione si prolunga in una laminetta rappresentante un processo spinoso inferiore, la quale alla sua origine ripiegandosi a ginocchio rivolge l' estremità libera verso la punta della coda (Tav. V, fig. 2, *o*, *o*). Queste laminette hanno gli stessi caratteri delle anzi descritte, ma dalla seconda diminuiscono gradatamente fino all' ultima, la quale diventa evanescente tanto in lunghezza che in larghezza. Là dove comincia il lembo superiore della pinna caudale, ad ogni coppia di archi vertebrali superiori è sovrapposto un processo spinoso (Tav. V, fig. 2, *p*, *p*), il quale rivolto coll' estremità libera un momento ricurva obbliquamente indietro è un momento più largo alla base. Questi processi spinosi sono a contatto l' uno coll' altro, conservano le stesse dimensioni nella metà anteriore della pinna, ma nella posteriore diminuiscono gradatamente finchè l' ultimo diventa evanescente. I primi misurano appena metà della lunghezza dei più lunghi tra gli inferiori.

Da questi studii risulta:

1.° Che vertebre con corpi cilindrici eguali in altezza e lunghezza, con quattro fossette ovali ciascuna suddivisa da una trabecola longitudinale ossea, con archi vertebrali superiori parallelogrammici, pezzi intercrurali conici, e processi trasversi liberi appartengono alla colonna vertebrale d' un *Carcharias* e precisamente alla porzione anteriore alla pelvi.

2.° Che vertebre coi caratteri suddetti, ma con processi trasversi, i quali

toccandosi alle basi formano una striscia fenestrata sotto ai corpi delle vertebre e vanno a terminare in una striscia continua, appartengono alla colonna vertebrale dello stesso pesce, ma a quella porzione che è compresa fra la pelvi ed il lembo inferiore della pinna caudale.

3.° Che vertebre coi caratteri identici dei corpi e degli archi vertebrali, ma con processi trasversi che si toccano coi loro margini ed all' estremità libera dei quali si appoggiano laminette cartilaginee, appartengono alle prime otto vertebre della pinna caudale del *Carcharias*.

4.° Che vertebre con archi vertebrali superiori della forma d' una finestra gotica appartengono a quelle della pinna caudale sulle quali si estende il lembo superiore.

5.° Finalmente che, data l' impressione della coda d' un plagiostoma, nella quale i processi spinosi inferiori incomincino a mostrarsi prima dei superiori, essa appartiene al genere *Carcharias*.

II. *Il cranio.*

Alla faccia superiore del cranio nel mezzo della regione nasale si nota una amplissima fontanella circolare (Tav. V, fig. 3, *c*) che mette a nudo la base del cranio ed è limitata posteriormente da un bordo tagliente della vôlta craniale. Ai fianchi di questa fontanella trovansi i due padiglioni nasali ellittici (Tav. V, fig. 3, *b*, *b*), il cui asse maggiore è collocato nel prolungamento dell'asse transverso della regione nasale. Ciascuno dei padiglioni nasali porta alla sua regione posteriore una piccola aletta quadrangolare cartilaginea (Tav. V, fig. 3, *a*, *c*) che sporge nell' orbita e la protegge nella regione anteriore. Il margine tagliente, che limita di dietro la fontanella, estendesi da ambo i lati in due creste eminenti che scavalcando i padiglioni nasali si prolungano in due striscie cartilaginee (Tav. V, fig. 3, *d*, *d*), le quali dal mezzo di ciascun padiglione nasale sporgono in fuori convergendo e vanno a congiugnersi coi punti estremi d' una breve striscia orizzontale (Tav. V, fig. 3, *e*), in modo che sembrano formare un piccolo telarino. Dal punto di mezzo del margine anteriore della base del cranio si estende un'altra striscia cartilaginea (Tav. V, fig. 3, *f*), la quale arrivata sotto la striscia orizzontale si biforca in due rami arcuati che colle loro estremità vanno a congiungersi coi punti estremi della striscia orizzontale. Nei punti donde si staccano dai padiglioni nasali le due striscie superiori trovansi gli ampi fori pel

passaggio dei nervi olfattori (Tav. V, fig. 3, *g*, *g*). Nella regione oculare la parte superiore del cranio somiglia ad una *x*, le cui corna anteriori sono formate dai padiglioni nasali, e le posteriori dagli organi auditivi. La vôlta craniale nella suddetta regione è curva a schiena di cavallo, ed inclinata verso l'occipite (Tav. V, fig. 1, *Q*). Nella regione auricolare si osservano due eminenze somiglianti a due triangoli sferici (Tav. V, fig. 3, *H*, *H*), dei quali il lato maggiore segna il limite laterale della porzione posteriore del cranio, e i due angoli maggiori si guardano verso l' asse. Innanzi e dietro questi due angoli restano due spazii triangolari. Nell' anteriore trovasi una fossetta, che presso ai due angoli delle eminenze auricolari è fornita di due aperture ovali le quali conducono negli organi auditivi (Tav. V, fig. 3, *i*, *i*). Il triangolo posteriore è ricurvo a schiena di cavallo ed inclinato verso la colonna vertebrale. I tre lati delle eminenze auditive sono marcati da sollevamenti tubuliformi. Alla faccia inferiore del cranio notansi nei fianchi della regione nasale le aperture delle narici di forma ellittica rivolte un poco all' innanzi (Tav. VI, fig. 5, *a*, *a*). Al loro margine interno trovansi due rigonfiamenti tubuliformi, i quali convergendo all' innanzi si congiungono ad angolo nell' asse della testa per formare una prominenza, dalla quale sporge fuori quella striscia cartilaginea che venne descritta più sopra, e la quale, colle altre due della vôlta craniale, concorre a formare lo scheletro del muso (Tav. VI, fig. 5, *b*). La base del cranio nella regione oculare è simile ad una sella terminata in punta ed abbassata anteriormente, tronca e sollevata indietro. A ciascun fianco trovasi una striscia cartilaginea della forma §, la quale colla porzione più larga protegge inferiormente l' angolo posteriore dell' orbita e si estende fino all' angolo posteriore occipitale (Tav. VI, fig. 5, *c*, *c*). Nella regione auricolare osservansi ai fianchi due eminenze più piccole, ma della stessa forma delle eminenze auditive notate sulla vôlta craniale, le quali comprendono in mezzo uno spazio simile ad una *x* segnata nell' asse da una cresta. Agli angoli posteriori della troncatura della sella trovansi due fori che conducono nella cavità craniale (Tav. VI, fig. 5, *d*, *d*) e più in là da ciascun lato un' apertura maggiore, la quale conduce nell' orbita (Tav. VI, fig. 5, *e*, *e*). La regione occipitale termina a freccia, nel cui asse si infigge la colonna vertebrale, e nei punti estremi della quale trovansi i meati auditori esterni e innanzi a ciascuno di essi una impressione glenoidale per l'articolazione del sospensorio (Tav. V, fig. 1, *r*). Le orbite hanno la forma di mezzaluna, nel corno anteriore della quale trovansi due fori, e quattro nel corno posteriore

pel passaggio dei nervi cerebrali. L'ultimo, collocato nell'angolo posteriore dell' orbita, dà passaggio al nervo ottico (Tav. V, fig. 1, *s*).

III. *Apparato della masticazione.*

Ciascuna delle cartilagini odontoidee superiori ed inferiori è formata da una striscia cartilaginea dilatata all'estremità articolare. Le superiori (Tav. VI, fig. 6, *A*, *A*) sono ricurve ad arco, le inferiori semplicemente obblique e al doppio più larghe di quelle (Tav. VI, fig. 6, *B*, *B*). Il margine superiore delle prime è piano nella terza parte interna, porta quindi un' eminenza simile ad una piramide tronca (Tav. VI, fig. 6, *c*, *c*), è concavo nel terzo di mezzo e convesso nel terzo esterno; mentre l' inferiore è concavo ne' primi due terzi e forma un angolo nell' esterno. Al lato esterno di quest' angolo trovasi l' articolazione colla corrispondente cartilagine odontoidea inferiore (Tav. VI, fig. 6, *d*, *d*). Queste hanno la forma di borse da cacciatore col margine anteriore retto nei due terzi interni, poi un momento concavo, e finalmente irregolarmente rilevato per adattarsi alla cavità glenoidale della corrispondente cartilagine odontoidea superiore. Il margine posteriore è retto, ma obbliquo nella metà interna e fortemente convesso a mezzaluna nell' esterna.

IV. *Archi ioidei ed apparato branchiale.*

I sospensorii sono molto grossi, corti, ricurvi ad ∾, tronchi all' estremità superiore ed arrotondati all' inferiore (Tav. VI, fig. 6, *e*, *e*). A questi s' articolano gli archi ioidei inferiori, ricurvi allo stesso modo, ma in senso inverso dei sospensorii, ingrossati alle loro estremità, e doppii in lunghezza di questi (Tav. VI, fig. 6, *f*, *f*). La copula è una lamina cartilaginea molto grande, pentagona, con un angolo rivolto verso la punta del muso del pesce, ed il lato opposto inciso ad arco nel mezzo (Tav. VI, fig. 6, *g*). Colla metà posteriore dei due lati paralleli si articolano gli archi ioidei, e colle due corna posteriori che limitano l' incisione arcuata s' articola da ciascun lato il primo arco branchiale (Tav. VI, fig. 6, *H*, *H*). Ciascuno di questi è composto di tre soli pezzi: il superiore più esile leggermente inflesso ad S (Tav. VI, fig. 6, *i*, *i*); il medio metà più corto leggermente ricurvo (Tav. VI, fig. 6, *j*, *j*); e l' inferiore lungo al doppio del superiore e ingrossato all' estremità che s' articola col corno della

copula (Tav. VI, fig. 6, *k*, *k*). Alle estremità articolate fra il pezzo medio e l' inferiore trovasi alla faccia interna una cavità per l' inserzione dei capi d' un muscolo. Questi archi non hanno cartilagine congiungente. Il *Carcharias Milberti* ha una sola cartilagine congiungente pei tre archi branchiali posteriori e le mascelle faringee (Tav. VI, fig. 6, *L*). Essa è una lamina molto grande, simile alla suola di una scarpa, coll' asse maggiore parallela all' asse del pesce, e l' estremità allargata verso la bocca. Al margine tagliente ed arcuato di questa s' attaccano i pezzi inferiori degli ultimi tre archi branchiali non che le mascelle faringee. Ciascuno di questi tre archi branchiali è composto di quattro pezzi. I pezzi superiori dei primi due sono laminari, un momento dilatati nel mezzo, acuminati all' estremità libera, tronchi all' articolare (Tav. VI, fig. 6, *m*, *m*, *m*, *m*); i secondi sono eguali in lunghezza a quelli, paralellepipedi e leggermente arcuati (Tav. VI, fig. 6, *n*, *n*, *n*, *n*); i terzi prismatici, tre volte più lunghi, tronchi all' estremità che si articola col secondo pezzo, e all' altra quello del secondo arco tronco e quello del terzo acuminato (Tav. VI, fig. 6, *o*, *o*, *o*, *o*); i quarti finalmente un po' più lunghi dei primi, tronchi all' estremità articolata, ed attenuati in forma di cordoncino all' altra che poggia sul margine della cartilagine congiungente (Tav. VI, fig. 6, *p*, *p*). Si trovano fossette oblunghe per le inserzioni dei capi d' un muscolo alle estremità articolate del secondo e terzo pezzo. Il pezzo superiore del quarto arco branchiale è una striscia cartilaginea acuminata all' estremità libera e tronca all' articolare, la quale dal mezzo del suo margine posteriore manda sotto un angolo acuto una branca metà più corta, che terminando tronca, va ad articolarsi colla corrispondente mascella faringea (Tav. VI, fig. 6, *q*, *q*). Il secondo pezzo è un terzo più corto ed ha i caratteri identici degli stessi pezzi degli altri archi (Tav. VI, fig. 6, *r*, *r*); il terzo è identico pure al terzo degli altri archi, ed il quarto non termina assottigliato in cordoncino, ma conservando diametro costante va a poggiarsi tronco sul margine della cartilagine congiungente. Fossette per l' inserzione dei capi d' un muscolo trovansi nei siti corrispondenti a quelli degli altri archi branchiali. Le mascelle faringee (Tav. VI, 6, *s*, *s*) sono rappresentate da ciascun lato da un' unica striscia cartilaginea molto lunga di forma ellittica, che con un vertice tronco si articola colla branca del pezzo superiore del primo arco e con l'altro vertice puntito s' attacca al margine della congiungente.

V. *Estremità superiori.*

La cintura toracica è formata da due cartilagini curve come i quadranti della periferia d' un cerchio, ingrossate, arrotondate e congiunte insieme alle loro estremità interne, acuminate all' estremità libera (Tav. V, fig. 4, *A*, *A*). Il margine superiore è allargato nel mezzo ed ha una piccola infossatura innanzi all' articolazione di ciascuna pinna (Tav. V, fig. 4, *b*, *b*); la faccia anteriore ha due infossature maggiori al di là del punto di congiunzione (Tav. V, fig. 5, *a*, *a*), e la posteriore altre due all' innanzi di ciascuna articolazione delle pinne (Tavola V, fig. 4, *c*, *c*). Per queste ciascuna branca ha alla faccia inferiore nel punto di mezzo un' eminenza piramidale. A ciascuna di queste si articolano tre grosse cartilagini. L' esterna (Tav. V, fig. 4, *d*, *d*) ha la forma d' un cono tronco congiunto alla cintura colla base, ed è molto corta; la seconda eguale a questa in lunghezza e separata da essa mediante una fessura, ha la forma d'una berretta frigia (Tav. V, fig. 4, *e*, *e*) attaccata alla cintura colla punta; e la terza lunga tre volte circa quanto la seconda, e separata da essa mediante una fessura semilunare, ha la forma d' un capuccio attaccato alla cintura per mezzo della punta (Tav. V, fig. 4, *f*, *f*). I due terzi posteriori del margine interno di quest' ultima, che è convesso, forma un angolo retto alle estremità posteriori delle altre due cartilagini. I raggi delle pinne formano tre serie consecutive, e dal loro complesso unitamente alle tre cartilagini sopraddescritte, ogni pinna toracica acquista l' aspetto d' un triangolo ottusangolo coll' angolo ottuso rivolto verso l' asse del pesce ed il lato maggiore determinante il margine esterno. La prima serie dei raggi (Tav. V, fig. 4, *g*, *g*) è attaccata lungo le estremità posteriori delle due cartilagini articolari esterne, e la porzione libera del margine esterno della interna. Alla cartilagine esterna s' attacca un solo raggio paralellogrammico, il più grosso ed il più corto di tutta la serie (Tav. V, fig. 4, *j*, *j*). Gli altri della stessa serie sono lunghi, bacillari, aumentano in lunghezza fino alla metà del margine della cartilagine articolare maggiore, poi diminuiscono gradatamente e gli ultimi si dilatano un poco all'estremità posteriore. La seconda serie (Tav. V, fig. 4, *h*, *h*) è formata da raggi d' un terzo più corti di quelli della prima. Il primo esterno è largo quanto due degli altri presi insieme; gli altri diminuiscono in lunghezza, dal medio all' interno sono di forma bacillare, meno gli ultimi sei che dilatati alla base somigliano a trapezoidi. A ciascun

raggio della prima serie è attaccato uno della seconda. Quelli della terza serie (Tav. V, fig. 4, *i*, *i*) hanno la forma di aghi affilati all' estremità libera, meno gli ultimi sei simili a trapezoidi dilatate posteriormente. Al primo raggio esterno della seconda serie sono attaccati due della terza, ed a ciascun altro uno solo. Questi aumentano repentinamente dal primo esterno al decimo, in modo che questo misura circa il decuplo della lunghezza di quello, poi diminuiscono più lentamente fino all' ultimo interno il quale diventa evanescente.

VI. *Estremità posteriori.*

La pelvi (Tav. V, fig. 6, *A*) del *Carcharias Milberti* è rappresentata da una breve striscia cartilaginea con un margine anteriore concavo ed uno posteriore convesso, e due estremità provvedute, di due incisioni semilunari ai due angoli. Nell' incisione semilunare dell' angolo anteriore è articolata colla sua estremità ingrossata una striscia cartilaginea conica un momento curva, che ben presto, dietro la sua inserzione, si suddivide in due, ciascuna delle quali termina acuminata e porta in cima un piccolo raggio conico appena percettibile (Tav. V, fig. 6, *b*, *b*). Queste due cartilagini si trovano nella continuazione della curva del margine anteriore del pelvi. A ciascuna incisione degli angoli posteriori si attacca perpendicolarmente alla pelvi un pezzo cartilagineo maggiore formato a lama di scalpello anatomico, con margine ingrossato interno e tagliente esterno (Tav. V, fig. 6, *c*, *c*). A questo sono attaccati in tutta la sua lunghezza raggi paralleli alle due cartilagini superiori e che appena appena diminuiscono verso l'estremità libera (Tav. V, fig. 6, *d*, *d*). Ciascuno di essi è articolato in cima con un altro piccolissimo raggio conico, ricurvo all'indietro (Tav. V, fig. 6, *e*, *e*).

VII. *Pinne dorsali.*

La prima pinna dorsale (Tav. V, fig. 1, *V*) è altrettanto alta che lunga con un margine superiore eminentemente curvo, ma in modo che la curva innanzi al vertice ascende assai più rapidamente di quello che discenda al di là del vertice. Il suo scheletro è formato da tre serie di raggi. Quelli della serie inferiore (Tav. V, fig. 1 α) sono collocati obbliquamente rispetto alla colonna vertebrale e formano con questa angoli acuti rivolti verso la coda. Essi diminuiscono in lunghezza dall' anteriore al posteriore in modo che la serie somiglia

ad un triangolo, il quale ha il lato minore rivolto verso la testa e l' angolo più acuto verso la coda. Questo è occupato non già da più raggi ma da una lamina cartilaginea triangolare (Tav. V, fig. 1, β). Gli altri raggi alla loro estremità inferiore sono ingrossati in due piccoli condili. La linea terminale formata dall' unione di questi ingrossamenti non è parallela all' asse della colonna vertebrale, ma un po' sollevata verso la coda. La seconda serie (Tav. V, fig. 2, γ), essendo formata da raggi, i quali vanno crescendo dal primo a quello di mezzo e poi decrescendo fino all' ultimo, somiglia ad un segmento di cerchio col margine ricurvo rivolto in su. Il decremento dei raggi è però assai più pronunciato verso l' estremità anteriore che verso la posteriore. I raggi conservano costantemente lo stesso diametro, ma i più piccoli sono anche più esili. La terza serie (Tav. V, fig. 1, δ) ha la forma di mezza luna con un margine inferiore concavo, il quale si adatta al margine convesso della seconda serie, ed un margine superiore convesso. I raggi aumentano assai più rapidamente in lunghezza dall'anteriore al massimo di quello che diminuiscano da questo al posteriore. Tutti hanno l' estremità inferiore tronca ed i minori anche la superiore, mentre che nei maggiori questa estremità è arrotondata. I due raggi che precedevano il raggio massimo ed i tre che lo seguivano nell' esemplare da me studiato erano suddivisi in due pezzi. La seconda pinna dorsale (Tav. V, fig. 2, *VV*) è molto piccola rispetto alla prima, ed è parimenti composta di tre serie di raggi. Il suo scheletro ha due estremità appuntite, una anteriore formata dall' estremità inferiore del primo raggio, ed una posteriore formata dall' estremità posteriore dell' ultima serie. Essa ha in oltre due margini, uno superiore molto arcuato col vertice della curva verso la coda, ed uno inferiore ma meno arcuato col vertice della curva verso la testa. La prima serie, vale a dire l' inferiore, somiglia ad una navicella con un margine obbliquo anteriore, uno convesso inferiore, uno concavo superiore, ed una punta che guarda la coda del pesce (Tav. V, fig. 2, ε). La metà anteriore di questa serie è formata da raggi che aumentano in lunghezza dall' anteriore al posteriore, sono tronchi superiormente, arrotondati inferiormente, e ricurvi colla convessità rivolta indietro. La metà posteriore è formata da un unico pezzo cartilagineo che si prolunga verso la coda in un lungo raggio appuntito (Tav. V, fig. 2, $\varkappa$). La seconda serie essendo formata da raggi che dapprima aumentano rapidamente, poi diminuiscono più lentamente in lunghezza, ed addattandosi al margine concavo della prima serie, ha due margini convessi (Tav. V, fig. 2, ζ). Ciascuno di questi raggi ha le due estremità tronche e appe-

na appena ingrossate. La terza serie (Tav. V, fig. 2, ϑ) essendo formata da raggi che aumentano e diminuiscono in lunghezza nello stesso rapporto di quelli della seconda, ed adattandosi al margine superiore di questa ha l'aspetto d' una mezzaluna con margine inferiore concavo e superiore convesso. I suoi raggi hanno l'estremità inferiore tronca, e la superiore puntita e un momento rivolta indietro.

VIII. *Pinna anale.*

Per ciò che riguarda la forma, la pinna anale (Tav. V, fig. 2, ϑ) è identica alla secouda dorsale, se si considera questa rovesciata sotto la colonna vertebrale, ed il suo margine superiore, che in tal caso diventa inferiore, meno convesso. Essa è parimenti composta di tre serie. Il primo raggio della prima serie (Tav. V, fig. 2, ι) (e per tale consideriamo quella più prossima alla colonna vertebrale) è più corto di tutti gli altri; il secondo ed il terzo eguali fra loro sorpassano d' un terzo la lunghezza del secondo, e il quarto parimenti di un terzo la lunghezza di questi. A questo seguono altri sette raggi eguali fra loro e appena appena più lunghi del primo. A questi segue un raggio lungo presso a poco quanto il quarto, puntito alla estremità superiore, e dilatantesi verso l' inferiore arrotondata in modo d' avere la larghezza di altri tre raggi presi insieme. Tutti questi raggi della prima serie sono inclinati verso la coda e quelli che precedono l' ultimo sono attenuati all' estremità superiore ed arrotondati all' inferiore. La seconda serie (Tav. V, fig. 2, ν) è formata da raggi che aumentano dal primo all' ultimo. Quello però non è attaccato al primo raggio della prima serie ma al quinto, e l' ultimo ha la forma dell' ultimo della prima serie ma rovesciato. Tutti quelli che precedono l' ultimo sono bacillari e un momento arrotondati all'estremità inferiore. Quelli della terza serie (Tav. V, fig. 2, λ) sono puntiti, ricurvi verso la coda, aumentano in lunghezza dal primo al penultimo, e l' ultimo è un momento più corto. I primi quattro sono attaccati all' estremità inferiore dei primi quattro della prima serie, e gli altri alle estremità inferiori di quelli della seconda serie.

IX. *Ossificazione.*

Anche nel *Carcharias* la cartilagine pavimentosa presenta le identiche particolarità che negli squali precedenti. La sezione verticale all' asse longitudi-

nale mostra nel centro un piccolissimo foro di comunicazione fra le facette coniche circondato da un anello osseo (Tav. V, fig. 7, *a*), dal quale, come le ali di un mulino, partono quattro laminette ossee fino alla periferia del corpo vertebrale che formano una croce di sant' Andrea (Tav. V, fig. 7, *b*). Questo scheletro del corpo vertebrale è rivestito a tutte le sue superficie di uno stratarello esilissimo di cartilagine jalina. I due angoli laterali formati dalle quattro laminette sono molto larghi, il superiore è più piccolo, e l' inferiore ancora più piccolo. Tutti e quattro sono riempiuti di massa ossea (Tav. V, fig. 7, *c*, *c*, *c*). Una sezione longitudinale dimostra che anche queste vertebre hanno le facette coniche rivestite d' uno strato osseo più compatto formante una clepsidra (Tavola V, fig. 8).

IV. SQUATINA VULGARIS.

Ecco le parole di Giov. Müller intorno alla colonna vertebrale del genere *Squatina*:

« La fig. 6 représente la partie antérieure de la colonne vertébrale du » *Squatina vulgaris*. Les corps des vertèbres de ce genre sont les seules qui » atteignent une largeur disproportionnée. Les facettes articulaires par lesquel- » les ils se réunissent ne sont pas circulaires, mais transversalement elliptiques. » Les corps de vertèbres sont beaucoup plus courts que larges; leur masse est » très-dens: ils ont cela de particulier qu'ils sont composés de couches alterna- » tives d' os et de cartilages; comme on peut s' en convaincre par des coupes » verticales à travers les vertèbres. Autour des cette couche est appliquée une » partie corticale cartilagineuse qui se laisse facilement séparer de la masse » principale. Cette partie corticale se prolonge en bas dans les apophyses trans- » verses et en haut dans les apophyses crurales, qui sont courts et triangulai- » res. Entre ces dernières s' emboitent les cartilages intercruraux qui sont ici » très-grands, se touchent par leurs côtés et divergent de nouveau pour se ter- » miner en haut en pointe. Il résulte de là qu' ils ont une forme hexagonale. » Ces cartilages forment la partie principales des parois latérales de la moëlle » allongée; la voute est fermée en haut par une série de pièces intercallaires » qui correspondent par leur nombre aux cartilages intercruraux, et qui sont » par conséquent de moitié moins nombreuses que chez les autres Requins qui

» possèdent de semblables pièces impaires supérieures. Ce caractère distingue le » genre Squatina des autres Squales dépourvus d' anale. »

La lunghezza e l' altezza dei corpi delle vertebre aumentano gradatamente fino al principio del canale pei vasi caudali (Tav. VII, fig. 1, *a*, *a*), e quindi gradatamente diminuiscono in tutti e due i sensi fino all'apice caudale (Tav. VII, fig. 1, 2, *b*, *b*). Il diametro trasverso però dei corpi suddetti diminuisce costantemente dalla prima all' ultima vertebra (Tav. VII, fig. 3, *a*, *a*). Null' altro mi resta a notare in particolare rispetto ai corpi delle vertebre dello *Squatina vulgaris*, che non fosse già stato descritto da *Giov. Müller*. Non tanto posso accordarmi su quanto asseriva questo notomista intorno agli archi vertebrali ed i pezzi intercrurali. E ciò non già perchè *Müller* ha falsamente osservato, ma perchè essendosi contentato di studiare poche vertebre del collo non vide tutto. E in fatto nelle prime quattordici o quindici vertebre che seguono l' occipite la bisogna si comporta come l' asserisce il zootomo di Berlino. Chè gli archi vertebrali sono piccoli pezzi triangolari che si sollevano appena appena da ciascun lato dal mezzo del corpo di ciascuna vertebra (Tav. VII, fig. 1, *c-d*). Le cartilagini intercrurali però per le prime quattro vertebre hanno la forma di trapezii, che con uno dei lati non paralleli si adagiano al lato posteriore dell'arco intercrurale, e coll' altro segnano il vertice del canale del midollo spinale, e coi due lati paralleli sono a contatto colle cartilagini seguente e precedente (Tavola VII, fig. 1, *e-f*). A queste cartilagini intercrurali mancano i pezzi triangolari impari che chiudono in seguito superiormente la vôlta del canale del midollo spinale. Le altre cartilagini intercrurali delle susseguenti dieci ovvero undici vertebre hanno la grandezza dei singoli corpi vertebrali, ai quali appartengono, ed hanno la forma di quadrati infissi con un angolo nell' angolo compreso fra due archi vertebrali consecutivi (Tav. VII, fig. 1, *f-d*). Toccandosi queste cartilagini intercrurali coi punti estremi di una diagonale resta fra ogni coppia uno spazio angolare rivolto superiormente. Questi vengono occupati da pezzi impari triangolari, i quali sono infissi costantemente con un angolo fra due coppie consecutive di cartilagini intercrurali, ed hanno un lato rivolto in sù. (Tav. VII, fig. 1, *h*, *h*). In seguito fino alla prima vertebra, la quale si trova sotto il lembo superiore della pinna caudale, gli archi vertebrali acquistano la medesima altezza delle cartilagini intercrurali (Tav. VII, fig. 1, 2, *d-g*). Da ogni corpo vertebrale si sollevano nel mezzo da ciascun lato un arco vertebrale di forma pentagona con un lato attaccato al corpo della vertebra e con un an-

golo rivolto di sopra (Tav. VII, fig. 1, 2, *g'*, *g'*, *g'*). E fra ogni coppia consecutiva di archi vertebrali s' infigge una cartilagine intercrurale di forma romboidale colla diagonale maggiore perpendicolare ai legamenti intervertebrali (Tavola VII, fig. 1, 2, *h'*, *h'*, *h'*). Alla base perciò degli archi vertebrali restano dei piccoli spazii otturati da una membrana fibrosa (Tav. VII, fig. 1, 2, *i*, *i*, *i*). Essendo eguali in altezza tanto gli archi vertebrali che le cartilagini intercrurali, ed avendo tutti e due rivolto in su un angolo, ne viene di conseguenza che corrispondentemente ad ogni vertebra vi saranno due spazii angolari, i quali verranno occupati da pezzi impari triangolari (Tav. VII, fig. 1, 2, *i'*, *i'*, *i'*). Nelle vertebre della pinna caudale, dalla seconda in poi mancano i pezzi intercrurali. In quelle gli archi vertebrali sono rombi a contatto uno dell' altro, inclinati verso la coda (Tav. VII, fig. 2, *j*, *j*). Nello scheletro dello *Squatina vulgaris* v' ha oltre a ciò una particolarità che manca a tutti gli altri scheletri di plagiostomi considerati fino ad ora. Questa particolarità è la seguente. Là dove finisce la prima terza parte della colonna vertebrale cominciano dei processi spinosi superiori, i quali finiscono là dove comincia la seconda pinna caudale (Tavola VII, fig. 1, 2, *k*, *k*). Essi sono lunghi quanto è alta la colonna vertebrale sottoposta, molto larghi, simili ad assicelle collocate obbliquamente nell'asse del corpo coll' estremità libera ingrossata rivolta verso la coda. Essi però non sono in numero corrispondente alle vertebre, ma ogni processo spinoso superiore corrisponde a due vertebre; ed il suo asse viene cadere sulla cartilagine intervertebrale delle due vertebre sottoposte.

Lo scheletro del lembo superiore della pinna caudale è composto di raggi il cui complesso somiglia ad un triangolo ottusangolo coll' angolo ottuso rivolto in su, il lato minore all' innanzi, il medio indietro, ed il maggiore attaccato agli archi vertebrali superiori delle vertebre. Il primo raggio ha la forma d'un piccolo pezzo triangolare; i tre susseguenti quella di laminette trapezoidali all' estremità libera obbliquamente tronche e crescenti in lunghezza dalla prima alla terza (Tav. VII, fig. 2, *l-l'*). Gli altri raggi sono di forma bacillare distribuiti in due serie sovrapposte l' una all' altra, aumentano rapidamente in lunghezza e grossezza dal primo all' ottavo, e poi diminuiscono lentamente fino all' ultimo il quale diventa impercettibile; hanno una posizione obbliqua coll' estremità libera arrotondata rivolta verso l' apice caudale; e sono in numero maggiore delle vertebre, in modo che si può calcolare che ad ogni due vertebre corrispondano tre raggi. Quelli della serie inferiore (Tav. VII, fig. 2,

m) sono più corti di quelli della superiore e le loro estremità superiori terminano in una linea parabolica. La porzione dello scheletro formante questo lembo della pinna caudale è più larga di quella che forma il lembo inferiore. Nella prima metà della colonna i corpi vertebrali portano processi trasversi triangolari, orizzontali, attaccati con un lato (Tav. VII, fig. 1, *n*, *n*). Al lato posteriore di questi triangoli sono attaccate altre cartilagini triangolari più grandi ricurve indietro, le quali ben presto si estendono in cordoncini molto lunghi rappresentanti le costole. Dal principio della seconda metà spariscono queste cartilagini rappresentanti le costole, e i processi trasversi prendendo la forma di piccole lancette si ricurvano sotto la colonna vertebrale per formare un semicanale (Tav. VII, fig 1, *n*,′ *n*′). Dall' ottava vertebra della seconda metà della colonna vertebrale fino alla quinta vertebra dietro il margine posteriore della seconda pinna dorsale s' ingrandiscono i processi trasversi, prendono la forma d' un remo (Tav. VII, fig. 1, 2, *o-p*), e ripiegandosi sotto la colonna vertebrale, e congiungendosi quelli d' un lato con quelli del lato opposto, non che l' uno coll' altro i consecutivi, determinano le porzioni anteriori del canale pei vasi caudali. Questo non forma un canale perfettamente chiuso, ma ad ogni legamento intervertebrale è interrotto a ciascun lato, immediatamente sotto i corpi delle vertebre, da una finestra quadrangolare otturata da una membrana fibrosa (Tav. VII, fig 1, 2, *o*,′ *o*′). Tutte le coppie di questi processi trasversi dalla prima fino al punto di mezzo fra le due pinne dorsali sono ricurve verso la testa, ne seguono quindi un pajo perpendicolari, e le altre sono ricurve verso la coda. Fino ad ora abbiamo considerato i processi trasversi delle vertebre fino alla quinta dopo il margine posteriore della seconda pinna dorsale. Ora consideriamo quelli delle vertebre susseguenti. Anche questi si ripiegano sotto la colonna vertebrale e si congiungono fra loro in modo da chiudere non solo il canale dei vasi caudali, ma ben anco da formare processi spinosi inferiori. Il canale però non è bucherellato ma perfettamente chiuso, perchè i processi trasversi suddetti sono egualmente larghi dalla base all'estremità libera; vale a dire hanno la larghezza del corpo della vertebra corrispondente. Essi hanno una curvatura genicolata alla base e perciò l' estremità libera rivolta verso la coda. Fino alla prima vertebra della pinna caudale sono molto piccoli ed eguali fra loro (Tav. VII, fig. 2, *p-q*). Da questa fino alla metà della pinna caudale conservano la stessa larghezza, ma aumentano in lunghezza (Tav. VII, fig. 2, *q-t*); e quindi diminuiscono gradatamente sì in lunghezza che in larghezza. Le loro estremità libere segnano una linea parabolica.

Da questi studii risulta:

1.° Che vertebre con archi triangolari appena visibili e cartilagini intercrurali trapezoidali appartengono alle cervicali dello *Squatina vulgaris*.

2.° Che vertebre con archi pentagoni, e cartilagini intercrurali romboidali, con pezzi intercalari triangolari, senza processi spinosi sono comprese nella metà anteriore dopo le cervicali dello *Squatina vulgaris*.

3.° Che vertebre simili con processi spinosi, che hanno l' estremità libera tronca, e ognuno dei quali corrisponde ad una coppia di corpi vertebrali, appartengono alle dieci vertebre che precedono le caudali.

4.° Che vertebre simili con processi trasversi a remo sono comprese fra la prima caudale e la quarta che sussegue la seconda pinna dorsale.

5.° Che se hanno oltre a ciò processi spinosi tronchi all' estremità libera, e che ciascuno di essi corrisponde ad una coppia di corpi vertebrali appartengono alle caudali le quali precedono la prima pinna dorsale, ovvero a quelle che sono comprese fra la prima e la seconda delle suddette pinne.

6.° Che vertebre simili, ma con processi trasversi quadrilateri genicolati, sono quelle comprese fra la quarta dopo la seconda pinna dorsale e quelle della pinna caudale.

7.° Che vertebre senza cartilagini intercrurali, ma con archi romboidali e processi trasversi congiunti in processi spinosi paralellogrammici genicolati appartengono a quelle della pinna caudale.

8.° Finalmente che avendo soltanto l'impressione della pinna caudale si potrà riconoscere facilmente se questa appartiene allo *Squatina*, perchè in tal caso il punto più eminente della curva marginale del lembo superiore sarà quasi il doppio più distante dall' asse di quello che il punto più eminente della curva marginale del lembo inferiore.

II. *Il cranio.*

Osservando il cranio dello *Squatina vulgaris* dalla parte dorsale si nota il margine anteriore limitato da due linee obblique che convergono ad angolo all' innanzi nell' asse del corpo. Nel vertice dell' angolo si osserva una incisione angolare e dietro questa un' ampia fontanella circolare, della quale il margine posteriore ed i laterali fino all' incisione angolare sono limitati dal margine tagliente della vôlta craniale, e la quale lascia vedere la base del cranio (Tav. VIII,

fig. 1, *a*). Padiglioni nasali congiunti al cranio, lo *Squatina vulgaris* non ne possiede; essi però sono formati da esilissime cartilagini emisferiche staccate, le quali si trovano sotto la base del cranio, al margine anteriore, un momento in fuori della incisione angolare. I margini laterali del cranio osservati dalla stessa parte presentano due incisioni; la prima a rostro di papagallo (Tav. VIII, fig. 1, *b*, *b*), e la seconda semilunare al doppio più lunga di quella (Tav. VIII, fig. 1, *c*, *c*). A ciascun margine laterale si distinguono perciò tre corna: uno anteriore più lungo e ricurvo indietro, che limita anteriormente l' orbita; l' altro orizzontale e più corto di quello, che limita l' orbita posteriormente; ed il terzo obbliquo verso la coda, col quale si articola il sospensorio (Tav. VIII, fig. 1, *d*, *d*). Il margine posteriore della vôlta del cranio è inciso a mezzaluna. Siccome che la base è più sporgente all' occipite di quello che la vôlta craniale, si vede il cranio terminato di dietro da un piano obbliquo che nel centro ha il foro occipitale (Tav. VIII, fig. 1, *e*). Nell' asse della vôlta craniale fra le due orbite si trovano due fori uno dietro l' altro che mettono nella cavità cerebrale. (Tav. VIII, fig. 1, *f*, *g'*). Alla base delle seconde corna scorgonsi due amplissimi fori ovali, quasi canali, che comunicano colla cavità della bocca, e nei quali scorrono le branche verticali delle mascelle superiori (Tav. VIII, fig. 1, *g*, *g*); e nel centro del margine occipitale una fossetta con quattro forellini che mettono nella cavità craniale (Tav. VII, fig. 1, *h*). Osservato il cranio alla faccia inferiore si vede che dalla metà delle orbite fino all' occipite la cavità cerebrale è limitata da un piano cartilagineo paralello alla vôlta craniale, limitato anteriormente da un margine semicircolare che nel mezzo ha una profonda incisione angolare (Tav. VII, fig. 4, *a*); ai fianchi da due incisioni semilunari, l' anteriore delle quali è più profonda (Tav. VII, fig. 4, *b*, *b*) e limita lateralmente i canali nei quali si muovono i rami verticali delle mascelle superiori (Tav. VII, fig. 4, *c*, *c*), e la posteriore è un po' più lunga (Tav. VII, fig. 4, *d*, *d*). Il margine posteriore è limitato da tre incisioni arcuate, vale a dire due più piccole agli angoli occipitali (Tav. VII, fig. 4, *e*, *e*) ed una nel mezzo molto più grande (Tav. VII, fig. 4, *f*).

III. *Apparato della masticazione.*

Nella caratteristica dei plagiostomi di *Müller* ed *Henle*, alla pag. 99, là dove sono esposti i caratteri del genere *Squatina*, trovasi scritto: « Due cartila-

» gini angolari superiori della bocca e due inferiori (1). » Io aggiugnerò soltanto, che le inferiori ed una delle due superiori hanno la forma di spatola colla porzione attenuata rivolta all'angolo della bocca (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *a*,′ *a*′), che l' inferiore è più larga, e che la terza ha la forma d' una laminetta arcuata (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *b*,′ *b*′). Le cartilagini odontoidee concorrono ad angolo verso il centro della bocca. Le superiori nei due terzi interni sono stiacciate dall' alto al basso e nel terzo esterno lateralmente, e sono più attenuate alle loro estremità (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *A*, *A*). La faccia interno-superiore presenta l' aspetto d' un triangolo ottusangolo isoscele. Il margine esterno-anteriore è la base di questo triangolo e alla faccia inferiore parallelamente ad esso v' ha una grondaja pei denti (Tav. VIII, fig. 2, *c*). Il margine interno-anteriore è rappresentato dagli altri due lati del triangolo che convergono ad angolo ottuso. Dal vertice di quest' angolo parte verso l' occipite una branca conica della mascella, la quale penetra nel relativo semicanale delle seconde corna della vôlta craniale (Tav. VIII, fig. 3, *c*, *c*). La faccia posteriore esterna è leggermente convessa, la posteriore interna leggermente concava. Questa copre la prima eminenza articolare della relativa cartilagine odontoidea inferiore (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *d*,′ *d*′). Il margine postero-superiore ha in principio un' eminenza esterna (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *e*,′ *e*′) ed il postero-inferiore nello stesso punto un'eminenza inferiore (Tav. VIII, fig. 1, 2, 3, *f*,′ *f*′). Le cartilagini odontoidee inferiori sono compresse lateralmente, più strette all' innanzi, e più allargate verso l' angolo della bocca (Tav. VIII, fig. 2, *B*). Ognuna di esse ha un margine superiore retto, uno inferiore fortemente arcuato verso l' angolo della bocca (Tav. VIII, fig. 2, *g*), una faccia esterna liscia ed una faccia interna. Questa nei tre quarti anteriori è fornita di un' ampia e profonda grondaja pei denti, la quale è oltre a ciò più larga all' innanzi (Tav. VIII, fig. 2, *h*). Nella quarta parte posteriore del margine superiore trovansi tre eminenze glenoidali una dietro l' altra. La più anteriore, che è solcata in mezzo da un profondo semicanale, articola colla base del cranio; la seconda, che si trova al termine del margine superiore, articola colla relativa cartilagine odontoidea superiore; e la terza, che trovasi al limite del margine inferiore, articola colla relativa branca inferiore dell' ioide (Tav. VIII, fig. 2, 3, *C*, *C*).

(1) Müller und Henle: *Systematische Darstellung der Plagiostomen.*

IV. *Archi ioidei ed apparato branchiale.*

Gli archi ioidei sono formati anche nello *Squatina vulgaris* dai sospensori e dalle branche inferiori. Quelli sono lamine metà più corte di queste, ingrossate alle loro estremità, delle quali la superiore si articola col cranio e l'inferiore colla branca ioidea corrispondente (Tav. VIII, fig. 3, *G*, *G*). Le branche inferiori sono parimenti stiacciate verticalmente, ingrossate all'estremità superiore in due condili, uno dei quali articola col sospensorio e l'altro colla mascella inferiore, e dilatata molto all' estremità posteriore che, simile ad una spatola è obbliquamente tronca (Tav. VIII, fig. 3, *H*, *H*). Questa estremità si attacca coll' angolo più acuto alla faccia inferiore della copula, e copre coll' angolo più ottuso il relativo corno posteriore della stessa (Tav. VIII, fig. 3, *h*, *h*). La copula (Tav. VIII, fig. 3, *L*) ha la forma d' un pentagono coll' angolo più acuto compreso fra i due lati più lunghi rivolto verso la bocca. La sua superficie superiore è concava, l' inferiore piana ed al lato posteriore ripiegata a ginocchio. Ai suoi due angoli laterali anteriori s' articolano le due corna minori (Tav. VIII, fig. 3, *l*, *l*), che coll' altra estremità appuntita vanno a poggiarsi sul margine anteriore dell' arco ioideo. I suoi due angoli posteriori si prolungano nelle due corna maggiori (Tav. VIII, fig. 3, *m*, *m*), le quali vanno a congiungersi col primo arco branchiale. Ciascuno dei quattro archi branchiali è composto di quattro branche. Le branche superiori del primo arco (Tav. VIII, fig. 3, *n*, *n*) sono più corte di quelle degli altri (Tav. VIII fig. 3, *o*, *o*, *o*, *o*) che somigliano a falci aventi un foro ovale circa nel mezzo, hanno l'estremità superiore obbliquamente tronca e l' inferiore con un' incisione nel mezzo. Le seconde branche di tutti gli archi (Tav. VIII, fig. 3, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*) sono più corte (anzi negli ultimi tre di due terzi) ma della stessa larghezza delle prime, coll' estremità superiore tronca e l' inferiore tagliata ad S. Le terze branche (Tav. VIII, fig. 3, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*) hanno la forma di stivali, sono tre volte più lunghe delle seconde, hanno l'estremità superiore tagliata ad S. La estremità inferiore si congiugne mediante l' angolo più ottuso colla quarta branca e coprono coll' angolo più acuto una porzione della quarta branca dell' arco susseguente. Le quarte branche dei primi archi (Tav. VIII, fig. 3, *r*, *r*) sono laminette paralellogrammiche, che con uno dei lati minori s' articolano alla terza branca e coll' altro al corno maggiore della copula dello stesso lato. Le quarte

branche degli altri tre archi (Tav. VIII, fig. 3, *s*, *s*, *s*, *s*, *s*, *s*) somigliano a storte, le quali colle estremità attenuate s' articolano colle terze branche, e colle estremità ingrossate poggiano una sovra l'altra. I congiungimenti fra queste hanno luogo nel modo seguente: Nel secondo arco sono a contatto immediato; nel terzo s'intromettono fra loro due piccole cartilagini congiungenti triangolari, l'anteriore delle quali ha la base rivolta verso la bocca e la posteriore la ha rivolta verso la coda (Tav. VIII, fig. 3, *t*). Questa inoltre forma il vertice di una cartilagine simile ad un angolo, la quale s'intromette coll'estremità angolare fra le branche inferiori del quarto arco (Tav. VIII, fig. 3, *T*). Le branche superiori del quarto arco (Tav. VIII, fig. 3, *u*, *u*) mandano indietro un altro ramo che va a congiungersi colla seconda branca (Tav. VIII, fig. 3, *v*, *v*) corta delle mascelle faringee. Questa mediante la sua estremità tagliata ad S si congiunge colla branca inferiore dello stesso organo (Tav. VIII, fig. 3, *w*, *w*) formata da una striscia cartilaginea tre volte più lunga, la quale coll'altra estremità va a poggiare sulle estremità divergenti della cartilagine angolare che serve d'appoggio alle branche inferiori del quarto arco branchiale. Nel mezzo del margine posteriore della suddetta cartilagine angolare è attaccata una cartilagine molto grande liguliforme (Tav. VIII, fig. 3, *x*), la quale non servendo come congiungente a nessun altro organo termina con un piccolo pezzetto cartilagineo triangolare (Tav. VIII. fig. 3, *z*).

V. *Estremità anteriori.*

La cintura toracica dello *Squatina vulgaris* è formata da una grossa e lunga cartilagine orizzontale ricurva ad arco, convessa all'innanzi, concava all'indietro (Tav. IX, fig. 1, *A*), le estremità della quale si prolungano posteriormente in altre due cartilagini piramidali molto consistenti (Tav. IX, fig. 1, *a*, *a*). Nel punto dove queste formano angolo col ramo orizzontale trovasi una eminenza glenoidale alla quale si articola la pinna toracica corrispondente (Tav. IX, fig. 1, *b*, *b*). La base delle pinne toraciche è formata da tre forti cartilagini, le quali si attaccano alla relativa eminenza articolare della cintura toracica. La anteriore (Tav. IX, fig. 1, *c*, *c*) è la più piccola, ha una posizione orizzontale, è più allargata verso l' estremità esterna, ed ha un margine anteriore concavo ed uno posteriore convesso. La seconda cartilagine basilare ha la forma di un triangolo smozzato agli angoli (Tav. IX, fig. 1, *d*, *d*). Questo con un angolo s' articola alla cintura toracica, col lato anteriore con-

cavo più piccolo è a contatto colla prima cartilagine, col lato posteriore appena appena concavo colla terza, e rivolge all' esterno il terzo lato retto. La terza cartilagine bacillare è la più lunga di tutte, somiglia pure ad un triangolo, ma coi soli due angoli alla base smozzati (Tav. IX, fig. 1, *d*, *d*). Uno di questi si articola colla cintura toracica, il lato maggiore un momento concavo guarda il ramo posteriore della cintura toracica, il lato anteriore è a contatto colla cartilagine basilare intermedia, il terzo lato è rivolto in fuori, e l' altro angolo smozzato verso la coda.

Al margine esterno della prima cartilagine basilare si attacca nel terzo anteriore un raggio bacillare rivolto obbliquamente all' innanzi, lungo quanto la cartilagine stessa (Tav. IX, fig. 1, *f*, *f*), e nei due terzi posteriori una corta cartilagine quadrangolare (Tav. IX, fig. 1, *g*, *g*), al margine esterno convesso della quale sono attaccati due raggi bacillari e paralleli al primo ma decrescenti in lunghezza, i quali terminano nella stessa linea nella quale termina il primo.

All' angolo smozzato anteriore esterno della seconda cartilagine basilare si attacca anteriormente una piccola cartilagine quadrata (Tav. IX, fig. 1, *h*, *h*) e dietro a questa un' altra quadrilatera ma trapezoidale (Tav. IX, fig. 1, *i*, *i*), che col margine anteriore più piccolo si congiunge alla precedente, coll'esterno più lungo di tutti continua il lato esterno della stessa, ed ha il margine posteriore obliquo, e l' interno concavo.

Ai margini esterni di queste due cartilagini è congiunta una serie di piccole cartilagini parallelogrammiche eguali presso a poco in lunghezza, (Tav. IX, fig. 1, *j*, *j*) ed al lato esterno di ciascuna di esse un' altra cartilagine. Queste diminuiscono in lunghezza dall' anteriore alla posteriore (Tav. IX, fig. 1, *k*, *k*), e terminano nella linea che è la continuazione dell' estremità libera dei primi tre raggi. All' angolo posteriore esterno della cartilagine trapezoidale e nel prolungamento del suo lato posteriore è attaccato un raggio bacillare che porta in cima un altro più piccolo, e questo un altro più piccolo ancora (Tav. IX, fig. 1, *l*, *l*). Fra il margine anteriore esterno di questa catena di raggi ed il posteriore dell' ultima coppia delle cartilagini paralellogrammiche resta uno spazio angolare occupato da una catena di quattro piccole cartilagini trapezoidali che decrescono dall'anteriore all'ultima (Tav. IX, fig. 1, *m*, *m*).

Al margine esterno della seconda cartilagine basilare si attacca una serie di

raggi bacillari paralleli, che aumentano in lunghezza dal primo all' ultimo (Tavola IX, fig. 1, 1, *n*, *n*); a questa una seconda cogli stessi caratteri, ma i cui raggi sono un momento più lunghi (Tav. IX, fig. 1, *o*, *o*); alla seconda una terza con raggi metà più corti (Tav. IX, fig. 1, *p*, *p*); ed alla terza una quarta con raggi cortissimi ed obbliquamente tronchi (Tav. IX, fig. 1, *q*, *q*).

Al margine posteriore della terza cartilagine basilare si attaccano nello stesso ordine quattro serie di raggi bacillari ma decrescenti in lunghezza e grossezza. Quelli della quarta serie sono dapprima tronchi poi acuminati.

All' angolo smozzato posteriore della terza cartilagine basilare è attaccata una piccola cartilagine quadrata; al margine posteriore di questa un' altra più corta e più stretta, ed al margine posteriore di questa una terza che termina rotondata (Tav. IX, fig. 1, *r*, *r*). Ai lati esterni di tutte e tre ed al posteriore dell' ultima sono congiunte quattro serie di raggi bacillari che decrescendo continuano le serie precedenti (Tav. IX, fig. 1, *s*, *s*). L' ultimo raggio interno non è composto di quattro ma di due soli articoli (Tav. IX, fig. 1, *t*, *t*).

VI. *Estremità posteriori.*

La cintura addominale è formata da tre pezzi cartilaginei. Il primo, che tien luogo della pelvi, è una grande cartilagine orizzontale arcuata (Tav. IX, fig. 2, *A*) con un margine concavo ingrossato anteriore, ed uno convesso tagliente posteriore. Un po' innanzi alle estremità di questo si articolano con un capo ingrossato due cartilagini a scimitarra con margine tagliente convesso esterno rivolto verso la coda, le quali terminano con un pezzo retto (Tav. IX, fig. 2, *B*, *B*). Esternamente alle articolazioni di queste con la pelvi si articola da ciascun lato, formando un angolo acuto colle altre due, una striscia cartilaginea non molto lunga ma larga (Tav. IX, fig. 2, *c*, *c*). La sua estremità libera rotondata guarda in fuori; e la striscia ha oltre a ciò un margine anteriore convesso. Al margine posteriore di queste e lungo tutto il margine convesso delle cartilagini a scimitarra si attaccano i raggi delle pinne addominali nel modo seguente: Fino all' ultimo terzo delle cartilagini a scimitarra se ne trovano tre serie, quindi due. I raggi diminuiscono in grossezza dal primo all'ultimo. Per studiare esattamente i rapporti di questi raggi, consideriamo che dal vertice dell' angolo formato dalle due cartilagini da ciascuna parte, parta un raggio che divide questo angolo per metà, a questo ne sia concatenato uno più corto di tre

quarti, e all' estremità esterna di questo altri due piccolissimi. Ora lungo il margine posteriore della cartilagine anteriore troveremo i raggi paralleli a quelli concatenati allo stesso modo, ma diminuendo continuamente in lunghezza. Lungo tutto il margine esterno della cartilagine a scimitarra troveremo altri raggi paralleli al primo, diminuenti in lunghezza nei due terzi anteriori e formati da tre serie come il primo, ma colla sola differenza che dal terzo in poi la terza serie non è formata da raggi doppi ma semplici. Lungo la terza parte posteriore dello stesso margine convesso i raggi vanno gradatamente crescendo dal primo all' ultimo, ma formano due sole serie; e quelli dell' esterna sono metà più corti di quelli dell' interna.

VII. *Pinne dorsali.*

Le due pinne dorsali (Tav. VII, fig. 2, *S*, *S*) sono identiche per la loro struttura: la prima è soltanto un poco più grande della seconda. Ciascheduna di esse ha per base due lamine cartilaginee collocate una dietro l' altra (Tav. VII, fig. 2, *t*, *t*, *u*, *u*). Esse formano una piastra col margine inferiore attaccato lungo la spina dorsale, l' anteriore ed il posteriore paralleli ed obbliquamente inclinati verso la coda, ma quello al doppio nella pinna anteriore e quattro volte nella posteriore più lungo di questo; ed il margine superiore obbliquo discendente dall' innanzi all' indietro. A ciascuna pinna lungo il margine superiore si attaccano sei cartilagini quadrangolari, che diminuiscono in altezza dall' anteriore alla posteriore (Tav. IX, fig. 2, o', o'). A questa prima serie ne è sovrapposta una seconda formata allo stesso modo (Tav. IX, o'', o''), ed a questa una terza, nella quale però, se essa spetta alla prima pinna dorsale i pezzi che la compongono aumentano dall' anteriore al posteriore (Tav. IX, fig. 2, o'''), ma diminuiscono in vece nello stesso senso se essa spetta alla seconda dorsale (Tav. IX, fig. 2, o'''').

VIII. *Ossificazione.*

Le mie osservazioni corrispondono perfettamente a quelle di *Müller* tanto per le cartilagini pavimentose, i dischetti delle quali sono a mutuo contatto senza lacune interstiziali, quanto per l' ossificazione dei corpi vertebrali a cilindri concentrici sempre più accorciantisi verso l' asse, alternanti di sostanza ossea e

jalina, ad eccezione della presenza di un forellino di comunicazione fra le faccette coniche dei corpi vertebrali e dello strato più compatto che riveste quelle in forma di clepsidra, come lo dimostrano le mie immagini (Tav. VII, fig. 5, 6, *a*).

V. ALOPIAS VULPES.

Notiamo prima d' ogni altra cosa le parole di *Giov. Müller* intorno alla colonna vertebrale del genere *Alopias:*

« La fig. 15 représente une portion de la partie antérieure de la colonne » vertébrale; les corps de vertèbres ont à leurs bords antérieur et postérieur » une lisière lisse, entre laquelle les surfaces des corps de vertèbres sont très- » courts proportionellement à leur hauteur. Presque partout leur longueur mé- » sure moins de la moitié de leur hauteur. Les cartilages cruraux et intercru- » raux sont allongés, à bords presque parallèles, cartilagineux; on les trouve » ossifiés dans de très-grands exemplaires Il n' y a pas de pièces supérieures » impaires. Les pièces costales sont fixées en partie entre les cartilages trans- » verses et en partie aux cartilages mêmes. »

La descrizione di *Giov. Müller* è più esatta della tavola che l'accompagna.

Io noterò che le prime vertebre della colonna hanno il corpo molto basso, in modo che l' altezza eguaglia la lunghezza appena appena (Tav. X, fig. 1, *a*) e gli archi vertebrali sono al doppio più alti (Tav. X, fig. 1, *b*); che dalla terza vertebra in poi la lunghezza resta costante fino alla prima pinna dorsale, e comincia quindi a diminuire fino all' ultima vertebra caudale, mentre l'altezza dei corpi vertebrali aumenta fino alle pinne addominali, per poi diminuire fino all' ultima caudale. Gli archi vertebrali superiori e le relative cartilagini intercrurali, che si possono osservare fino all' ultima estremità caudale, diminuiscono in altezza dalla prima vertebra in poi. Gli archi vertebrali superiori (Tav. X, fig. 1, *c*) sono molto esili nelle prime quindici o sedici vertebre e, al contrario, molto larghe sono le cartilagini intercrurali. Quelli somigliano a cunei rivolti e attaccati colla base al corpo delle vertebre, queste a cunei infissi col taglio fra le basi degli archi vertebrali. Dalla decimaquinta vertebra all' incirca fino al punto di mezzo fra il margine posteriore della prima pinna dorsale ed il principio del lembo superiore della caudale, s' allargano gli archi vertebrali a costo delle cartilagini intercrurali in modo che le loro linee di contatto diventano

parallele, e tanto l' estremità superiore dei primi che l' inferiore delle seconde diventano arrotondate. Dal punto di mezzo, fra il margine posteriore della prima pinna dorsale ed il lembo superiore della pinna caudale, fino al lembo inferiore di questa, le cartilagini intercrurali acquistano la forma di ovoidi (Tav. X, fig. 2, *d*, *d*) inserite fra gli archi vertebrali della stessa altezza che acquistano la forma di lenti biconcave. Dal principio del lembo inferiore della pinna caudale fino al di là della prima quinta parte del lembo superiore della stessa, le cartilagini intercrurali hanno la stessa forma degli archi, e le loro linee di contatto sono parallele fra loro (Tav. X, fig. 2, *e*, *e*), ma fino al principio del lembo superiore obbliquamente inclinate all' innanzi, quindi perpendicolari ai corpi vertebrali. In tutto il resto della colonna vertebrale tanto gli archi che le cartilagini intercrurali hanno la stessa forma e gli stessi rapporti che notammo nel tratto innanzi al lembo inferiore della pinna caudale.

I processi trasversi dalla prima vertebra cervicale fino al margine posteriore della prima pinna dorsale hanno la forma di piccoli triangoli attaccati colla base ai corpi vertebrali (Tav. X, fig. 1, *f*, *f*). Fra loro si inseriscono cartilagini intercalari, le quali per le prime dodici vertebre hanno la forma di semielissi (Tav. X, fig. 1, *g*, *g*) che penetrano coi vertici fino ai legamenti intervertebrali; e per le altre hanno la forma di piccoli quadrati che con un lato si attaccano ad uno del processo trasverso precedente, e con l' altro ad uno del processo trasverso susseguente (Tav. X, fig. 1, *h*, *h*). Nell' angolo che resta fra due cartilagini intercalari consecutive s' inseriscono i rudimenti delle costole (Tav. X, fig. 1, *i*, *i*). Le intercalari delle prime venti vertebre all'incirca sono tanto grosse e tanto stipate che sembrano formare due cordoni laterali, i quali accompagnano lateralmente la colonna vertebrale. Dal margine posteriore della prima pinna dorsale in poi spariscono i pezzi intercalari e le costole, e da esso fino al lembo inferiore della pinna caudale i processi trasversi cominciano con una base ellittica attaccata al corpo vertebrale in modo che un vertice guarda all' insù ed all' indietro, e l' altro all' ingiù ed all' innanzi (Tav. X, fig. 1, 2, *j*, *j*, *j*, *j*). Al margine posteriore di ciascuna di queste cartilagini ellittiche si attacca un pezzo cartilagineo tronco inferiormente e rivolto verso la coda, che concatenandosi col pezzo precedente e col susseguente, e congiungendosi col processo trasverso del lato opposto formano le due pareti laterali che chiudono il canale pei vasi caudali (Tav. X, fig. 1, 2, *k*, *k*). Questi processi trasversi vanno lentamente allungandosi. Nella quarta parte anteriore del lembo inferiore della pinna caudale

ogni processo trasverso è rappresentato da due pezzi ellittici (Tav. X, fig. 2, *l*, *l*) con assi paralleli collocati uno sopra l' altro nella stessa posizione dei precedenti dapprima, ma poi gli inferiori in posizione inversa rispetto ai superiori, meno che gli ultimi i quali sono rappresentati da un pezzo ellittico solo. I processi trasversi rivolgendosi sotto la colonna vertebrale, e congiungendosi quelli d' un lato con quelli del lato opposto portano al loro congiungimento i raggi inferiori della pinna corrispondenti in stretto senso ai veri processi spinosi (Tavola X, fig. 2, *m*, *m*) perchè ad ogni vertebra appartiene uno di questi processi. Essi aumentano dapprincipio rapidamente in lunghezza per poi lentamente diminuire, sono striscie cartilaginee perpendicolari nel quarto anteriore e nel posteriore ai relativi corpi vertebrali, e ricurve a scimitarra, colla convessità rivolta all'innanzi, e dilatate in due piccoli condili all' estremità libera nei due quarti di mezzo. Negli ultimi tre quarti della pinna caudale mancano assolutamente le cartilagini ellittiche, ed a ciascun corpo vertebrale si attacca immediatamente un processo spinoso ricurvo a scimitarra, ma col margine convesso rivolto indietro (Tav. X, fig. 2, 3, *n*, *n*, *n*). Questi processi spinosi diminuiscono gradatamente fino all' apice caudale, dove diventano impercettibili, e sono a contatto uno con l' altro mediante la loro base.

Il lembo superiore della pinna caudale comincia diciassette ovvero diciotto vertebre più indietro del lembo inferiore, ma il suo scheletro non è formato da processi spinosi nel stretto senso della parola, in quanto che i pezzi cartilaginei che lo compongono non corrispondono pel loro numero al numero delle vertebre, ma costantemente uno di essi è sovrapposto almeno a due vertebre, non mancandovi nemmeno quelli che hanno sottoposte tre e persino quattro vertebre (Tav. X, fig. 2, 3, *o*, *o*, *o*, *o*). Tutti questi pezzi cartilaginei, che potremo denominare raggi delle pinne, sono pezzi quadrangolari di eguale altezza, meno i primi tre o quattro che vanno gradatamente aumentando e gli ultimi tre o quattro che vanno gradatamente diminuendo. Essi hanno una posizione obbliqua colla estremità libera rivolta verso la coda, un margine inferiore ingrossato che s' attacca alla spina dorsale, un margine anteriore ed uno posteriore convergenti verso l' estremità superiore rotondata nei più stretti e tronca parallelamente al margine inferiore nei più larghi. Questi raggi della pinna caudale sono a contatto l' uno coll' altro, nè v' ha altro interstizio fra loro che una tenue fessura verso l' estremità superiore.

Da questi studii anatomici risulta:

1.° Che i corpi vertebrali dell' *Alopias Vulpes*, meno che nelle prime tre vertebre cervicali, sono più alti che lunghi.

2.° Che vertebre con archi e cartilagini intercrurali cuneiformi, e cartilagini intercalari semiellittiche fra i processi trasversi, appartengono alle prime dodici dell' *Alopias Vulpes*.

3.° Che vertebre con corpi più alti che lunghi, archi e cartilagini intercrurali cuneiformi, processi trasversi triangolari, e cartilagini intercalari quadrate fra questi, sono comprese fra la duodecima ed il margine posteriore della prima pinna dorsale.

4.° Che vertebre eguali alle precedenti, ma con processi trasversi che hanno alla loro base un pezzo ellittico, sono comprese fra il margine posteriore della prima pinna dorsale ed il lembo inferiore della caudale dell' *Alopias Vulpes*.

5.° Che vertebre eguali, ma con processi trasversi forniti di due cartilagini ellittiche alla base in posizione parallela, e processi spinosi inferiori, appartengono alla porzione del lembo inferiore che precede il superiore della caudale dell' *Alopias Vulpes*.

6.° Che vertebre simili, ma con raggi superiori, ciascuno dei quali corrisponde almeno a due vertebre, processi trasversi con due pezzi ellittici in posizione opposta alla base, e processi spinosi inferiori, appartengono al primo settimo del lembo superiore della pinna caudale dell' *Alopias Vulpes*.

7.° Che vertebre simili, ma senza processi trasversi e con semplici processi spinosi inferiori appartengono agli ultimi sei settimi del lembo superiore della pinna caudale.

8.° Finalmente se avessimo una impressione soltanto della pinna caudale dell' *Alopias Vulpes*, questa sarà facile a determinarsi, perchè in tal caso il margine del lembo superiore sarà parallelo all' asse e l' inferiore avrà la massima curvatura là dove comincia il superiore.

II. *Il cranio.*

Il cranio dell' *Alopias Vulpes* è proporzionatamente molto più alto di quello degli altri squali da me esaminati. Osservato dalla faccia dorsale esso si presenta convesso tanto dall' innanzi all' indietro che da un lato verso l' altro. Nel mezzo scorgesi una eminenza (Tav. X, fig. 4, *a*), al vertice anteriore della

quale trovasi la solita fontanella in questo caso parimenti ellittica (Tav. X, fig. 4, *b*). Il margine anteriore ha tre incavi semilunari a corda eguale. Dalle estremità di quello di mezzo partono due bastoncini cartilaginei rivolti all' innanzi (Tav. X, fig. 4, *c*, *c*), che convergendo ad angolo si congiungono al vertice con un terzo bastoncino, il quale parte dal sepimento dei padiglioni nasali (Tav. X, fig. 4, *d*), e formano lo scheletro del muso. I padiglioni delle narici sporgono sotto il margine anteriore ed hanno forma ellittica (Tav. X, fig. 4, *e*, *e*). Alla base dei due bastoncini superiori dello scheletro del muso si trovano due fori che conducono nell' angolo anteriore dell' orbita (Tav. X, fig. 4, *f*, *f*). Ai fianchi dell' eminenza ellittica si protende la vôlta craniale in due lamine cartilaginee, le quali proteggono superiormente le orbite (Tav. X, fig. 4, *g*, *g*) e terminano con un margine tagliente semilunare concavo. Al vertice posteriore della stessa eminenza trovasi una fossetta, nella quale vi sono dei forellini che conducono nella cavità del cranio (Tav. X, fig. 4, *h*). Dietro di essa la vôlta craniale si inclina verso il margine posteriore. In fianco alla fossetta ed all' abbassamento scorgonsi due eminenze irregolarmente quadrilatere indicanti gli organi dell' udito (Tav. X, fig. 4, *i*, *i*). Queste sono limitate esteriormente da un margine incavato semilunare molto piccolo, e posteriormente da un margine obbliquo che dai fianchi corre indietro verso la colonna vertebrale.

Il cranio osservato alla base presenta l' aspetto di un corpo di chitarra rilevato nel diametro dello stringimento e concavo nel resto da un lato verso l' altro. La porzione anteriore allo stringimento è occupata in gran parte dei padiglioni nasali (Tav. X, fig. 5, *a*, *a*) collocati obbliquamente e convergenti ad angolo all' innanzi. Lo stringimento corrisponde alla porzione anteriore delle orbite (Tav. X, fig. 5, *b*). Per formare la dilatazione posteriore la base del cranio si distende lateralmente in due lamine terminate con margine tagliente, semicircolare, convesso, che formano il pavimento della metà posteriore delle orbite. Agli angoli posteriori di queste scorgesi un foro che comunica con esse (Tav. X, fig. 5, *c*, *c*). Ai lati del cranio scorgonsi anteriormente i padiglioni nasali (Tav. X, fig. 1, *r*), quindi l'orbita ellittica (Tav. X, fig. 1, *s*) che ne occupa quasi due terzi, all' angolo inferiore della quale succede la cavità articolare del sospensorio (Tav. X, fig. 1, *t*) e dietro questa il meato auditivo esterno (Tav. X, fig. 1, *u*).

III. *Apparato della masticazione.*

Questo, oltre che dalle due cartilagini labbiali, è formato dalle quattro cartilagini odontoidee (Tav. XI, fig. 1, *A*, *A*, *B*, *B*). Le ultime sono lamine cartilaginee attenuate all'estremità interna e dilatate all'esterna. Tutte e quattro hanno la faccia esterna concava all'estremità dilatata, e l'interna, convessa; ma nelle superiori la convessità e concavità corrispondenti sono dirette dall'alto in basso, mentre nelle inferiori sono dirette dall'innanzi all'indietro. Il margine superiore delle cartilagini odontoidee superiori è convesso, ha una piccola eminenza verso il punto di congiungimento (Tav. XI, fig. 1, *a*,*a*) e la massima convessità al limite fra il terzo di mezzo e l' esterno, mentre il margine inferiore è concavo nei due terzi interni e convesso nell' esterno. La sua estremità posteriore si articola tanto colla relativa cartilagine odontoidea inferiore che col sospensorio (Tav. XI, fig. 1, *b*, *b*). Le cartilagini odontoidee inferiori hanno il margine superiore leggermente formato ad S giacente con un incavo semilunare all' estremità che si articola col sospensorio colla relativa cartilagine odontoidea superiore e colla branca inferiore dell' ioide. Il suo margine inferiore è parimenti ad S giacente, ma in senso inverso al superiore, colla massima convessità verso l' estremità articolare. Al margine inferiore delle cartilagini odontoidee superiori ed al superiore delle inferiori trovansi le grondaje per le dentature più profonde e più larghe verso l' asse della bocca (Tav. XI, fig. 1, *c*, *c*, *c*, *c*).

IV. *Archi dell' ioide ed apparato branchiale.*

Il sospensorio (Tav. XI, fig. 1, *d*, *d*) è una corta e larga lamina cartilaginea con un margine superiore tronco, un anteriore tagliente ed un posteriore ingrossato, non che con un' estremità inferiore rotondata. Le branche ioidee inferiori (Tav. XI, fig. 1, *e*, *e*) sono simili ad ossa femorali, al doppio più lunghe dei sospensori, esternamente stiacciate dall' innanzi all'indietro, ed internamente dall' alto in basso. Il capo articolare dell' estremità esterna si combina tanto col sospensorio che colla cartilagine odontoidea inferiore dello stesso lato; e l' estremità opposta tronca si adagia al relativo margine laterale della copula (Tav. XI, fig. 1, *C*). Questa è una lamina quadrilatera con un margine posteriore, due laterali paralleli retti, ed un margine anteriore semilunare convesso.

Il primo arco branchiale (Tav. XI, fig. 1, *f*, *f*) è formato da ciascun lato da tre branche, e gli altri tre archi da quattro branche, mancando a quello le branche inferiori (Tav. XI, fig. 1, *g*, *g*, *h*, *h*, *i*, *i*). Le branche superiori dei primi tre hanno forma semilanceolata, diminuiscono in lunghezza dall' anteriore alla posteriore; le susseguenti sono striscie cartilaginee della stessa lunghezza delle superiori, dilatate in capi articolari all'estremità congiunta con queste, e tronche all' opposta che si congiunge colla terza branca un momento più lunga. Le terze branche del primo arco hanno l' estremità opposta a quella che s' articola colla seconda dilatata in due condili, uno anteriore congiunto all' angolo posteriore della copula, ed uno posteriore che va a poggiare sulla stessa estremità della stessa branca del secondo arco. Le terze branche degli altri archi, conservando la proporzione di quelle del primo, diminuiscono in lunghezza dal secondo al quarto arco, hanno l' estremità esterna tronca e l' interna tagliata obbliquamente. Questa coll' angolo anteriore si congiunge alla relativa quarta branca. Le branche inferiori, che si trovano nei soli tre archi posteriori (Tav. XI, fig. 1, *j*, *j*, *k*, *k*, *l*, *l*), hanno la forma di lemnisci ricurvi, congiunti col vertice esterno alle relative terze branche e convergenti coll' interno nell' asse del corpo ad angolo rivolto colla punta verso la coda nel secondo e nel terzo arco. Esse sono molto piccole e diminuiscono in lunghezza dal secondo al quarto arco. L' angolo formato da quelle del secondo arco poggia sui margini interni di quelle del terzo, e il vertice dell' angolo formato da quelle del terzo arco poggia nel punto di mezzo del margine arcuato anteriore della cartilagine congiungente delle mascelle faringee. Le branche inferiori del quarto arco poggiano sullo stesso margine esternamente a quelle del terzo arco. Le branche superiori del quarto arco branchiale (Tav. XI, fig. 1, *m*, *m*) mandano dal loro margine tagliente una striscia cartilaginea formante la branca superiore delle mascelle faringee, le quali s' articolano colla branca inferiore parimenti semilanceolata (Tav. XI, fig. 1, *n*, *n*). Questa ha il margine tagliente rivolto indietro e s'appoggia colla punta al margine laterale della cartilagine congiungente. La cartilagine congiungente (Tav. XI, fig. 1, *o*) è una lunga lamina cartilaginea, lingueforme, colla punta rivolta verso la coda. Essa ha un margine anteriore breve arcuato sul quale poggiano le branche inferiori del terzo e quarto arco branchiale, come già più sopra notai, e due margini laterali molto lunghi. Dopo il terzo anteriore di questi margini s' attaccano le mascelle faringee.

V. *Estremità anteriori.*

Due striscie cartilagince arcuate (Tav. XI, fig. 2, 3, *A*, *A*), puntite alla estremità superiore, combinantisi ad angolo acuto nell'asse del corpo, e coll' altra estremità dilatata, formano la cintura toracica. Alla loro unione formano una chiglia sporgente a cuore verso la coda, ed incisa ad angolo verso la testa (Tav. XI, fig. 2, *a*). Ciascuna di queste cartilagini ha un margine anteriore tagliente nei due terzi superiori, e fornito d' una profonda infossatura come la stiacciatura per mezzo d' un dito al terzo inferiore (Tav. XI, fig. 3, *b*, *b*). Il loro margine posteriore è ingrossato nel terzo di mezzo là dove si articolano le tre cartilagini maggiori delle pinne.

La base delle pinne è formata dalle solite tre cartilagini. L' esterna (Tav. XI, fig. 2, *b*, *b*) forma un angolo diedro colla media, somiglia ad un piccolo triangolo piano attaccato con un lato alla cintura toracica. La media (Tav. XI, fig. 2, *c*, *c*) è parimenti triangolare, si unisce con un lato retto alla esterna, con un angolo smozzato alla cintura toracica, e con un lato convesso alla interna. Essa è un momento più corta della esterna. La terza, vale a dire la interna (Tav. XI, fig. 2, *d*, *d*), è della stessa larghezza, ma circa quattro volte più lunga della media, ha parimente la forma d' un triangolo, è attaccata con un angolo smozzato alla cintura toracica, con un lato concavo alla cartilagine media, ed il suo lato maggiore forma lo spigolo interno della pinna. Essa termina con un ingrossamento a battaglio (Tav. XI, fig. 2, *e*, *e*), al quale è attaccato un altro pezzo cartilagineo che porta in cima due piccoli raggi (Tav. XI, fig. 2, *f*, *f*). In punta all' angolo posteriore della cartilagine esterna si trova un piccolo raggio (Tav. XI, fig. 2, *g*, *g*). Gli altri raggi sono distribuiti in tre serie longitudinali e precisamente nel modo che segue. Lungo il margine posteriore delle cartilagini media ed interna s' attacca la prima serie (Tav. XI, fig. 2, *h*, *h*), nella quale il raggio più esterno è largo circa il triplo degli altri. Questi s' ingrossano verso l' estremità posteriore e s' accorciano gradatamente nella interna quarta parte della serie. La seconda serie (Tav. XI, fig. 2, *i*, *i*) comincia parimenti con un raggio largo ma soltanto il doppio degli altri, che nel terzo esterno aumentano in lunghezza, e poi decrescono gradatamente. Alcuni dei raggi maggiori di questa serie sono divisi in due porzioni e nel quarto interno crescono dapprima in larghezza per poi nuovamente diminuire. Al margine

posteriore di questa serie s' attaccano i raggi della terza (Tav. XI, fig. 2, *j, j*). Nella metà esterna crescono rapidissimamente dal primo in poi dilatandosi parimenti a cornucopia all' estremità libera, in modo da arrivare quasi al decuplo di quelli della seconda serie. Nel quarto susseguente diventano puntiti a lesina alla loro estremità libera e si accorciano con molta rapidità, in modo che il più interno di questa quarta parte è appena altrettanto lungo quanto il secondo esterno. Nell' ultimo quarto interno sono cortissimi e appena appena crescono in lunghezza dal più esterno all' interno. Quello è oltre a ciò il più largo, mentre gli altri diminuiscono in larghezza fino all' ultimo; e tutti hanno l' estremità posteriore rivolta verso l'asse longitudinale del pesce. Gli è perciò che il margine posteriore della pinna non forma una linea continua ma ha l' aspetto d' una falce. Non posso far a meno di notare che nelle due quarte parti intermedie i raggi della terza serie sono formati di due pezzi, col più piccolo dei quali, che è anche un momento più piccolo dei raggi della seconda serie, s' attaccano a questi.

VI. *Estremità posteriori.*

La pelvi (Tav. XI. fig. 4, *A*) è rappresentata da una striscia cartilaginea quadrilatera arcuata,con un margine anteriore convesso ed uno posteriore concavo, e con due faccie piane una superiore ed una inferiore. Agli angoli posteriori di questa si attaccano due cartilagini a lama di scalpello anatomico (Tav. XI, fig. 4, *b, b*) che hanno rivolto esternamente il margine acuto convesso ed internamente l' ottuso concavo. I raggi formano due serie distribuite nel modo seguente. L' interna (Tav. XI, fig. 4, *c, c*) comincia con una laminetta cartilaginea attaccata alla metà posteriore del lato esterno della pelvi, la quale all' estremità libera, come le dita d'una mano, si suddivide in 4 raggi. A questa laminetta digitata succedono gli altri raggi attaccati lungo il margine esterno della cartilagine a scalpello. I primi tre o quattro aumentano in lunghezza, gli altri diminuiscono gradatamente fino al penultimo che è metà più corto dell'antipenultimo, mentre l'ultimo è un poco più lungo di questo. I raggi della seconda serie (Tav. XI, fig. 4, *d, d*) formano nella metà anteriore un triangolo isoscele attaccato alla prima serie colla base incavata a semicerchio, ed hanno l' estremità libera puntita; mentre nella metà posteriore sono presso a poco tutti eguali in lunghezza, ricurvi all' indentro coll' estremità libera e tanto corti che arri-

vano appena ad un quinto del più lungo di quelli della prima metà. Il loro numero non corrisponde però a quelli della prima serie, perchè l'ultimo raggio di questa non ha corrispondente nella seconda, ed il penultimo che, come vedemmo, è molto corto ne porta due al doppio più lunghi. Ciascuno dei quattro raggi che precedono l' ultimo della prima metà è formato di due pezzi, il primo della seconda metà di tre pezzi, ed il secondo di due.

VII. *Pinne dorsali.*

Lo scheletro della prima pinna dorsale è formato da due serie di raggi, l' inferiore delle quali (Tav. X, fig. 1, *v*) nei due terzi posteriori è nuovamente suddivisa in altre due serie (Tav. X, fig. 1, *w*, *x*). La prima serie presenta la forma d' un triangolo con un lato minore leggermente concavo che guarda all' innanzi, uno più grande convesso che guarda all' insù, ed un terzo posteriore ancora più grande che guarda la colonna vertebrale. I raggi sono distribuiti parallelamente al margine anteriore del triangolo, essendo questo formato dal primo raggio, e dall' estremità superiore si attenuano per terminare a lesina colla estremità inferiore. I raggi della seconda serie (Tav. XI, fig. 1, *y*) si attaccano all' estremità superiore di quelli della prima, e le estremità libere di quelli dei tre quarti anteriori della pinna formano una linea parabolica. Il raggio più lungo di questi è eguale in lunghezza al più lungo di quelli della prima serie, e ciascuno dei due posteriori è composto di due pezzi. I raggi del quarto posteriore della seconda serie (Tav. XI, fig. 1, *z*) sono tanto piccoli che sembrano appena indicati ed obbliquamente rivolti indietro.

La seconda pinna anale deve essere una pinna spuria perchè avendone cercato lo scheletro in varii esemplari mai non potei ritrovarne nemmeno un vestigio.

VIII. *Pinna anale.*

Anche questa deve essere una pinna spuria perchè mai non mi fu dato di scoprirne lo scheletro.

IX. *Ossificazione.*

La cartilagine pavimentosa (Tav. X, fig. 6) dell' *Alopias* si distingue da quella degli altri squali da me considerati per la presenza di alcuni fori molto

grandi fra i singoli dischetti (Tav. X, fig. 6, *a*, *a*, *a*). Nei raggi superiori della pinna caudale ogni dischetto è circondato di sei fori circolari, mentre sull'apparato mascellare i dischetti sono più piccoli e circondati soltanto da quattro fori interstiziali. Gli è perciò che negli scheletri disseccati queste cartilagini acquistano l' aspetto di una reticella. Una sezione verticale all' asse longitudinale dei corpi vertebrali dimostra che nel centro v' esiste un largo foro di comunicazione fra le faccette coniche (Tav. XI, fig. 7, *a*) circondato da un anello compatto che è la sezione della clepsidra; e che la sostanza del resto del corpo vertebrale è formata da laminette alternanti di sostanza ossea spugnosa (Tav. XI, fig. 7, *b*, *b*) e cartilagine jalina, distribuiti radialmente intorno all'asse. Due laminette cartilaginee jaline si estendono superiormente a formare gli archi vertebrali (Tav. XI, fig. 7, *c*) e due inferiormente a formare i processi trasversi (Tav. XI, fig. 7, *d*). I superiori sono più distanti uno dall' altro degli inferiori.

VI. SCYLLIUM CATULUS.

In tal modo espone *Giov. Müller* i caratteri della colonna vertebrale del genere *Scyllium*:

« La fig. 7, représente des vertèbres du *Scyllium Catulus*, de profil; » fig. 7, *a*, les montre per la face inférieure. Les corps de vertèbres sont un peu » déprimés sur le milieu de leur longeur; les cartilages cruraux et intercru- » raux son régulièrement ossifiés; les cartilages transverses ont une écorce os- » sifiée. Il existe des pièces supérieures impaires. »

I corpi delle vertebre sono allargati alle due estremità in modo da presentare in ciascuna un margine rilevato, ed essendo stiacciati tanto nel diametro perpendicolare che nel trasversale presentano nel mezzo una forma parallelopipeda. Essi conservano una lunghezza costante dalla terza vertebra fino al margine posteriore della prima pinna dorsale, d' onde poi gradatamente diminuiscono fino all' ultima vertebra caudale. Nelle prime due vertebre sono più corti che nelle susseguenti. Meno che in quelle, nelle altre la lunghezza sorpassa d' un terzo l' altezza. A ciascuno dei quattro spigoli v' ha una fossetta semplice ma profonda, nelle superiori delle quali si inseriscono gli archi vertebrali superiori e nelle inferiori i due processi trasversi. Ad ogni corpo vertebrale corrisponde da ciascun lato un arco vertebrale. Questi (Tav. XII, fig. 1, *a*, *a*) hanno l' aspetto di una finestra gotica, sono alti quanto i corpi vertebrali sottoposti e larghi la

metà. Essi sono ossificati in modo che presentano disseccati l' aspetto d' una stella a cinque raggi, de'quali il raggio impari, che è nello stesso tempo il superiore, è biforcato. Fra ogni coppia di archi vertebrali v' ha da ciascun lato un corpo intercrurale della stessa larghezza, ma un momento più lungo degli archi, fra' quali è inserito (Tav. XII, fig. 1, *b*, *b*), e ciò perchè invece di terminare come questi con una base allargata, termina con una prominenza a sesto acuto simile alla superiore che penetra fra i corpi vertebrali. Anche questi pezzi intercrurali sono ossificati, e disseccati presentano l'aspetto di una stella a sei raggi. Superiormente chiudono la vôlta del canale del midollo spinale pezzi cartilaginei impari di forma lenticolare biconvessa (Tav. XII, fig. 1, *c*, *c*) inserita fra le eminenze a sesto acuto di ogni coppia di archi vertebrali ed ogni coppia di pezzi intercalari. I processi trasversi somigliano a triangoli sferici (Tav. XII, fig. 1, *d*, *d*) attaccati al corpo della vertebra relativa con un lato lungo quanto il corpo stesso. Essi conservano questa forma dalla prima vertebra fino al margine posteriore della prima pinna dorsale. Da questo punto in poi si allungano, si ricurvano verso la coda, cambiano di forma e si rivolgono sotto la colonna vertebrale per formare il canale dei vasi caudali congiungendosi con quelli del lato opposto, e ciò precisamente così. Dal margine posteriore della prima pinna dorsale fino allo stesso margine della seconda hanno una doppia lunghezza dei precedenti, e invece di terminare con un angolo, si biforcano ad *Y*, senza che però si tocchino le estremità libere dei cruri (Tav. XII, fig. 2, *e*). Dal margine posteriore della seconda pinna dorsale aumentano gradatamente in lunghezza, ma in modo che il gambo posteriore è più lungo dell' anteriore, fino al lembo inferiore della pinna caudale (Tav. XII, fig. 2, *f*). Da questo punto continuano ad allungarsi fino alla quarta vertebra dietro il principio del lembo superiore della caudale, poi continuano a decrescere finchè diventano impercettibili all'apice della coda. Nella pinna caudale però cambiano di forma, chè sono ricurvi a scimitarra (Tav. XII, fig. 2, *g*, *g*) (e più fortemente gli anteriori) col margine convesso all' innanzi, larghi alla base quanto è lungo il relativo corpo vertebrale; e s' attenuano verso l' estremità libera che termina dilatata in due eminenze condiloidee. Il lembo superiore della pinna è formato da raggi lunghi la metà del più lungo del lembo inferiore, di forma identica a questo (Tav. XII, fig. 2, *h*, *h*), se ne eccettui la curvatura, in numero eguale ai corpi vertebrali, e rivolti obbliquamente verso l' apice caudale. Essi cominciano sei vertebre più indietro del lembo inferiore, conservano nei primi quattro quinti altezza identi-

ca per poi gradatamente accorciarsi finchè diventano impercettibili. Essi diminuiscono in larghezza dal primo all' ultimo.

Da questa descrizione risulta:

1.° Che vertebre con archi e pezzi intercrurali simili ad una finestra gotica, con pezzi intercalari impari simili a lenti biconvesse appartengono al genere *Scyllium*.

2.° Che se queste vertebre hanno processi trasversi simili a triangoli sferici sono comprese fra la testa ed il margine posteriore della prima pinna dorsale.

3.° Che se esse hanno processi trasversi biforcati ad *Y* con crnri egnali, sono comprese tra il margine posteriore della prima pinna dorsale e lo stesso margine della seconda.

4.° Che se in questi processi trasversi un gambo è più lungo dell' altro, sono comprese fra il margine posteriore della seconda pinna dorsale ed il lembo inferiore della caudale.

5.° Che se tali vertebre hanno processi spinosi inferiori a scimitarra, appartengono alla pinna caudale.

6.° Che se finalmente avremo una semplice impressione dello scheletro della coda, sarà facile il riconoscere se essa appartenga ad uno *Scyllium;* perchè in tal caso il margine libero del lembo superiore sarà parallelo all' asse, e il margine libero del lembo inferiore segnerà una curva, la quale avrà il punto culminante un po' indietro del principio del lembo superiore.

II. *Il cranio.*

Osservato dalla faccia dorsale il cranio dello *Scyllium catulus* ci presenta nel mezzo un'eminenza ellittica (Tav. XII, fig. 3, *a*), a' fianchi della quale si trovano i margini laterali semilunari incavati, con le corna anteriori più lunghe che si congiungono colle estremità del margine anteriore. Nel punto di mezzo di questo sporge la cartilagine impari che ajuta a formare lo scheletro del muso (Tav. XII, fig. 3, *b*); da ciascun lato di questa trovasi una piccola incisione semilunare, ed in continuazione a questa da ambo i lati un lungo margine obbliquamente rivolto indietro e leggermente arcuato (Tav. XII, fig. 3, *c*, *d*). Gli è perciò che, osservato dalla faccia superiore, il cranio presenta all'innanzi l' aspetto d' un dardo. Innanzi all' eminenza ellittica trovasi la solita fon-

tanella circolare (Tav. XII, fig. 4, *c*), ed innanzi a questa da ciascun lato prolungansi due cartilagini bacillari, che concorrendo ad angolo triedro colla impari formano lo scheletro del muso simile ad una piramide tronca. Lateralmente al vertice anteriore dell' eminenza ellittica trovansi due ampii fori (Tav. XII, fig. 3, *e*, *e*) che mettono nell' angolo anteriore delle orbite. Dietro l' eminenza ellittica trovasi una fossetta con due fori, i quali conducono nella cavità craniale (Tav. XII, fig. 3, *f*, *f*). Dietro le corna posteriori dei margini semilunari laterali vi è da ciascun lato una piccola incisione semilunare (Tav. XII, fig. 3, *g*, *g*). Fra queste e la fossetta trovansi le vôlte degli organi dell' udito. Il margine posteriore è segnato da due linee obblique, le quali concorrono indietro ad angolo verso la colonna vertebrale.

La base del cranio ha la forma d' un vaso etrusco. Anteriormente si veggono le due cavità nasali ellittiche distanti l' una dall'altra e collocate obbliquamente dall' interno e dall' innanzi all' esterno ed all' indietro (Tav. XII, fig. 4, *a*, *a*). Seguono a questi i due margini laterali intagliati ad S formati da ciascun lato da un prolungamento laminare della base del cranio (Tav. XII, fig. 4, *b*, *b*), e dietro a questi due cavità articolari ellittiche, obblique pei sospensori (Tav. XII, fig. 4, *c*, *c*). A breve distanza dal punto di mezzo di ciascuna di esse trovasi un foro che conduce nella cavità craniale (Tav. XII, fig. 4, *d*, *d*). Il margine posteriore è segnato da due archi concavi che si perdono nella colonna vertebrale.

Il cranio osservato in profilo presenta anteriormente le cavità nasali (Tav. XII, fig. 1, *i*), dietro a queste l'amplissima orbita ellittica (Tav. XII, fig. 1, *j*), e dietro a questa inferiormente le cavità articolari pei sospensori (Tav. XII, fig. 1, *k*). Il meato auditivo esterno trovasi all' angolo estremo del margine posteriore.

III. *Apparato della masticazione.*

Quattro striscie cartilaginee odontoidee. Le superiori (Tav. XII, fig. 5, *A*, *A*) ricurve esternamente a cucchiajo dall' alto in basso all' estremità posteriore, con un margine superiore concavo nel terzo anteriore e convesso nei due posteriori, con una piccola eminenza al limite di queste due sezioni, e con margine inferiore ricurvo ad S. Esse s' articolano soltanto colle cartilagini odontoidee inferiori (Tav. XII, fig. 5, *a*, *a*). Queste (Tav. XII, fig. 5, *B*, *B*) hanno tanto il margine superiore che l' inferiore ricurvo ad S, ma in modo che alle

convessità del superiore corrispondano le concavità dell' inferiore e viceversa, e che la convessità di questo è molto più pronunciata. L' articolazione si trova all' estremità posteriore del margine superiore, e si combina tanto colla relativa cartilagine odontoidea superiore che col sospensorio relativo (Tav. XII, fig. 5, *b*, *b*).

IV. *Archi dell' ioide ed apparato branchiale.*

I sospensori (Tav. XII, fig. 1, *c*, *c*) sono due striscie cartilaginee quadrilatere, tronche all' estremità superiore, dilatate nel mezzo e con due eminenze condiloidee all' estremità inferiore, una delle quali si articola colla relativa mascella inferiore, e l'altra colla relativa branca ioidea inferiore. Queste (Tav. XII, fig. 1, *d*, *d*) sono d' un terzo più lunghe del sospensorio, dilatate alle estremità, ma maggiormente all' inferiore. La superiore si articola colla mascella inferiore e col sospensorio, l' inferiore mediante un condilo anteriore si attacca al lato della copula, e mediante il condilo posteriore al primo arco branchiale. La copula (Tav. XII, fig. 5, *C*) è una lamina cartilaginea semilunare perforata in mezzo, con un margine anteriore convesso ed uno posteriore concavo, e due corna rivolte indietro congiunte ai condili anteriori delle branche inferiori del primo arco branchiale. Le branche superiori dei primi tre archi branchiali hanno la forma di una lama di cheratotomo (Tav. XII, fig. 5, *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, *e*), quelle del quarto arco (Tav. XII, fig. 5, *f*, *f*) sono striscie ripiegate ad angolo che con una branca sono attaccate alle seconde branche del quarto arco e coll' altra alle mascelle faringee. Le seconde branche sono striscie cartilaginee quadrilatere diminuenti in lunghezza dalla prima alla quarta, metà più corte delle relative superiori. Le terze branche sono parimenti striscie cartilaginee dilatate all' estremità inferiore in due eminenze condiloidee, le quali crescono tanto dalla prima all' ultima che questa sembra biforcuta. L' anteriore di una si congiunge alla posteriore della precedente, meno l'anteriore di quelle del primo arco che si attaccano alle corna della copula, e le posteriori di quelle dell' ultimo che si attaccano alle relative mascelle faringee. Le quarte branche (Tav. XII, fig. 5, *f'*, *f'*) non sono in numero di 4, ma di 3 da ciascun lato, somigliano a striscie cartilaginee arcuate con estremità dilatate ed arcuate, convergono ad angolo indietro verso la cartilagine congiungente, e diminuiscono in lunghezza dall' anteriore alla posteriore. Ciascuna di esse si attacca coll' estremità anteriore al punto di congiunzione di

due delle terze branche, e le prime convergendo ad angolo penetrano coll' apice fra le branche dell'angolo formato dalle seconde, sull' estremità posteriore delle quali si uniscono. Queste poggiano nel mezzo del margine anteriore della congiungente, e le terze di fianco a quelle sugli angoli dello stesso margine. Alle branche posteriori dei pezzi superiori del quarto arco s'attaccano le branche superiori delle mascelle faringee eguali per forma e dimensioni alle seconde branche del quarto arco branchiale (Tav. XII, fig. 5, *g, g*). Le seconde branche delle mascelle faringee somigliano ad un mezzo dardo tagliato nell'asse, col margine tagliente rivolto indietro; e sono attaccate colla punta all' angolo anteriore del margine laterale della congiungente e colla eminenza condiloidea posteriore della terza branca dell' ultimo arco branchiale (Tav. XII, fig. 5, *g'*, *g'*). La cartilagine congiungente ha la forma di cuore con un breve margine anteriore occupato dalle inserzioni delle branche inferiori del terzo e quarto arco branchiale, e con due lunghi margini laterali, e termina posteriormente in una lunga punta (Tav. XII, fig. 5, *h*).

V. *Estremità anteriori.*

La cintura toracica (Tav. XII, fig. 6, *A*) è formata da una striscia cartilaginea ripiegata ad angolo nel mezzo, che rivolge il vertice all' innanzi ed ha estremità libere acuminate. Tanto il margine anteriore che il posteriore sono ondeggiati, e nel mezzo della faccia inferiore di ciascuna branca v' ha un' eminenza alla quale s' attaccano le pinne (Tav. XII, fig. 6, *a*, *a*). Ogni pinna toracica ha la base formata da tre cartilagini maggiori. L'esterna (Tav. XII, fig. 5, *c*, *c*) piccola e irregolarmente quadrilatera; la media (Tav. XII, fig. 6, *d*, *d*) appena più grande con margine posteriore convesso; e l' interna (Tav. XII, fig. 6, *e*, *e*) circa tre volte più lunga, semilunare, con margine esterno convesso tagliente ed interno concavo ottuso. Al margine posteriore della prima si attacca una lunga striscia cartilaginea (Tav. XII, fig. 6, *f*, *f*) che ha il margine posteriore convesso; al margine posteriore della seconda una lamina cartilaginea (Tav. XII, fig. 6, *g*, *g*), che all' indietro si suddivide in tre raggi come le tre dita d' un guanto, e che aumentano in lunghezza dall' esterno all' interno; all' estremità posteriore dell' interna un piccolo pezzetto cartilagineo (Tav. XII, fig. 6, *h*, *h*); e lungo il margine esterno di questo e di quella bastoncini cartilaginei a palizzata dilatati posteriormente e decrescenti dall' esterno all' in-

terno (Tav. XII, fig. 6, *i*, *i*). La seconda serie di raggi (Tav. XII, fig. 6, *j*, *j*) è formata da una cartilagine esterna semilunare, che si estende dal primo raggio più corto lungo il margine posteriore della cartilagine più esterna che la precede; quindi da una serie di altrettanti pezzetti cartilaginei corti, terminanti posteriormente ad angolo e decrescenti dall'esterno all'interno quanti sono gli altri raggi della prima serie meno uno, perchè la seconda serie cessa al penultimo raggio. La terza serie (Tav. XII, fig. 6, *k*, *k*) è formata esteriormente da tre pezzi quadrilateri collocati orizzontalmente uno dietro l' altro e crescenti in lunghezza, e quindi da otto pezzi cartilaginei esagonali che si inseriscono con un angolo fra ciascuna coppia dei sette penultimi raggi interni della seconda serie, e decrescono dall' esterno all' interno. Finalmente il margine posteriore della pinna, che saria dentellato per questi pezzi esagoni, viene arrotondato dall' interpolazione di sette altri pezzi cartilaginei che decrescono dall' esterno all' interno (Tav. XII, fig. 6, *l*, *l*).

VI. *Estremità posteriori.*

La pelvi è rappresentata dalla solita striscia cartilaginea (Tav. XII, fig. 7, *A*) ma diritta e orizzontale, un momento dilatata nel mezzo, e con angoli ingrossati in eminenze. Agli angoli posteriori si attaccano due altre grandi cartilagini parallele all' asse longitudinale del pesce (Tav. XII, fig. 7, *B*, *B*), che hanno la forma d' una lama di scalpello anatomico con margine tagliente esterno. Innanzi all' inserzione di queste cartilagini s' attacca il primo raggio che ha posizione obbliqua all' infuori ed all' indietro e termina acuminato. Dietro a questo, e paralleli a lui stesso, lungo il margine tagliente delle cartilagini verticali si attaccano i raggi componenti la prima serie (Tav. XII, fig. 7, *c*, *c*) eguali in lunghezza al primo, ma rovesciati di forma fino al penultimo, ed attenuantisi dall' anteriore al posteriore. Gli ultimi due raggi sono un momento più lunghi degli altri. La seconda serie (Tav. XII, fig. 7, *d*, *d*) è formata da piccoli raggi conici che completano quelli della prima serie dal secondo al penultimo e diminuiscono nello stesso ordine. Il margine libero delle pinne addominali è semilunare convesso. L'estremità posteriore delle due cartilagini a lama di scalpello è concatenata con altri due pezzetti cartilaginei che la rendono piu lunga (Tav. XII, fig. 7, *e*, *e*).

VII. *Pinne dorsali.*

La prima (Tav. XII, fig. 2, *L*) è al doppio più lunga e circa un terzo più alta della seconda. Quella ha una forma ellittica coll' asse maggiore inclinato in modo da formare un angolo acuto coll' asse della coda, e col vertice posteriore meno acuto. Essa è formata da quattro serie di raggi. La prima (Tav. XII, fig. 2, *m*) ha raggi conici colla punta rivolta in giù, inclinati indietro e decrescenti dall' anteriore al posteriore. La seconda serie (Tav. XII, fig. 2, *n*) ha raggi molto lunghi crescenti dal primo al quart' ultimo, poi decrescenti. La terza serie (Tav. XII, fig. 2, *o*) è formata da piccoli pezzetti cartilaginei, ma compresi soltanto fra il terzo ed il quart' ultimo raggio. La quarta finalmente (Tav. XII, fig. 2, *p*) da piccoli raggi conici rivolti all' insù ed all' indietro, crescenti dal primo al penultimo, e decrescenti nei tre posteriori. La seconda pinna dorsale (Tav. XII, fig. 2, *Q*) ha la forma semilunare con margine inferiore concavo e superiore convesso, è tronca in direzione perpendicolare all'asse nel corno posteriore, ed è composta di quattro serie di raggi distribuite allo stesso modo e di forma identica a quelle della pinna anteriore, colla sola differenza che nella prima serie i raggi aumentano lentamente nella prima metà per rapidamente diminuire nella seconda.

VIII. *Pinna anale.*

Estraordinariamente lunga ma bassa è questa pinna nello *Scyllium stellare* (Tav. XII, fig. 2, *R*), ha la forma di un arco di cerchio col margine inferiore convesso, ed è composta di tre serie. La prima, vale a dire la superiore (Tav. XII, fig. 2, *s*), ha raggi conici coll' apice rivolto verso la colonna vertebrale, e l' asse obbliquo formante angolo acuto coll' asse della coda ed eguali in lunghezza. I raggi della seconda serie sono bacillari (Tav. XII, fig. 2, *t*), più grandi di quelli, hanno l' asse nel prolungamento dei superiori, ed aumentano in lunghezza dall' anteriore a quello di mezzo per poi diminuire da questo all' ultimo. Finalmente la terza serie ha raggi conici coll' apice rivolto obbliquamente all' ingiù ed all' indietro, metà più piccoli di quelli della prima serie, e crescenti e decrescenti nello stesso ordine di quelli della seconda (Tav. XII, fig. 2, *u*).

IX. *Ossificazione.*

L'ossificazione corrisponde perfettamente alla descrizione data da *Giov. Müller*, colla sola differenza che io trovai costantemente nelle vertebre: il foro di comunicazione fra le faccette coniche (Tav. XII, fig. 8, 9, *a*), la clepsidra di tessuto osseo più compatto, un nucleo cartilagineo nel braccio superiore della croce ossificata (Tav. XII, fig. 8, *b*), le braccia della croce cartilaginea estendersi superiormente a formare gli archi vertebrali (Tav. XII, fig. 8, *c*) ed inferiormente i processi trasversi (Tav. XII, fig. 9, *d*) e rivestite di dentro e di fuori di uno straterello ossificato, nè potei scorgere quelle laminette che, secondo *Müller*, formano un breve sepimento nelle braccia della croce jalina partendo dal nucleo più solido.

(*Letta ai 14 febbrajo* 1859).

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. III. *Acanthias vulgaris.*

Fig. 1. Cranio e la porzione anteriore della colonna vertebrale vedute in profilo.

Fig. 2. Continuazione di questa.

A-A') Regione nasale della testa.
A'-A'') » oculare »
A''-A''') » auricolare »
B) Mascelle superiori.
C) Mascelle inferiori.
D) Cartilagini labiali.
E) Apparato branchiale.
F) Prima pinna dorsale.
G) Seconda » »
a) Cartilagine intercrurale.
b, b) Archi vertebrali superiori.
c) Corpo della vertebra.
d) Processo trasverso.
e) Cartilagine intervertebrale.
f, f) Cartilagini intercrurali pentagone.
g, g) » » triangolari.
h, h) » » circolari.
i, i) » » triangolari minori.
j, j) Processi trasversi quadrilateri.
k-k') Striscia cartilaginea formata dalla congiunzione dei processi trasversi dello stesso lato.
k'-k'') Canale cartilagineo formato dall' unione dei processi trasversi di un lato con quelli del lato opposto.
l, l) Processi spinosi inferiori.
m, m) Portatori dei raggi della pinna caudale.
n) Striscia eminente formata da ingrossamenti laterali di quelli.
o) Cartilagine basilare della prima pinna dorsale.
o') Detta della seconda.
p) Aculeo della prima.
p') » » seconda.
q) Prima serie di cartilagini minori della prima dorsale.
r) Seconda serie di cartilagini minori della prima dorsale.
s) Terza serie di cartilagini minori della prima dorsale.
Q') Cartilagini minori della seconda dorsale.
t) Cartilagine anteriore della seconda dorsale.

Fig. 3. Il cranio veduto dall' alto.

a) Prolungamento a cucchiajo formante il muso.
b, b) Due fori che conducono alla faccia inferiore del cranio.
c, c) Padiglioni nasali.
d, d) Margini superiori della regione oculare.
E) Eminenza ovoidea.
f, f) Due fori che mettono nella cavità craniale.
g, g) Margini superiori della regione auriculare.

h) Fontanella.

i, i) Forami auditivi.

Fig. 4. Cintura toracica dalla faccia anteriore.

Fig. 5. Cintura toracica dalla faccia posteriore.

a) Cartilagine intermedia maggiore.

b, b) Cartilagini minori.

c, c) Articolazioni alle quali si attaccano le pinne.

d, d) Espansioni quadrilatere.

Fig. 6. Le due pinne toraciche osservate di sopra.

a, a) Cartilagini basilari interne.

b, b) » » intermedie.

c, c) » » esterne.

d, d) Bastoncini cartilaginei differenti dai raggi delle pinne.

e, e) Prime serie dei raggi delle pinne.

f, f) Seconde serie dei raggi delle pinne.

g, g) Terze serie dei raggi delle pinne.

Fig. 7. Cintura e pinne addominali.

a) Cintura addominale.

b, b) Piccole cartilagini orizzontali.

c, c) Cartilagini a lama di canifo.

d, d) Prima serie di raggi maggiori.

e, e) Seconda serie di raggi minori.

F, F) Appendici maschili.

Fig. 8. Una vertebra caudale tagliata per metà perpendicolarmente all'asse.

a) Archi vertebrali superiori.

b) Canale del midollo spinale rivestito internamente di cartilagine pavimentosa.

c) Corpo della vertebra.

d) Canale nel suo asse rivestito internamente di sostanza ossea.

e) Archi vertebrali inferiori.

f) Processo spinoso inferiore.

g) Canale pei vasi caudali rivestito internamente di cartilagine pavimentosa.

h, h) Strato esterno di cartilagine pavimentosa.

Fig. 9. Il corpo d'una vertebra spaccato per mezzo lungo l'asse.

a-b) Clepsidra ossea interna.

c, c) Sezioni dell'anello osseo esterno immedesimato colla clepsidra.

Tav. IV. *Mustelus vulgaris.*

Fig. 1. Cranio e la porzione anteriore della colonna vertebrale veduta in profilo.

Fig. 2. Continuazione di questa.

a, a, a, a) Pezzi corrispondenti agli archi vertebrali.

b, b, b, b) Cartilagini intercrurali.

c, c) Processi trasversi.

d, d) Loro appendice orizzontale.

e, e) Interstizii triangolari fra i processi trasversi otturati da una membrana fibrosa.

f, f) Processi spinosi inferiori.

g, g) Portatori dei raggi delle pinne.

h) Cavità dell'orbita.

H) Pelvi.

i, i) Cartilagini a scimitarra delle pinne addominali.

j, j) Prime serie di raggi delle pinne addominali.

k, k) Seconde serie dei raggi delle pinne addominali.

l) Prima serie di raggi della prima dorsale.

m) Seconda serie di raggi della prima dorsale.

n) Terza serie di raggi della prima dorsale.

O) Seconda pinna dorsale.

p) prima serie di raggi della pinna anale.

Q) Seconda serie di raggi della pinna anale.

r) Terza serie di raggi della pinna anale.

Fig. 3. Il cranio veduto dall' alto.

a, *a)* Padiglioni nasali.

b, *b)* Le due assicelle superiori che formano lo scheletro del muso.

c, *c)* Le due assicelle inferiori che formano lo scheletro del muso.

d) Eminenza ellissoidica che protegge superiormente la cavità craniale.

e, *e)* Ali semilunari che proteggono superiormente le orbite.

f, *f)* Fori ellittici comunicanti colle cavità delle orbite.

g, *g)* Piccoli forellini posteriori che comunicano colle cavità delle orbite.

h) Grande fontanella anteriore.

i, *i*) Fori comunicanti colla cavità craniale.

j, *j)* Eminenze posteriori che contengono l' organo dell' udito.

k, *k*) Apparato branchiale.

l) Principio della colonna vertebrale.

Fig. 4. Estremità anteriori.

A) Cintura toracica.

a) Prominenza incisa del suo margine anteriore.

b, *b)* Eminenze del margine posteriore colle quali si articolano le pinne.

c, *c)* Cartilagini piramidali interne delle pinne.

d, *d)* Cartilagini » intermedie delle pinne.

e, *e)* Cartilagini » esterne delle pinne.

f, *f)* Prima serie di raggi.

g, *g)* Seconda » » »

h, *h)* Terza » » »

Fig. 5. Una vertebra della regione anale tagliata verticalmente all' asse.

a) Canaletto di comunicazione fra le due cavità coniche della vertebra.

b) Branche verticali della croce maltese ossea.

c) Branche orizzontali della croce maltese ossea.

d) Cartilagine pavimentosa che riveste esternamente gli archi vertebrali superiori.

e) Nuclei ossei degli archi vertebrali superiori.

f) Canale del midollo spinale.

g) Processi trasversi.

Fig. 6. Il corpo d' una vertebra tagliato lungo l'asse.

a, *a*, *a*, *a*) Ingrossamenti della clepsidra alla base delle cavità coniche.

Tav. V. *Carcharias (Prionodon) Milberti.*

Fig. 1. Cranio e la porzione anteriore della colonna vertebrale vedute in profilo.

Fig. 2. Continuazione di questa.

a) Corpi vertebrali.

b) Rudimenti di archi vertebrali superiori.

c, *c)* Cartilagini intercrurali.

d, *d*, *d*, *d)* Due rudimenti di archi vertebrali corrispondenti ad un solo corpo di vertebra.

e, *e*, *e*, *e)* Membrana fibrosa che ricopre superiormente il canale vertebrale.

f, *f)* Archi vertebrali superiori simili a finestre gotiche.

g, *g*) Pezzi intercalari impari.

h, *h*, *h*, *h*) Processi trasversi.

i, j) Canale finestrato pei vasi caudali formato dalla congiunzione dei processi trasveri.

k, k) Appendice posteriore di questi.

l, l) Aperture triangolari otturate da membrana fibrosa.

m) Processi trasversi staccati dai processi spinosi.

n) Processi spinosi.

o, o) Processi trasversi congiunti in processi spinosi.

p, p) Processi spinosi superiori della pinna caudale.

Q) Vôlta craniale.

r) Sospensorio.

s) Foro pel nervo ottico.

T) Mascelle.

U) Apparato branchiale.

V) Prima pinna dorsale.

α) Prima serie di raggi della stessa.

β) Cartilagine triang. della stessa.

γ) Seconda serie di raggi della stessa.

δ) Terza serie di raggi della stessa.

W) Seconda pinna dorsale.

E) Prima serie di raggi di questa pinna.

n) Cartilagine navicolare di questa pinna.

G) Seconda serie di raggi di questa pinna.

Θ) Terza serie di raggi di questa pinna.

X) Pinna anale.

ι) Sua prima serie di raggi.

$\varkappa$) » seconda » » »

λ) » terza » » »

Fig. 3. Il cranio veduto dall'alto.

a) Fontanella anteriore.

b, b) Padiglioni nasali.

c, c) Loro alette quadrilatere.

d, d) Striscie cartilaginee superiori dello scheletro del muso.

e) Striscia cartilaginea orizzontale dello scheletro del muso.

f) Striscia cartilaginea inferiore dello scheletro del muso.

g, g) Fori di comunicazione colle narici.

H, H) Eminenze degli organi auditivi.

i, i) Fori di comunicazione colla cavità craniale.

j) Colonna vertebrale.

Fig. 4. Cintura e pinne toraciche.

A, A) Le due cartilagini della cintura toracica dal margine superiore.

b, b) Impressioni del margine superiore.

c, c) » della faccia posteriore

d, d) Cartilagini maggiori esterne.

e, e) » » a berretta frigia.

f, f) » » a cappuccio.

g, g) Prima serie di raggi.

h, h) Seconda » » »

i, i) Terza » » »

j) Raggio maggiore esterno della prima serie.

Fig. 5. Cintura toracica veduta di fronte.

a, a) Infossature della faccia anteriore.

Fig. 6. Pelvi e pinne addominali.

A) Pelvi.

b, b) Cartilagini orizzontali suddivise.

c, c) » verticali.

d, d) Prime serie di raggi.

e, e) Seconde » » »

Fig. 7. Sezione del corpo d' una vertebra perpendicolare all' asse.

a) Canale di comunicazione fra le due cavità coniche.

b) Croce di S. Andrea formata da assicelle ossee.

c, *c*) Coni ossei fra la sostanza cartilaginea.

Fig. 8. Sezione del corpo d' una vertebra lungo l' asse.

Tav. VI. Base del cranio, mascelle, e apparato branchiale dello *Acanthias vulgaris*, *Mustelus vulgaris* e *Carcharias (Prionodon) Milberti*.

Fig. 1. Base del cranio dello *Acanthias vulgaris*.

a) Cresta cartilaginea.

b, *b*) Fori comunicanti colla faccia superiore del cranio.

C, *C*) Padiglioni delle narici.

d, *d*) Peduncoli cartilaginei sui quali si appoggiano i bulbi degli occhi.

Fig. 2. Apparato della masticazione, ioideo, e branchiale dello stesso pesce.

A, *A*) Cartilagini odontoidee superiori.

a, *a*) Appendici articolari.

B, *B*) Cartilagini odontoidee inferiori.

b, *b*) Appendici superiori.

c, *c*) Alette semilunari.

C, *C*) Cartilagini labiali.

d, *d*) Fossette glenoidali.

D, *D*) Primi archi branchiali.

e) Prima cartilagine congiungente.

E, *E*) Branche inferiori delle mascelle faringee.

f) Seconda cartilagine congiungente.

F) Archi ioidei.

g, *g*) Branche inferiori dei secondi archi branchiali.

h, *h*) Prime branche dei quarti archi branchiali comuni alle mascelle faringee.

i, *i*, *i*, *i*) Fossette per le inserzioni dei muscoli.

Fig. 3. Base del cranio del *Mustelus vulgaris*.

a, *a*) Aperture delle narici.

b, *b*) Alette triangolari posteriori.

c, *c*) » » anteriori.

d, *d*) Assicella cartilaginea inferiore biforcuta formante lo scheletro del muso.

e, *e*) Striscie cartilaginee superiori formanti lo scheletro del muso.

f, *f*) Aperture pel passaggio dei nervi olfattori.

g, *g*) Lamine semilunari sporgenti.

h, *h*) Fossette glenoidee per le giunture dei sospensorii.

i, *i*) Margine posteriore del cranio.

l) Colonna vertebrale.

k, *k*) Forellini comunicanti colle cavità delle orbite.

Fig. 4. Apparati della masticazione, ioideo e branchiale del suddetto pesce.

A, *A*) Cartilagini odontoide superiori.

a, *a*) Articolazioni di quelle colle inferiori e gli archi ioidei.

b, *b*) Sporgenze interne del margine superiore.

b', *b'*) Sporgenze esterne del margine superiore.

B, *B*) Cartilag. odontidee inferiori.

c, *c*) Loro margini inferiori.

C) Copula dell' ioide.

d, *d*) Loro articolazioni cogli archi ioidei.

e,*e*) Branche superiori dei primi archi branchiali.

e', *e'*) Branche superiori dei secondi archi branchiali.

f, *f*) Branche superiori dei terzi archi branchiali.

f', *f'*) Branche superiori dei quarti archi branchiali.

g, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*, *g*) Terze branche degli archi branchiali.

h, *h*) Quarte branche dei primi archi branchiali.

h,' *h'*) Quarte branche dei secondi archi branchiali.

i) Cartilagine congiungente delle quarte branche dei primi archi branchiali.

i') Cartilagine congiungente delle quarte branche dei secondi archi branchiali.

j) Terza cartilagine congiungente.

k,*k*) Congiunzione fra questa e le

l, *l*) Branche inferiori delle mascelle faringee.

m, *m*) Branche inferiori del terzo arco branchiale.

n, *n*) Branche superiori delle mascelle faringee.

o, *o*) Cartilagini interealari.

p) Cartilagine liguliforme.

Fig. 5. Base del cranio del *Carcharias (Prionodon) Milberti*.

a, *a*) Aperture delle narici.

b) Striscia cartilaginea inferiore formante lo scheletro del muso.

c, *c*) Striscia cartilaginea che protegge la regione posteriore dell' orbita.

d, *d*) Fori comunicanti colla cavità craniale.

e, *c*) Aperture che condueono nell' orbita.

Fig. 6. Apparati della mastieazione, ioideo, e branchiale dello stesso pesce.

A, *A*) Cartilagini odontoidee superiori.

B, *B*) » » inferiori.

c, *c*) Eminenze piramidali tronehe del margine superiore delle prime.

d, *d*) Giunture fra le cartilagini odontoidee superiori ed inferiori.

e, *e*) Sospensorii.

f, *f*) Arehi ioidei inferiori.

g) Copula.

H, *H*) Primi archi branchiali.

i, *i*) Loro branche superiori.

j, *j*) » seeonde branche.

k, *k*) » terze »

L) Cartilagine congiungente.

m, *m*, *m*, *m*) Branche superiori dei secondi e terzi archi branchiali.

n, *n*, *n*, *n*) Seeonde branehe dei seeondi e terzi archi branehiali.

o, *o*, *o*, *o*) Terze branche dei secondi e terzi archi branchiali.

p, *p*) Quarte branche.

Q, *Q*) Branche superiori comuni alle mascelle faringee ed ai quarti archi branchiali.

r, *r*) Seconde branche dei quarti archi branchiali.

s, *s*) Branche inferiori delle mascelle faringee.

Tav. VII. *Squatina vulgaris*.

Fig. 1. Cranio senza apparato della mastieazione e senza apparato branchiale, nonchè porzione anteriore della colonna vertebrale veduti in profilo.

Fig. 2. Porzione posteriore della eolonna vertebrale.

A) Cranio.

a, *a*) Corpi della vertebra.

b, *b*) Corpi della vertebra.
c-d) Archi vertebrali triangolari.
e-f) Cartilagini intercrurali trapezoidali.
f-d) » » quadrate.
h, *h*) » impari triangolari.
d-g) Archi vertebrali superiori.
g', *g'*, *g'*) Archi vertebrali pentagonali.
h', *h'*, *h'*) Cartilagini intercrurali romboidali.
i, *i*, *i*) Spazii intercrurali otturati da membrana fibrosa.
i', *i'*, *i'*) Cartilagini impari triangolari.
j, *j*) Archi vertebrali romboidali.
k, *k*) Processi spinosi superiori.
l-l') Raggi anteriori del lembo superiore della pinna caudale.
m) Serie inferiore di raggi del lembo superiore della pinna caudale.
n, *n*) Processi trasversi triangolari.
n', *n'*) » » a lancetta.
o-p) » » a remo.
o', *o'*) Finestre quadrilatere otturate da membrana fibrosa.
p-q) Processi spinosi inferiori.
q-r) » » » formanti lo scheletro del lembo inferiore della pinna caudale.
S) Prima pinna dorsale.
S') Seconda » »
t, *t*) Lamine cartilaginee anteriori delle pinne dorsali.
u, *u*) Lamine cartilaginee posteriori delle pinne dorsali.
v', *v'*) Prima serie di cartilagini quadrangolari delle pinne dorsali.
v'', *v''*) Seconda serie di cartilagini quadrangolari delle pinne dorsali.
v''') Terza serie di cartilagini quadrangolari della prima dorsale.
v'''') Terza serie di cartilagini quadrangolari della seconda dorsale.

Fig. 3. La porzione della colonna vertebrale che segue immediatamente il cranio veduto alla faccia inferiore.
a, *a*) Corpi delle vertebre.

Fig. 4. Il cranio veduto dalla faccia inferiore.
a) Incisione angolare del piano cartilagineo parallelo alla vôlta craniale.
b, *b*) Incisioni semilunari laterali anteriori.
c, *c*) Canali nei quali giuocano i rami verticali delle mascelle superiori.
d, *d*) Incisioni semilunari laterali posteriori.
e, *e*) Incisioni arcuate occipitali laterali.
f) Incisione arcuata occipitale intermedia.

Fig. 5. Sezione verticale del corpo d'una vertebra perpendicolare all'asse.
a) Canaletto di comunicazione fra le cavità coniche.

Fig. 6. Sezione verticale del corpo d'una vertebra parallela all' asse.
a) Canaletto di comunicazione fra le due cavità coniche.
b) Strati alternanti di sostanza ossea e jalina.

Tav. VIII. *Squatina vulgaris*.

Fig. 1. Il cranio con l' apparato della masticazione e l' apparato branchiale veduti dall' alto.

A, *A*) Cartilagini odontoidee superiori.
a) Grande fontanella anteriore.
a', *a'*) Cartilagini labiali superiori anteriori.
b', *b'*) Cartilagini » » posteriori.
B, *B*) Apparato branchiale.
b, *b*) Incisioni a rostro di papagallo.
c, *c*) » semilunari.
d d') Articolazioni dei sospensorii.
d', *d'*) Porzioni posteriori delle cartilagini odontoidee superiori.
e) Foro occipitale.
f, *f*) Fori comunicanti colla cavità craniale.
g, *g*) Canali nei quali giuocano le branche verticali delle mascelle superiori.
h) Fossetta occipitale.

Fig. 2. Il cranio con l'apparato della masticazione veduti di fianco.
A) Cartilagini odontoidee superiori.
a') » labiali superiori anteriori.
B) » odontoidee inferiori.
b') » labiali superiori posteriori.
C) Articolazioni dell' apparato mascellare col cranio.
c) Denti delle mascelle superiori.
d') Porzione posteriore delle cartilagini odontoidee superiori.
e') Eminenza del margine posteriore superiore delle mascelle superiori.
f') Eminenza del margine posteriore inferiore delle mascelle inferiori.
g) Margine arcuato delle mascelle inferiori.
h) Denti delle mascelle inferiori.

Fig. 3. Apparato della masticazione, archi ioidei, e apparato branchiale veduti dall' alto.
A, *A*) Cartilagini odontoidee superiori.
a', *a'*) » labiali superiori anteriori.
b', *b'*) » » » posteriori.
C, *C*) Articolazioni delle mascelle coi sospensorii.
c, *c*) Rami verticali delle mascelle superiori.
d', *d'*) Porzioni posteriori delle mascelle superiori.
e', *e'*) Margine postero-superiore delle mascelle superiori.
f', *f'*) Eminenza inferiore del margine postero-inferiore delle stesse.
G, *G*) Sospensorii.
H, *H*) Branche inferiori degli archi ioidei.
h, *h*) Loro estremità interne dilatate.
L) Copula.
l, *l*) Sue corna minori.
m, *m*) » » maggiori.
n, *n*) Branche superiori dei primi archi branchiali.
o, *o*, *o*, *o*) Branche superiori dei secondi e terzi archi branchiali.
p, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*, *p*) Seconde branche degli archi branchiali.
q, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*, *q*) Terze branche degli archi branchiali.
r, *r*) Quarte branche dei primi archi branchiali.
s, *s*, *s*, *s*, *s*, *s*) Quarte branche dei tre ultimi archi branchiali.
t) Cartilagine congiungente triangolare anteriore.
T) Cartilag. congiungente angolare.

u, *u*) Branche superiori delle mascelle faringee.
v, *v*) Seconde branche delle mascelle faringee.
w, *w*) Branche inferiori delle mascelle faringee.
x) Cartilagine luguliforme.
z) Sua appendice cartilaginea triangolare.
Z, *Z*) Raggi branchiali degli archi ioidei.

Tav. IX. *Squalina vulgaris*.

Fig. 1. Estremità anteriori.
A) Cintura toracica.
a, *a*) Suoi rami piramidali.
b, *b*) Articolazioni delle pinne.
c, *c*) Cartilagini basilari anteriori delle pinne.
d, *d*) Cartilagini » medie delle pinne.
e, *e*) Cartilagini » posteriori delle pinne.
f, *f*) Raggio anteriore delle pinne.
g, *g*) Cartilagini quadrangolari.
h, *h*) » quadrate.
i, *i*) » trapezoidali.
j, *j*) Serie di cartilagini parallelogrammiche.
k, *k*) Serie » » decrescenti.
l, *l*) Primi raggi bacillari.
m, *m*) Catena di quattro piccole cartilagini trapezoidali decrescenti.
n, *n*) Prima serie di raggi bacillari.
o, *o*) Seconda » » » »
p, *p*) Terza » » » »
q, *q*) Quarta » » » »
r, *r*) Catena delle tre cartilagini intere decrescenti.
s, *s*) Quattro serie di raggi bacillari decrescenti.
t, *t*) Ultimo raggio interno.

Fig. 2. Estremità posteriori.
A) Cartilagine orizzontale arcuata.
B, *B*) Cartilagini a scimitarra.
C, *C*) Striscie cartilaginee orizzontali.
D, *D*) Raggi delle pinne.

Tav. X. *Alopias Vulpes*.

Fig. 1, 2, 3. Il cranio coll' apparato della masticazione, l'apparato branchiale e l' intera colonna vertebrale veduti in profilo.
a) Corpo della prima vertebra cervicale.
b) Archi vertebrali superiori conici.
c) Cartilagini intercrurali a margini paralleli.
d, *d*) Cartilagini » ellittiche.
e, *e*) » » eguali agli archi vertebrali superiori.
f, *f*) Processi trasversi.
g, *g*) Cartilagini intercalari semiellittiche.
h, *h*) » » quadrilatere.
i, *i*) Rudimenti di costole.
j, *j*, *j*) Basi ellittiche dei processi trasversi.
k, *k*) Canale pei vasi caudali.
l, *l*) Processi trasversi formati ciascheduno da due pezzi ellittici.
m, *m*) Processi spinosi inferiori.
n, *n*) » » che mancano dei pezzi ellittici.
o, *o*, *o*, *o*) Portatori dei raggi superiori della pinna caudale.
P) Apparato branchiale.
Q) Raggi branchiostegli.
r) Padiglioni nasali.
s) Orbita.
t) Articolazione col sospensorio.
u) Meato auditivo esterno.
U) Apparato della masticazione.

V) Pinna dorsale.
v) Prima serie di raggi.
w) Serie super. della prima serie.
x) Serie inferiore della stessa.
y) Seconda serie di raggi.
z) Porzione posteriore di quella.

Fig. 4. Il cranio veduto dall' alto.
a) Eminenza ellittica.
b) Fontanella.
c, *c*) Striscie superiori dello scheletro del muso.
d) Striscia inferiore dello scheletro del muso.
e, *e*) Padiglioni nasali.
f, *f*) Forellini che mettono nella cavità craniale.
g, *g*) Ali proteggenti le orbite.
h) Infossatura.
i, *i*) Eminenze degli organi auditivi.

Fig. 5. Il cranio veduto alla base.
a, *a*) Padiglioni nasali.
b) Stringimento della base del cranio.
c, *c*) Fori che conducono nella cavità craniale.

Fig. 6. Un pezzettino della cartilagine pavimentosa osservata sotto forte ingrandimento.
a, *a*, *a*) Forellini maggiori fra i dischetti.

Fig. 7. Sezione verticale all' asse d' una vertebra.
a) Foro di comunicazione fra le due cavità coniche.
b,*b*) Sepimenti alternanti di sostanza ossea e cartilagine jalina.
c) Archi vertebrali superiori
d) » » inferiori.

Fig. 8. Sezione parallela all'asse del corpo d' una vertebra.
a) Canaletto di comunicazione fra le due cavità coniche.

Tav. XI. *Alopias Vulpes*.

Fig. 1. Apparato della masticazione, archi ioidei e apparato branchiale.
A, *A*) Mascelle superiori.
a, *a*) Eminenze dei margini superiori delle stesse.
B, *B*) Mascelle inferiori.
b, *b*) Articolazione col sospensorio.
c, *c*, *c*, *c*) Denti.
C) Copula.
d, *d*) Sospensorii.
e, *e*) Archi dell' ioide.
f, *f*) Primi archi branchiali.
g, *g*) Seeondi » »
h, *h*) Terzi » »
i, *i*) Quarti » »
j, *j*) Branche inferiori dei seeondi archi branchiali.
k, *k*) Branche inferiori dei terzi archi branchiali.
l, *l*) Branche inferiori dei quarti archi branchiali.
m, *m*) Branche superiori » » archi branchiali.
n, *n*) Mascelle faringee.
o) Cartilagine congiungente.

Fig. 2. Estremità anteriori.
A, *A*) Due cartilagini che formano la cintura toracica.
a) Loro congiungimento in chiglia.
b, *b*) Cartilagine basilare esterna.
c, *c*) » » intermedia.
d, *d*) » » interna.
e,*e*) Suo ingrossamento terminale.
f, *f*) Cartilagine terminale.
g, *g*) Raggio esterno unico.
h, *h*) Prima serie dei raggi delle pinne.
i, *i*) Seeonda » » » » pinne.
j, *j*) Terza » » » » pinne.

Fig. 3. Cintura toracica veduta di dietro.
A, *A*) Le due cartilagini formanti la cintura toracica.
b, *b*) Impressioni digitiformi.
Fig. 4. Estremità posteriori.
A) Pelvi.
B, *B*) Cartilagini verticali a scimitarra.
c, *c*) Prima serie di raggi.
d, *d*) Seconda serie di raggi.

Tav. XII. *Scyllium stellare*.
Fig. 1, 2. Il cranio, l' apparato della masticazione e branchiale, non che la colonna vertebrale veduti in profilo
a, *a*) Archi vertebrali superiori.
b, *b*) Cartilagini intercrurali.
c, *c*) Pezzi impari lenticolari.
d, *d*) Processi trasversi triangolari.
e) » » ad Y.
f) » » colla branca posteriore più lunga.
g, *g*) Processi spinosi inferiori.
h, *h*) Raggi del lembo superiore della pinna caudale.
i) Padiglioni nasali.
j) Orbite.
k) Articolazione del sospensorio.
L) Prima pinna dorsale.
m) Sua prima serie di raggi.
n) » seconda » » »
o) » terza » » »
p) » quarta » » »
Q) Seconda pinna dorsale.
R) Pinna anale.
s) Sua prima serie di raggi.
t) » seconda » » »
u) » terza » » »
V) Bocca con la lingua.
X) Apparato branchiale.
Fig. 3. Il cranio veduto dall' alto.
a) Eminenza ellittica.
b) Scheletro del muso.
c, *c*) Incisioni semilunari laterali anteriori.
d) Fontanella.
e, *e*) Fori comunicanti colle orbite.
f, *f*) » » colla cavità craniale.
g, *g*) Incisioni piccole laterali.
Fig. 4. Il cranio veduto alla base.
a, *a*) Narici.
b, *b*) Espansioni che proteggono inferiormente le orbite.
c, *c*) Cavità glenoidali.
d, *d*) Fori di comunicazione colla cavità craniale.
Fig. 5. Apparato della masticazione, ioideo e branchiale.
A, *A*) Mascelle superiori.
a, *a*) Loro articolazioni colle inferiori.
B, *B*) Mascelle inferiori.
b, *b*) Articolazioni dei sospensorii.
C) Copula.
c, *c*) Sospensorii.
d, *d*) Archi ioidei.
e, *e*, *e*, *e*, *e*, *e*) I primi tre archi branchiali.
f, *f*) Branche superiori dei quarti archi branchiali.
f', *f'*) Branche inferiori degli ultimi tre archi branchiali.
g, *g*) Branche superiori delle mascelle faringee.
g', *g'*) Branche inferiori delle mascelle faringee.
h) Cartilagine congiungente.
Fig. 6. Estremità anteriori.
A) Cintura toracica.
a, *a*) Eminenze alle quali si attaccano le pinne.
c, *c*) Cartilagini basilari esterne.
d, *d*) » » intermedie.

e, *e*) Cartilagini basilari interne.
f, *f*) » congiunte alle basilari esterne.
g, *g*) » suddivise come le dita della mano.
h, *h*) » terminali.
i, *i*) Prime serie di raggi.
j, *j*) Seconde » » »
k, *k*) Terze » » »
l, *l*) Quarte » » »

Fig. 7. Estremità posteriori.
A) Pelvi.
B, *B*) Cartilagini verticali a scimitarra.
c, *c*) Prime serie di raggi.
d, *d*) Seconde serie di raggi.
e, *e*) Cartilagini terminali.

Fig. 8. Sezione d' una vertebra verticale all' asse.
a) Forellino di comunicazione fra le due cavità coniche.
b) Nucleo cartilagineo nel braccio superiore della croce ossea.
c) Archi vertebrali superiori.
d) » » inferiori.

Fig. 9. Sezione d' una vertebra parallela all' asse.
a) Comunicazione fra le due cavità coniche.

Fig 2.

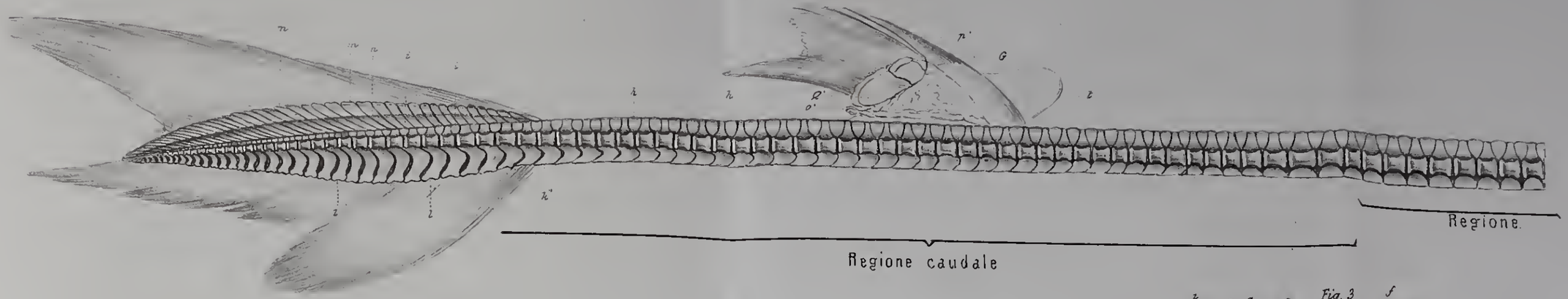


Fig. 4.

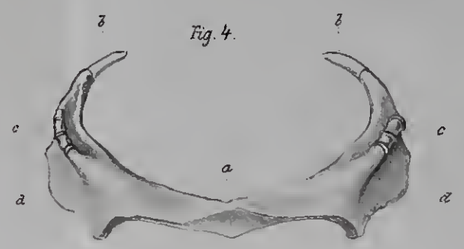


Fig. 3

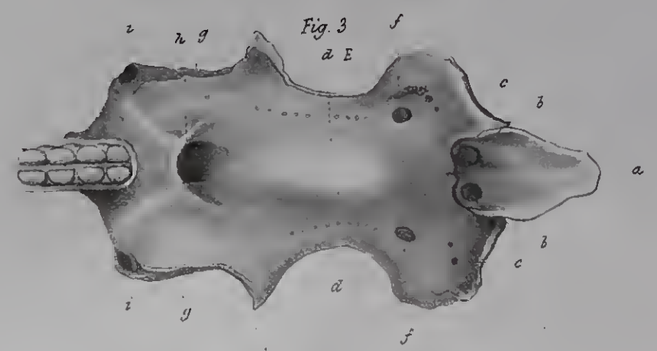


Fig. 5.

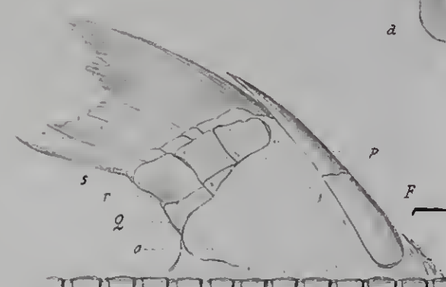
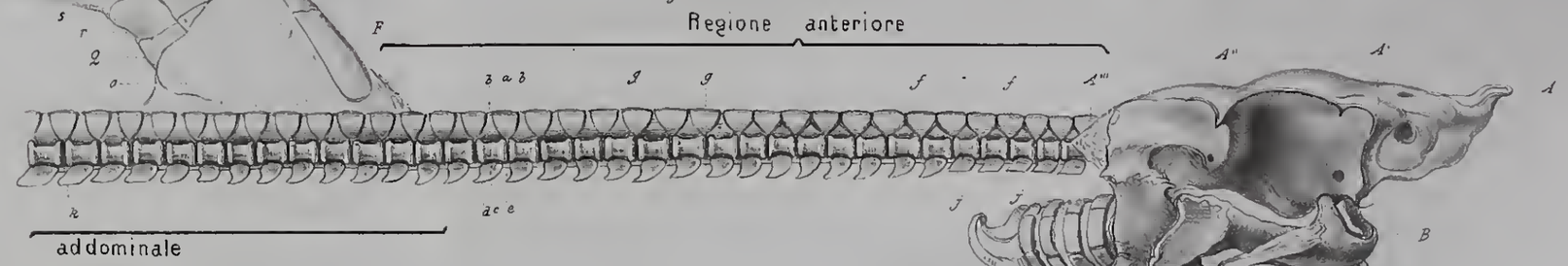


Fig. 1.



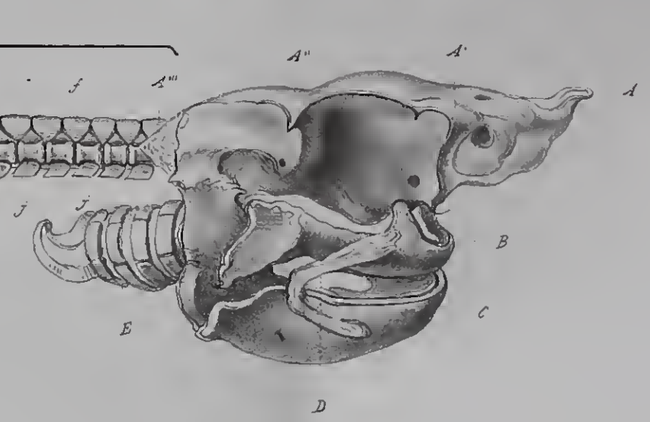


Fig. 6.

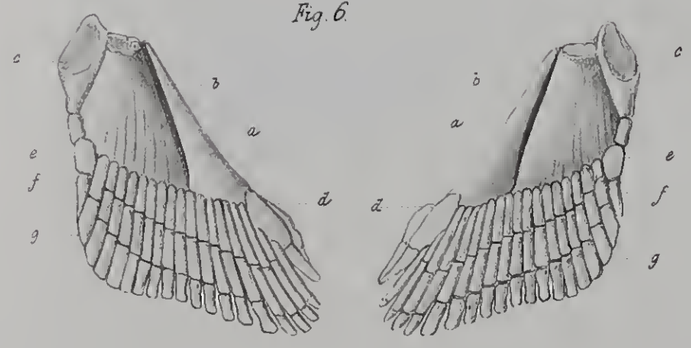


Fig. 7.

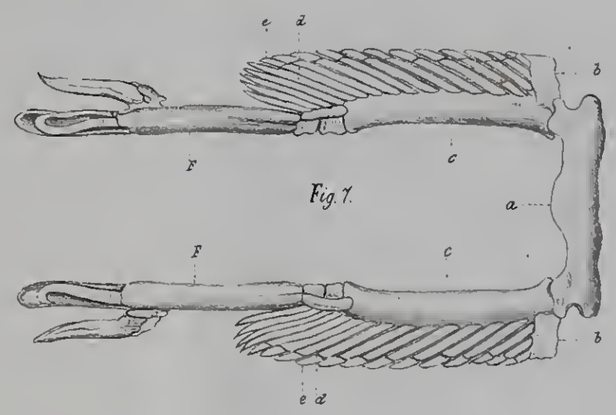


Fig. 8.

Fig 9

Fig. 5

Fig. 2.

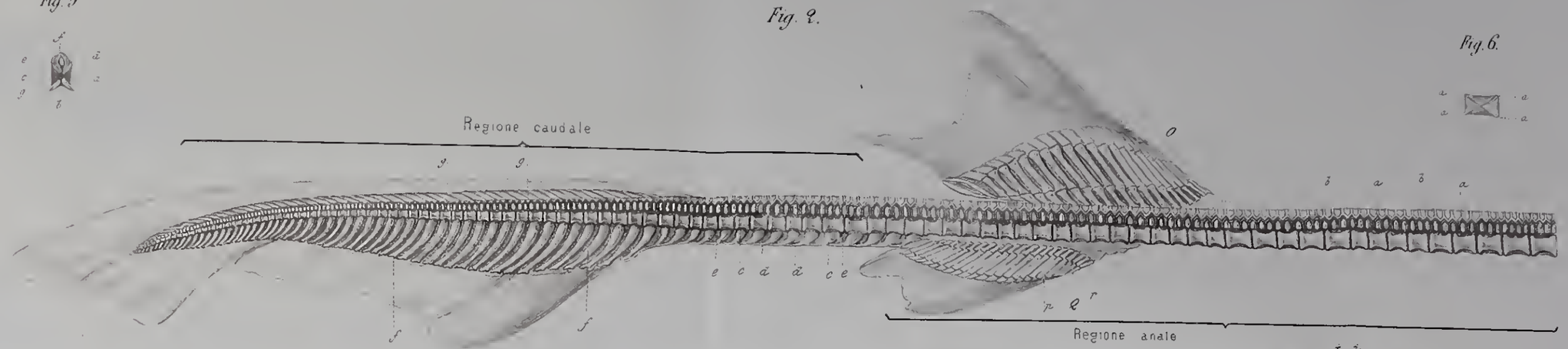


Fig. 6.

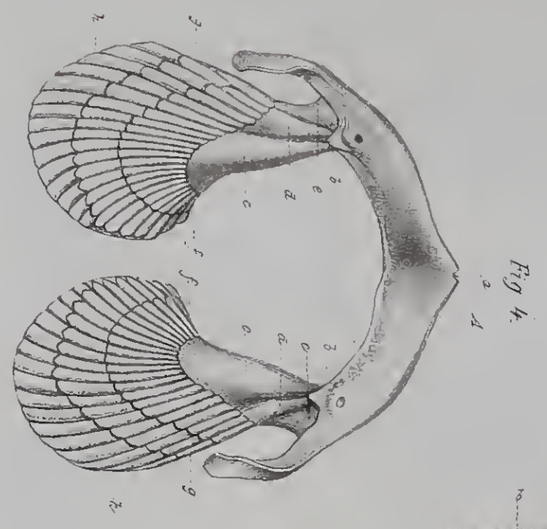
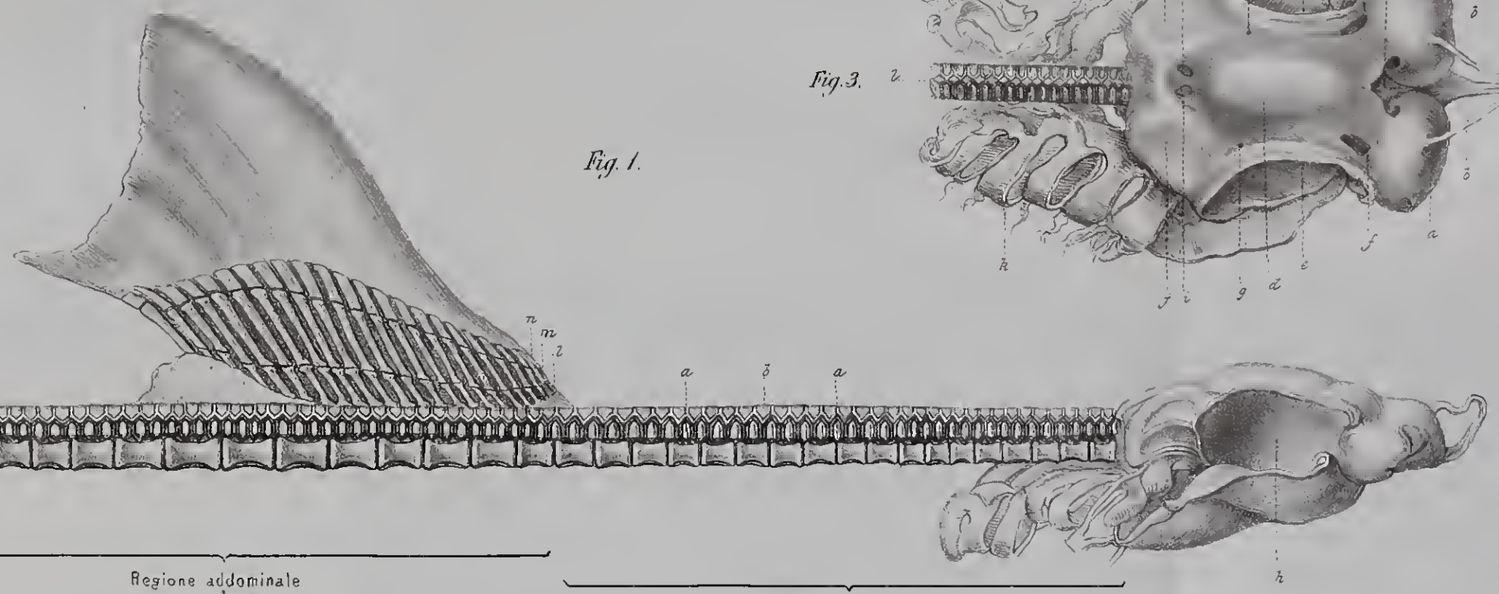


Fig. 4.

Fig. 1.



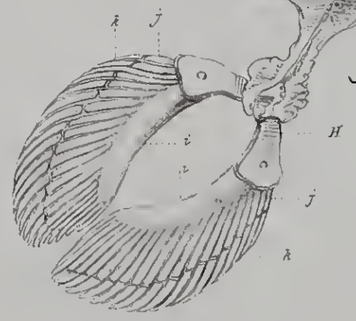


Fig. 3.

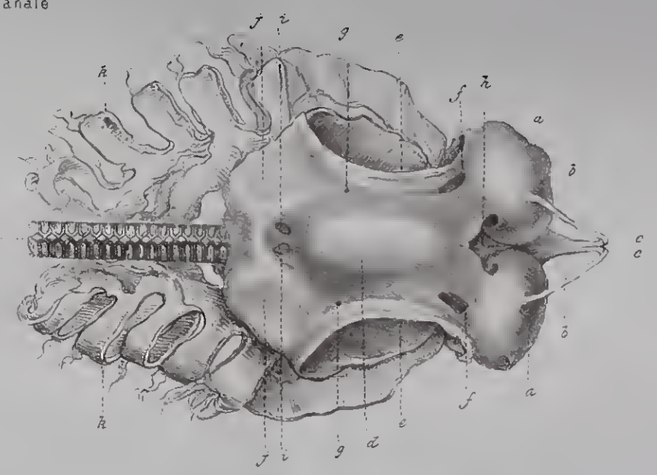


Fig. 2.

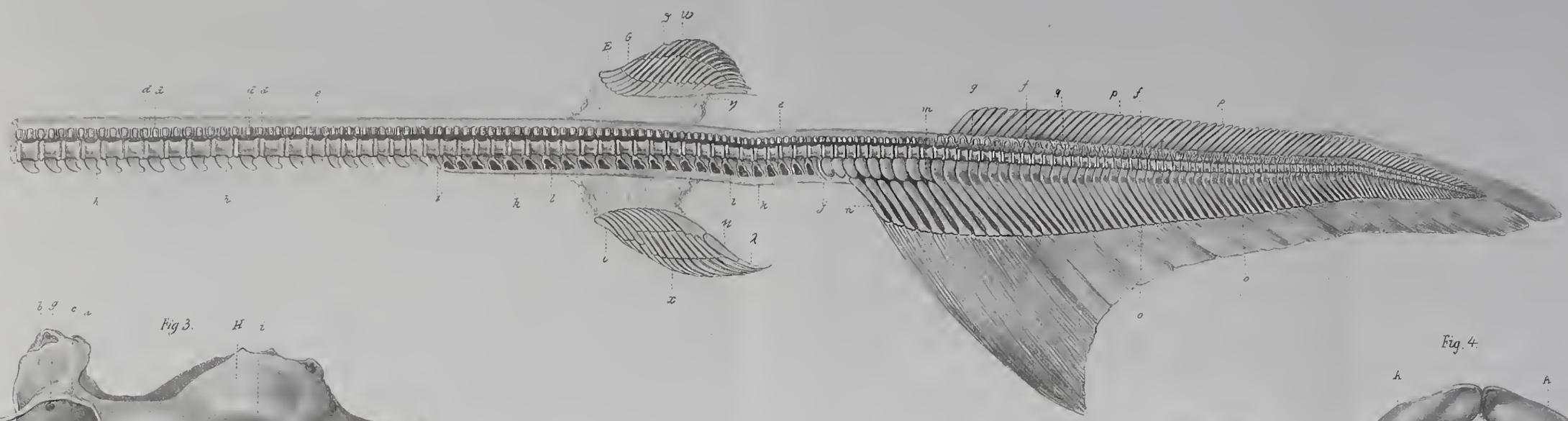


Fig. 3.

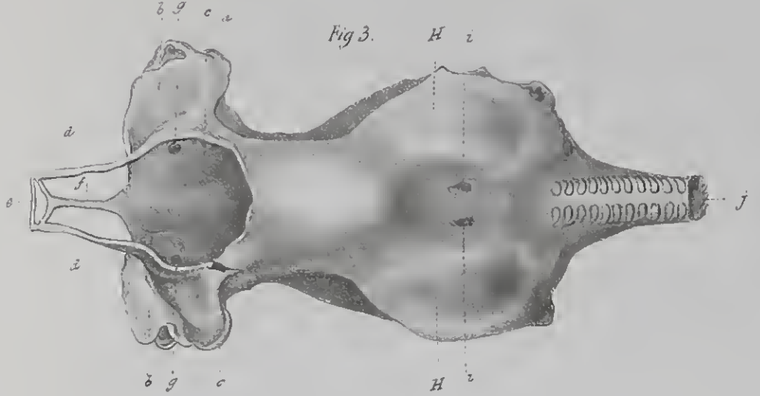


Fig. 1.

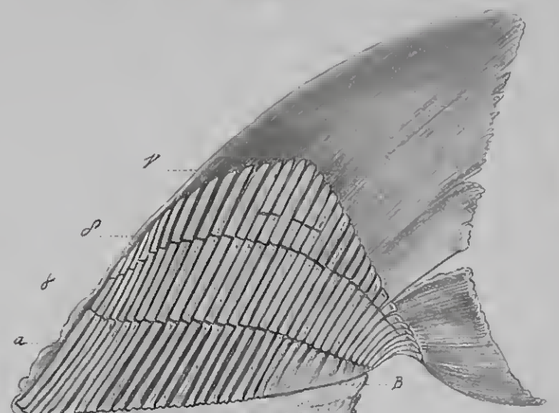


Fig. 4.

Fig. 5

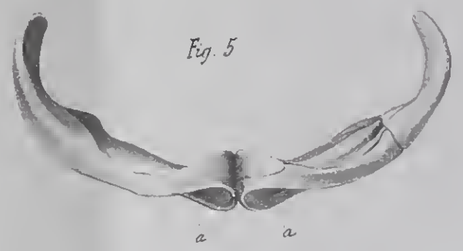


Fig. 6.

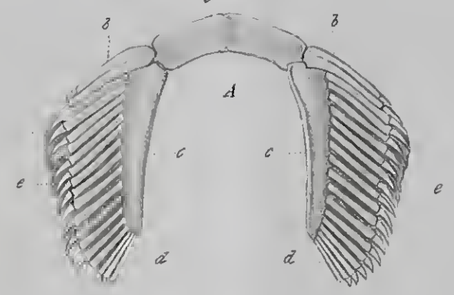


Fig. 7.

Fig. 8.

Lazo dis.

Venezia pr. Lit. Fontana

Fig. 1.

Fig. 2.

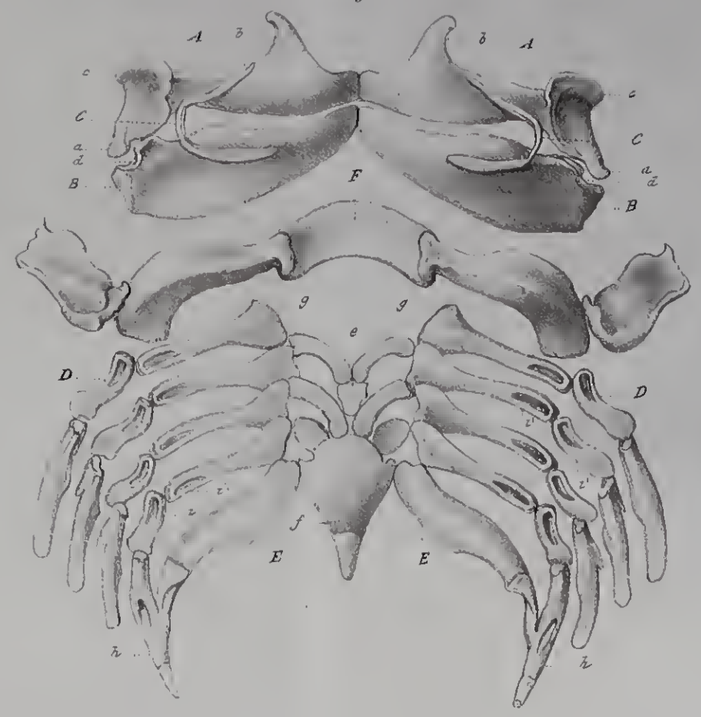


Fig. 3

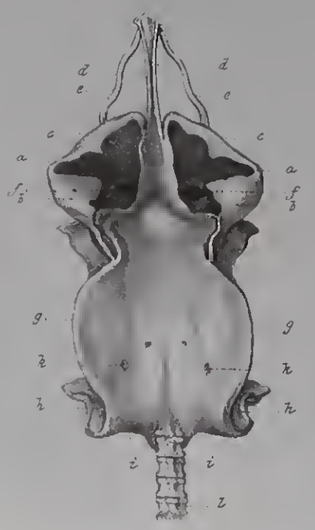


Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 6.

Lago dis.

Fig. 1.

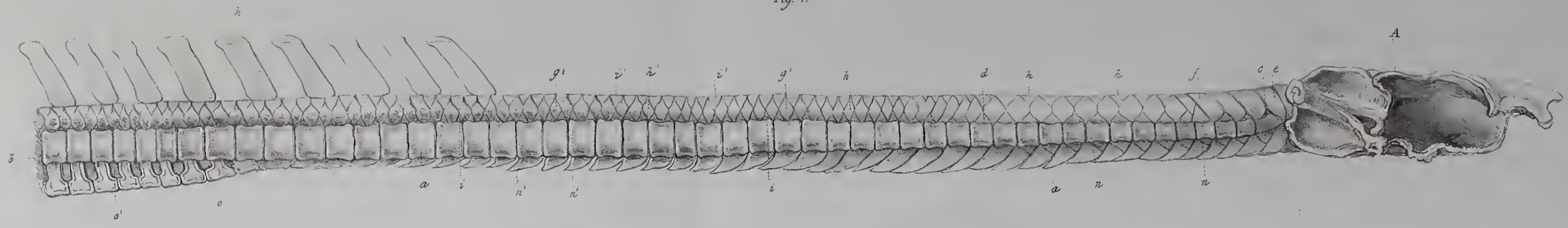


Fig. 4

Fig. 3.

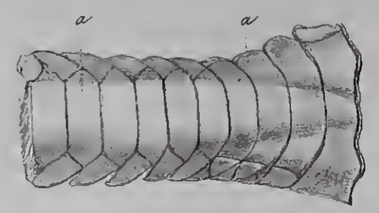


Fig. 5.

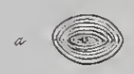


Fig. 6

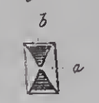
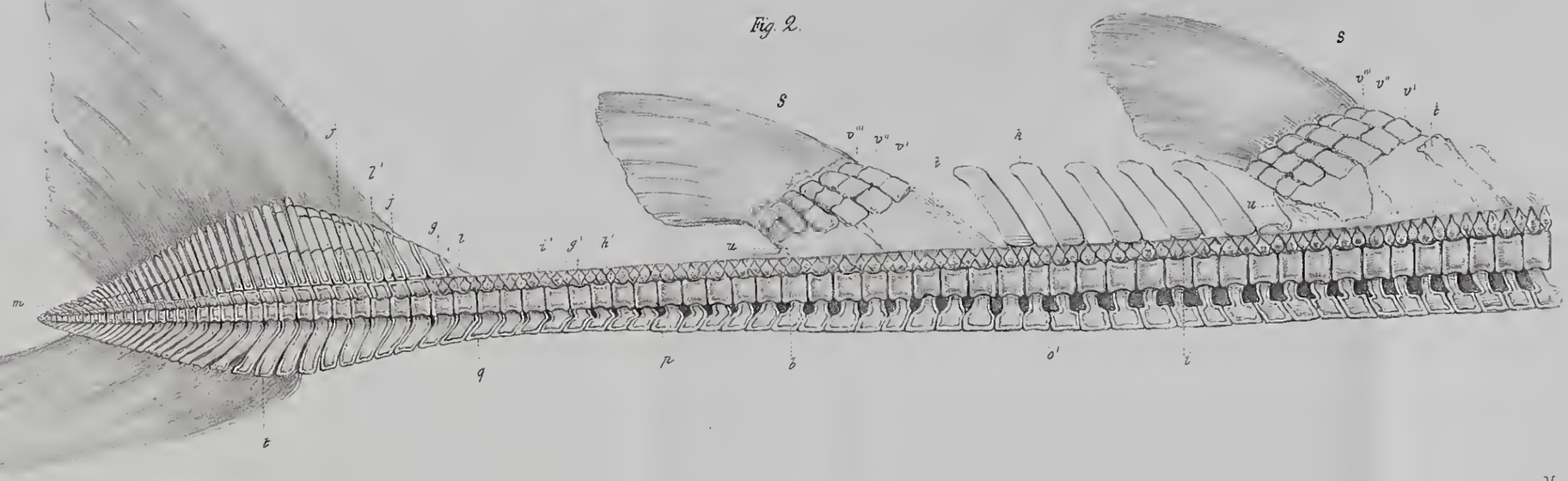


Fig. 2.



Lego dis.

Venezia Fr. Lit M Fontana

Fig. 1

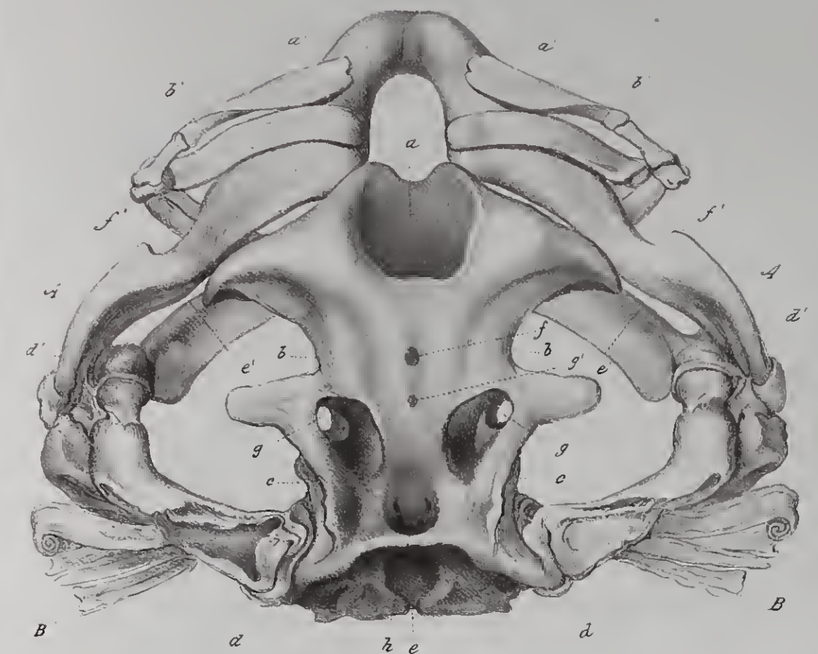


Fig. 2

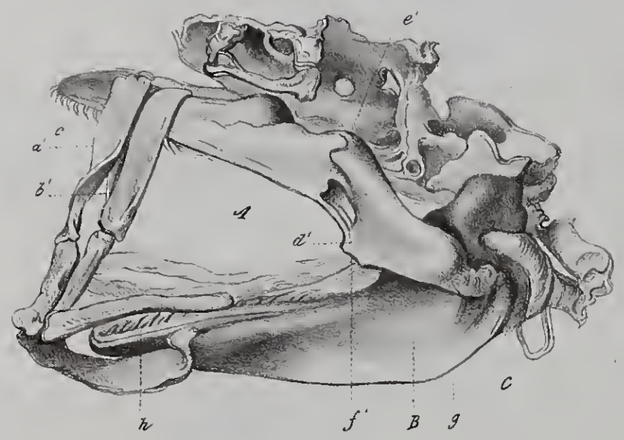
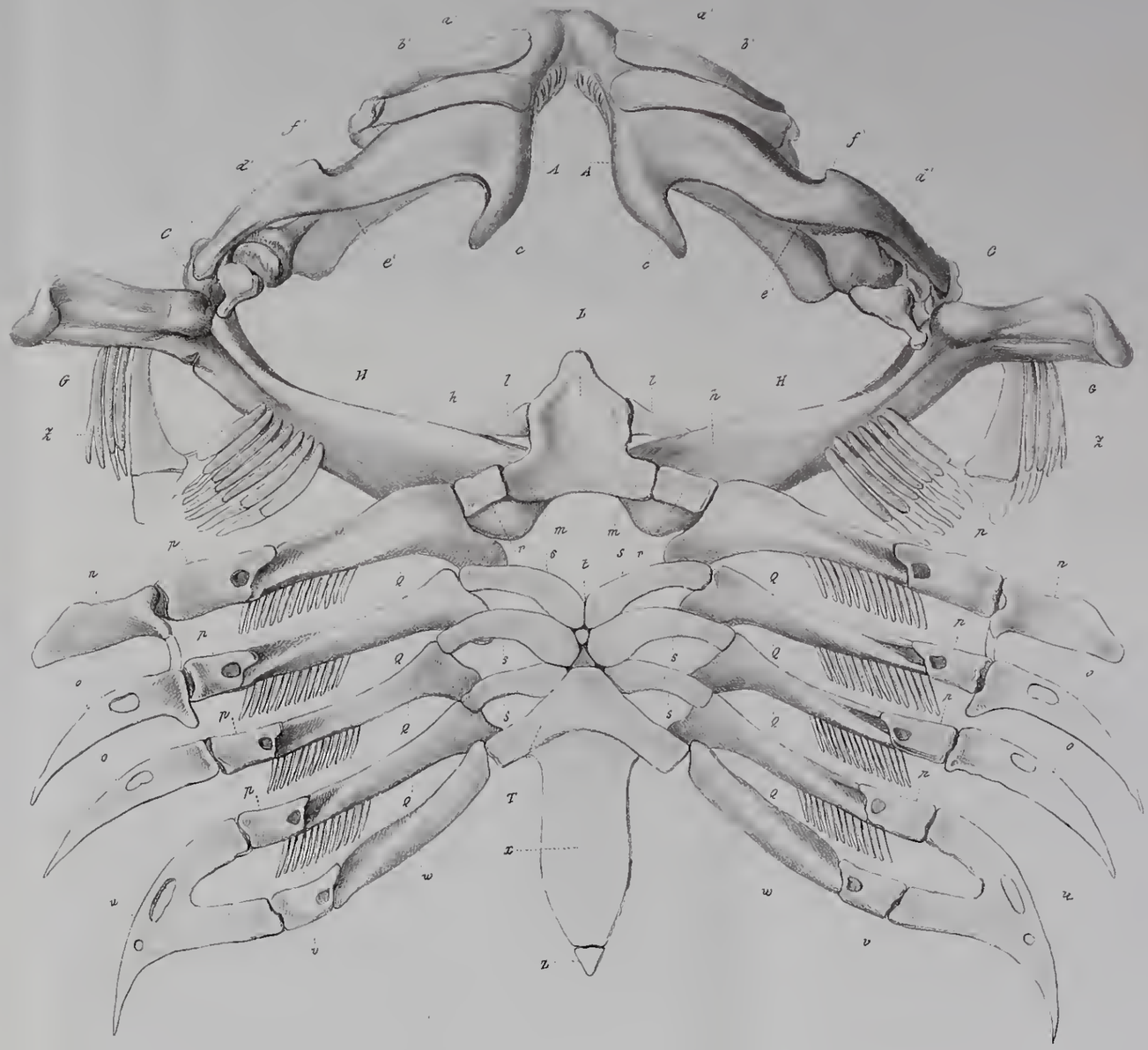


Fig. 3



Venezia pr. Lit. Fontana

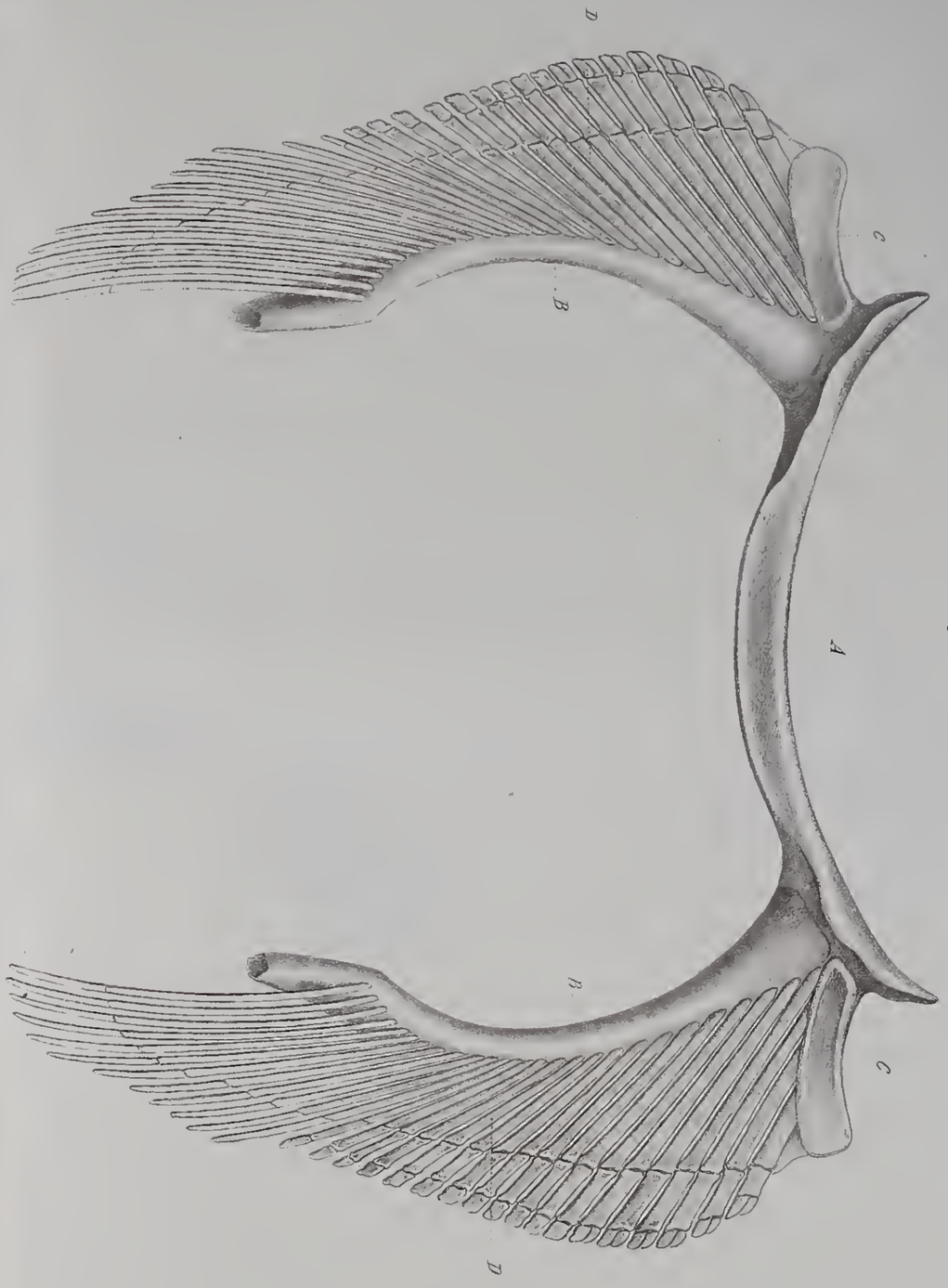


Fig. 2.

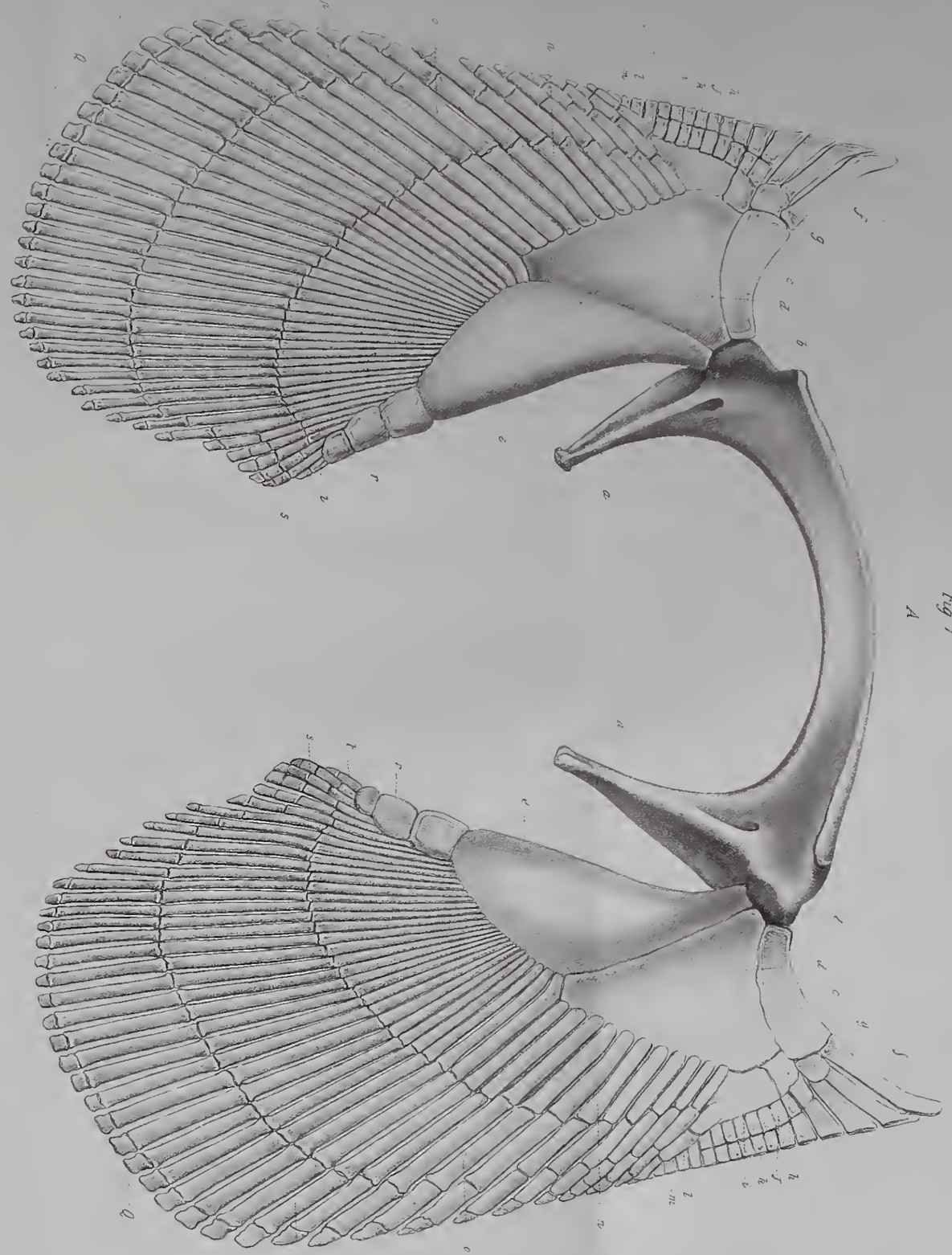


Fig. 1.

Venezia pr. Lit. Fontana

Fig. 7.

Fig. 6.

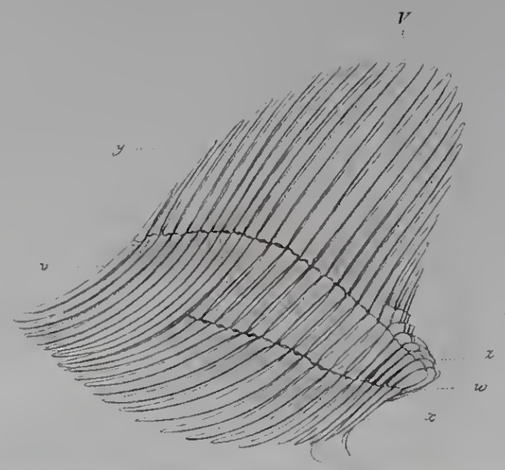


Fig. 8.

Fig. 1

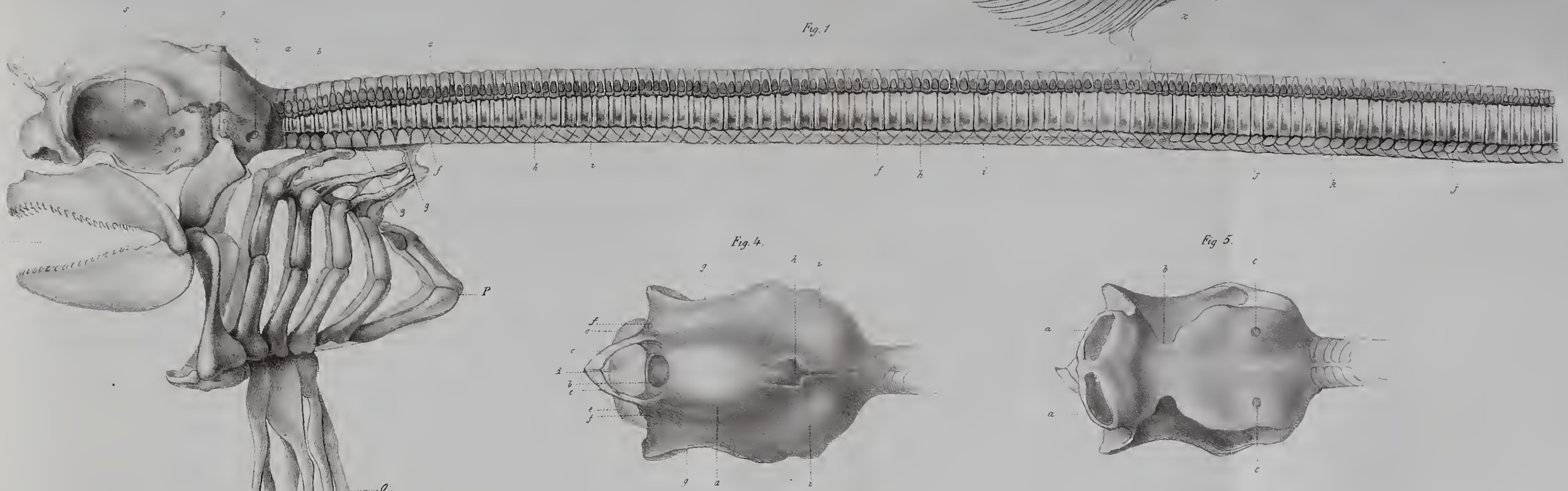


Fig. 4.

Fig 5.

Fig. 3.

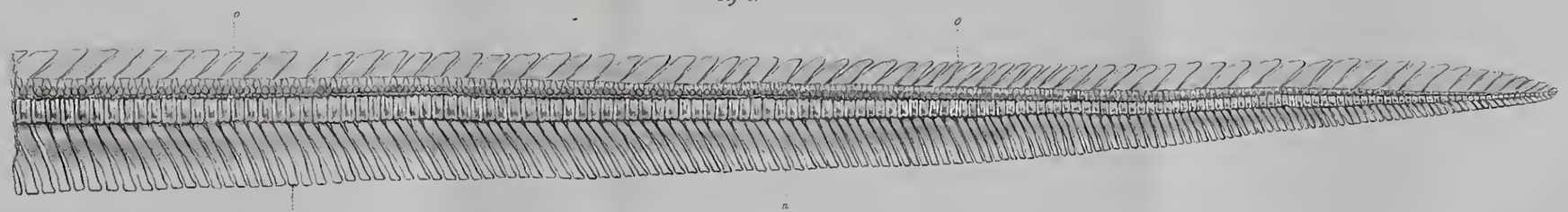
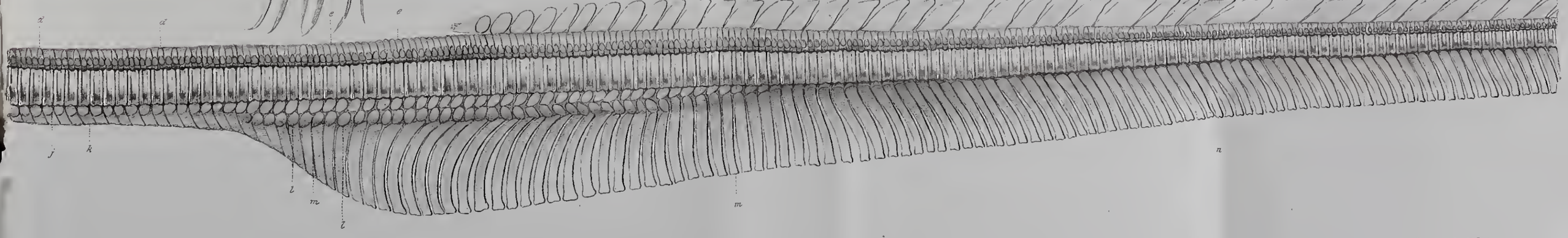


Fig. 2.



Venezia per Lit. M. Fontana

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.

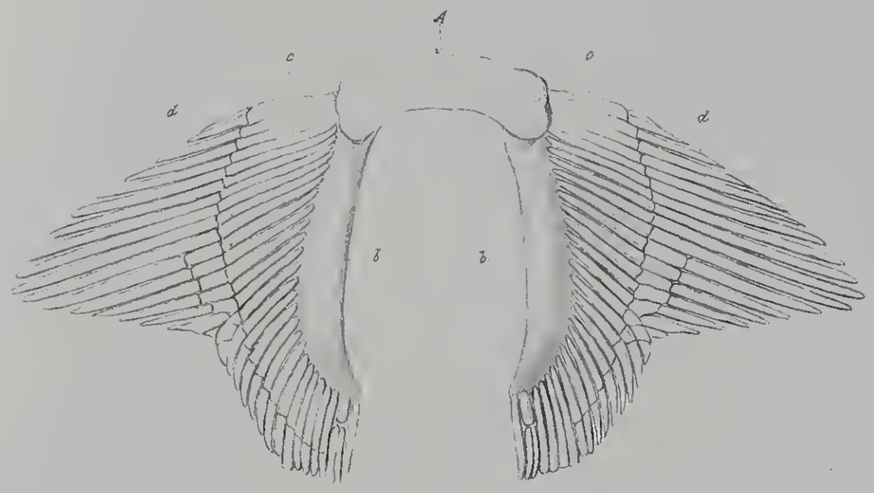


Fig. 3.

Lago dis.

Venezia Pr. Lit M. Fontana.

Fig. 1.

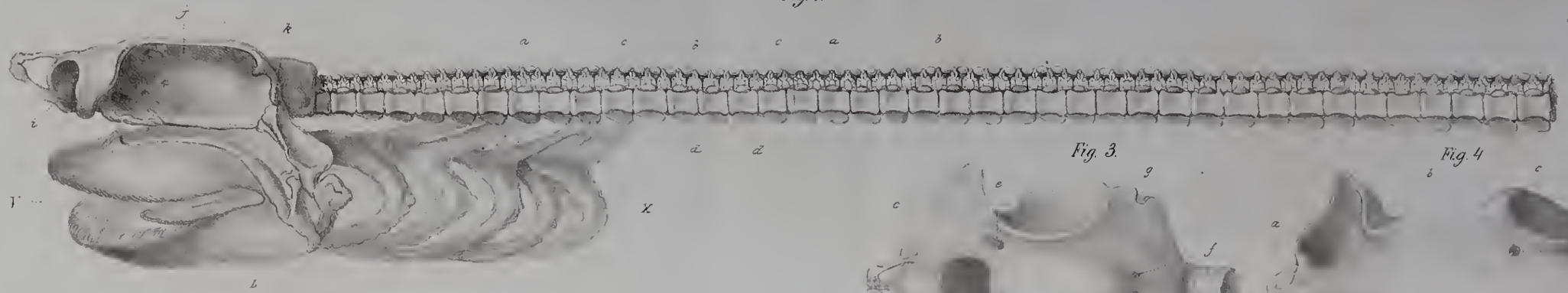


Fig. 2.

Fig. 3.

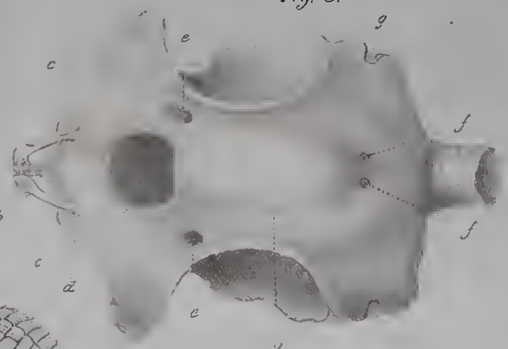


Fig. 4

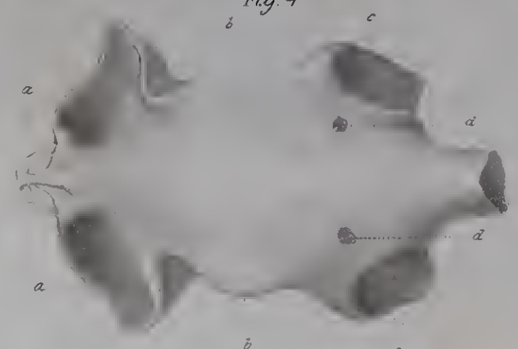


Fig. 5.

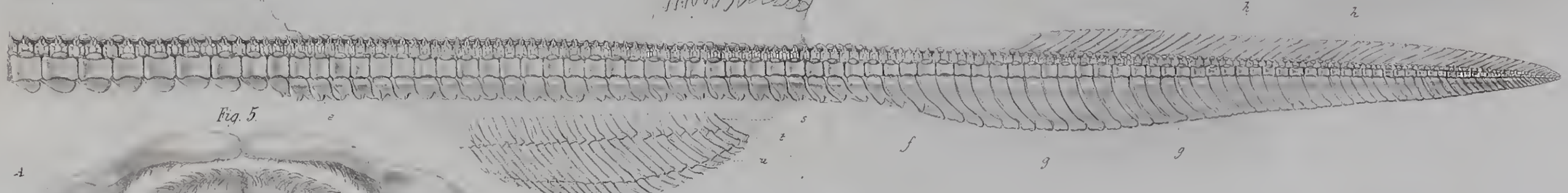


Fig. 6.

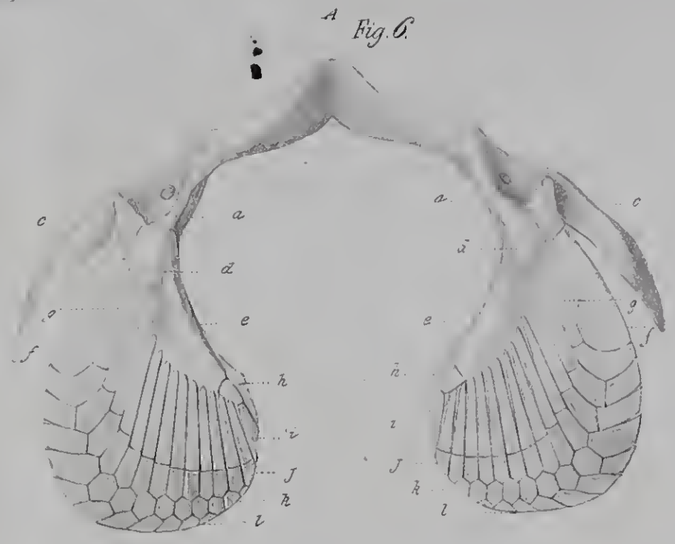


Fig. 7.

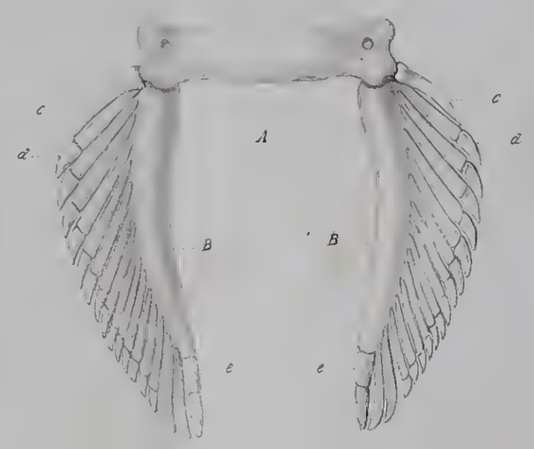


Fig. 8.

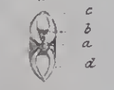


Fig. 9.

Venezia Pr. Lit. M. Fontana

DELL' APPLICAZIONE

DELLA

STORIA NATURALE DELLE LINGUE

ALLE INVESTIGAZIONI

DELLA STORIA DELLE NAZIONI

DEL

S. C. DOTT. PAOLO MARZOLO

Gli uomini dei tempi civili trovansi in mezzo ad una quantità di circostanze preparate da tutte le età che li precedettero, e appena uno fra mille sente la curiosità di sapere le cause di questa o di quella condizione del vivere attuale. Che se si volga ad interrogare chi egli stima saperne più di lui, non gli mancano risposte fabbricate a suo uso, protette dall' asprezza degli studii che si esigono per giudicarle, e più di tutto dal rischio di erigersi a contraddirle. In questo modo si stabilì impunemente tra favole speciose quella storia di scuola e di conversazione ridotta a varie maniere ideali o sceniche, o direi esercitazioni di stile, spesso a dispetto della realtà di ciò che avvenne, e quasi sempre col silenzio di tanti fatti, la cui sintesi potrebbe avere un' utile applicazione per definire le leggi della sociabilità. Ma la storia già da qualche tempo va trasformandosi da ricreazione letteraria in scienza severa, tale che togliendo la vernice a brillanti fantasie si comporta in riguardo alla storia letteraria come le scienze naturali alle arti del disegno che, essendo affatto straniere alla realtà della natura e della vita, la mentiscono; mentre quelle rivelando l' entità fisica hanno tanta benemerenza nei miglioramenti ai quali siamo giunti. La storia non mira più a riferire soltanto i varii drami dell' umanità più rumorosi e solenni, ma sì investiga gli elementi e le precedenze di ciò che successe dietro la scena, prima dello spettacolo. L' interesse della curiosità storica è tutt' altro da quello che

era. I cataloghi dei dinasti, le somme e sottrazioni di provincie a dati tratti topografici, esito frequente di massacri dei nostri simili, le vicende degli stati si pongono a calcolo come momenti d' opportunità pel processo intestino dell' umana famiglia; ponno servire come segni negli spazii del passato per orizzontarsi; ma ciò che preme è la sorte toccata alla nostra specie, e come pervenne alla condizione attuale. Ed ai nostri tempi tanto più urge di conoscere e di fissare la storia di ciò che fu dell' uomo, in quanto che pel continuo progresso delle arti, delle quali egli approfitta, è ridotto irriconoscibile da quello che fu in origine, così che il fatto che il dandy di Londra e l' élégant di Parigi sieno omogenei cogli antichi abitatori delle selve d' Europa ha bisogno di dimostrazione. Dove si arresterà la metamorfosi dell' uomo, se seguiti il progresso in proporzione dell' attuale suo impulso! Ma in sì lungo evo indefinito ed in tanta superficie terrestre occupata dalle umane famiglie è egli possibile di credere sinceramente che l' investigazione riesca? A fronte di questo dubbio ci conforta una sentenza preziosa conservataci tra i frammenti di Polibio, che si deve considerare come il risultato di prove presentatesi a lui stesso in una vita consacrata alla ricerca ed alla narrazione di umani avvenimenti. In questa sentenza egli si mostra persuaso che la verità vinca ogni cosa (1), convinzione che s' accorda col senso comune dei Greci espresso nel nome stesso ἀλήθεια, che cioè non può stare nascosta.

Che se si consideri il processo per cui la verità viene a rivelarsi, la sentenza di Polibio poggia sopra la legge assoluta dell' esistenza, per cui non si danno due cose assolutamente uguali; di più, oltre la differenza intrinseca, si aggiunge una condizione estrinseca di discernibilità, cioè il posto che ogni cosa occupa, se pure non può quello essere tenuto contemporaneamente da un' altra, poichè « in tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem situs locantur universa (2). » Nella storia dell' umanità, l' esame è favorito dalle tante opere dell' uomo, superstiti agli individui ed alle generazioni, tra le quali scrutando devesi giungere a secernere quest' elemento di distinzione che solo costituisce la certezza, prima del quale non si deve enunciare di sapere. Nell'elemento di distinzione stanno i rapporti tra causa ed effetto, onde si annodano più o meno lunghi tratti alla continuità di quanto sappiamo. Ora fra le testimonianze delle generazioni che ci precedettero, quelle delle lingue sono inevitabili

(1) Καί μοι δοκεῖ μεγίστην δεῦν τοῖς ἀνθρώποις ἡ φύσις ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν (L. XIII, Epitome).
(2) Newton.

così che non è istante del nostro consorzio in cui non occorrano all' uso. Questo documento non isfuggì agli investigatori dell' antichità, e molti v' ebbero ricorso con confidenza; ma avendo assai spesso fallito, fu rigettato, e ripreso e negletto colle vicende delle opinioni prevalenti. Che se si ricordino le espressioni di gravi pensatori in questo riguardo, trovansi in copia di quelli che se ne professano persuasi, ed altri affatto avversi; la cui autorità opposta sembrami attestare che certe parole illustrate abbiano dato senza dubbio prove degli avvenimenti, ma che d' altra parte non esistono norme sicure per l' applicazione dei dati linguistici alla storia. Così avviene in ogni altro accorgimento scientifico, che gli esperimenti ora riescono ora falliscono, per un dato tratto di tempo, cioè finchè non si arriva alla nozione esatta delle condizioni sotto le quali quei dati fenomeni si palesano.

Autori favorevoli alle etimologie ed ai dati linguistici in genere come mezzo d' investigazione storica.

Dionigi d' Alicarnasso fa rimarcare che i nomi degli stromenti, dei riti ec., servono alla storia (1).

Bacone di Verulamio: « Atque etiam hoc pacto capientur signa haud levia, sed observatu digna (quod fortasse quispiam non putaret) de ingeniis et moribus populorum et nationum ex linguis ipsorum. Equidem libenter audio Ciceronem notantem, quod apud Graecos desit verbum, quod Latinum illud *ineptum* reddat; « Propterea, inquit; quod Graecis hoc vitium tam familiare fuit ut illud in se ne agnoscerent quidem: » digna certe gravitate Romana censura. Quid illud, quod Graeci in compositionibus verborum tanta licentia usi sunt, Romani contra magnam in hac re severitatem adhibuerunt? Plane colligat quis Graecos fuisse artibus, Romanos rebus gerendis magis idoneos. Artium enim distinctiones verborum compositionem fere exigunt: at res et negotia simpliciora verba postulant. Quia Hebraei tantum compositiones illas refugiunt, ut malint metaphora abuti, quam compositionem introducere. Quinetiam verbis tam paucis et minime commixtis utuntur ut plane ex lingua ipsa quis perspiciat, gentem fuisse Nazaraeam et a reliquis gentibus separatam (2). »

(1) Lib. I.

(2) *De Augmentis Scientiarum*, Cap. I, L. VI, T. VII, p. 259.

Vico: « I parlari volgari debbon'essere i testimonii più gravi degli antichi costumi dei popoli, che si celebrarono nel tempo, ch' essi si formarono le lingue (1). »

« Lingua di ragione antica che si è conservata regnante; finchè pervenne al suo compimento, deve essere un gran testimone de' costumi dei primi tempi del mondo (2). »

Genovesi: « Nella lingua ebrea dalla forza delle parole si potrà cavare la storia degli Ebrei (3). » In quel luogo porge anche degli esempii del modo di trarre la storia dalle parole.

Abate Bergier: « L' étude des élémens primitifs du langage et la comparaison des langues peuvent servir à dissiper les ténèbres répandues sur l'histoire des anciens Peuples, et à nous faire distinguer avec plus de certitude les événements réels d' avec les imaginations fabuleuses (4). »

Voltaire: « Une étymologie bien avérée sert quelquefois à prouver les emigrations du peuple (5). »

De Brosses: « Science étymologique ..... surtout pour ce qui regarde l' histoire ancienne elle y sert d' instrument universel; comme l' algèbre et la géométrie en servent à ceux qui s' adonnent aux sciences mathématiques (6). »

Gibbon, a proposito della etimologia data da Varrone di *exercitus* ab *exercitando*, dice: « Vi sarebbe luogo ad un' opera interessante, la quale mostrasse la connessione tra le lingue e il carattere delle nazioni (7). »

Dupuis, quantunque poco fidente nelle etimologie, non le esclude. « Les étymologies ne sont qu' une partie accessoire et non la base de mon système (8). »

Cook nel suo Viaggio nel Mare Pacifico dice: « Un catalogo di parole fu raccolto ad Atooi dal signor Anderson, il quale non perdette alcuna opportunità di rendere il nostro viaggio utile a tutti quelli che si dilettano di tracciare

(1) *Scienza Nuova*, T. I, p. 126.
(2) Ivi, p. 126.
(3) *Logica*, L. V, *Ordinatrice*, § LX e seguenti.
(4) *Discours sur l' origine des dieux du Paganisme.*
(5) *Fragm. sur l' Inde* etc. T. II, p. 376.
(6) Mech., *Lang.* p. 30.
(7) *Hist. Fall.* ecc. Capo I, Nota 36.
(8) *Or.* T. VI, p. 471.

le migrazioni delle varie tribù o famiglie, che hanno popolato il globo, col più convincente di tutti gli argomenti dedotto dall' affinità delle lingue (1). »

Volney: « Un bon dictionnaire étymologique serait la plus parfaite histoire de l' entendement humain (2). »

Nodier: « Il y a tel patois en Italie qui jette plus de lumière sur l' interprétation de la loi des douze Tables que tous les livres de l' empire et de la république (3). »

Guglielmo Humboldt nella sua opera: « Ueber die Kawi-Sprache, » specialmente nella sua Introduzione, fa delle considerazioni su questi rapporti delle lingue colla storia (4).

Alessandro Humboldt, più volte nella sua celebre opera « Kosmos, » si professa credere agli argomenti tratti dalle lingue per investigare la storia. « Le questioni più importanti della storia civile dell'umanità si raggruppano alle idee di derivazione, di *comunanza di lingua*, di stabilità nella direzione originale dello spirito e dell' animo (5). » « Egli è un merito del nostro tempo, che pei brillanti progressi nella linguistica generale e comparata, colla ricerca più diligente dei monumenti e colla sicura spiegazione di quelli, lo sguardo dello storico di giorno in giorno si estende, così che un' antichità più lontana comincia a strato a strato a rivelarsi a noi (6). »

« Colla investigazione filosofica delle lingue il nostro sguardo storico si è allargato (7). »

« L' immenso regno delle lingue nel cui svariato organismo si specchiano misteriosamente i destini dei popoli, è vicinissimo ai rapporti di parentela delle nazioni (8). »

« Le lingue come prodotti dello spirito dell' umanità, come intrecciate profondamente nello sviluppo spirituale di quella, hanno un grande valore, in quanto che esse rivelano una forma nazionale, per riconoscere la somiglianza o la diversità delle razze. Esse hanno questo valore, perchè comunanza di deriva-

(1) *Voy. Pacific.* T. II, p. 250.
(2) *Ruines*, Nota 282.
(3) *Linguist.*
(4) Milman, *Nota all' asserzione di Gibbon* sopra citata.
(5) Op. c. T. I, p. 379.
(6) Op. c. T. II, p. 171.
(7) Ivi, p. 156.
(8) Ivi, T. I, p. 379.

zione conduce nel misterioso labirinto, nel quale si palesa l'intrecciamento delle fisiche (corporee) disposizioni colla forza dello spirito in forme svariate in mille maniere. Gli splendidi risultati che lo studio filosofico delle lingue fece in Germania da quasi mezzo secolo facilitano le investigazioni sul carattere nazionale delle lingue, su ciò che la derivazione sembra aver portato. Come in tutte le altre provincie della speculazione anche qui sta il pericolo della illusione unito alla speranza di un ricco e sicuro bottino (1). »

« Paragonate fra loro le lingue, e considerate come oggetti della storia naturale dello spirito, e separate in famiglie giusta l'analogia della loro intima fabbrica, sono divenute una ricca sorgente del sapere storico. Appunto perchè esse sono il prodotto della forza spirituale dell' uomo ci conducono col mezzo dei tratti fondamentali del loro organismo in un oscuro passato, tale cui non arriva alcuna tradizione. Lo studio comparato delle lingue mostra come stirpi di popolo segregate da grandi tratti di paese sono fra loro consanguinee, e sono tratte da una prima sede comune; rivela la via e la direzione di antiche emigrazioni; riconosce andando dietro le traccie dei momenti dello sviluppo, nella forma delle lingue più o meno cangiata, nella permanenza di certe forme, o nella più avanzata risoluzione e dissoluzione del sistema delle forme, quale dei ceppi del popolo è rimasto più vicino alla lingua comune che si usava nell' antica sede comune. A questa specie di ricerche sopra il primo stato antico della lingua, nel quale il genere umano viene considerato come un tutto naturale, vivente, nel senso più proprio della parola, dà frequente occasione la lunga catena delle lingue indo-germaniche dal Gange fino all'estremità occidentale ibera dell' Europa, dalla Sicilia fino al Capo Nord. La stessa storia comparata delle lingue conduce alla patria di certi prodotti che fino dai tempi più antichi furono oggetti importanti di scambio. Noi troviamo i nomi sanscriti di prodotti assolutamente indiani, quelli del riso, del cotone, del nardo e dello zucchero, passati nella lingua greca, ed in parte perfino nelle lingue semitiche (2). »

Bonald: « Le lingue saranno riguardate come gli archivii del genere umano. È questa l' opinione degli uomini più celebri (3). »

Il dottor Bartolommeo Catena in una Memoria: « Intorno alcune pratiche ed opinioni religiose dal paganesimo derivanti e modificate secondo le idee

(1) *Kosmos*, T. I, p. 384.
(2) Humboldt, *Kosmos*, T. II, p. 142.
(3) *Legisl.* T. III.

cristiane (parlando specialmente delle abluzioni sacre, delle espiazioni, dei diversi atti premessi alle preghiere ed al sacrificio) » dimostrò il vantaggio di seguire il cammino segnato dalle etimologie per far ritorno dall' astratto al sensibile, e per afferrare quel principio o storico o favoloso che spesse volte l' ombra dei secoli ci nasconde allo sguardo (1).

Galvani: « E la storia dei dialetti è o non è la storia viva delle gentilità, di modo che l' istoria etnica sia la vera face della istoria linguistica, e quest' ultima mostri essere alla sua volta come l' archivio dei documenti od il codice diplomatico di quella prima ? (2) »

« Fra le solenni parole dei linguaggi ne sono alcune che l' uomo può dire monumentali, perchè offrono in sè medesime, a chi le sappia osservare, le testimonianze di un fatto storico accaduto, di una gente esistita, di una religione accettata, di una legislazione vissuta, di una conquista fatta o patita, con altrettanta chiarezza quanta n' hanno in sè stessa i petroni dei Celti, le piramidi di Egitto, le stele di Sesostri, le are di Alessandro, gli archi, i trofei, le tombe, i fossili, i cranii, il colorito, i costumi conseguenti delle nazioni (3). »

Che anzi l' argomento delle lingue fu già applicato indipendentemente per l' investigazione della storia. Leibnitz scrisse l'opera: « De Originibus gentium ex indicio linguarum (4). » Ed Ihre : « De usu lingue Sviogothicae in illustranda gentis nostrae simplicitate (5). » e Alessandro Humboldt : « Saggio di ricerche sopra gli abitatori primitivi della Spagna col mezzo della lingua Basca (6). »

Colla stessa persuasione il signor Csomos di Horos-Rounci ungherese viaggiò in Asia per iscoprire col paragone delle lingue le relazioni dei Magyari colle orde asiatiche, colle quali esiste antichissima parentela (7).

(1) Memoria letta nell' adunanza del 19 novembre 1846 all' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti in Milano. *Gazzetta di Milano* 28 *Novembre* 1846, riportato dalla *Gazzetta Veneta*, mercoledì 1.° dicembre 1846.

(2) *Genti e Favelle It.* Pref. p. 12.

(3) Galvani, *Appendice Studio III*, *Genti e Favelle*, p. 252.

(4) *Miscellan. Berolin*, Vol. I, p. 2 ; Freret, *Hist.* T. VI, p. 233.

(5) *Diss. Fr. Infl. Ling.* p. 22.

(6) Berlino 1841, in tedesco.

(7) Jacquemont, *V. India*, T. I, p. 204. Nel 1830 erano già dieci anni dacchè egli viaggiava sotto miserabile trasvestimento sotto il nome di Secundoeur-bey, che Jacquemont traduce *Alessandro il Grande*.

Autori avversi.

Cicerone « nullum erit nomen quod non possis una littera explicare (1). »

Quintiliano additando l' etimologia ci avverte che gli ingegni spesse volte abusandone « ad faedissima usque ludibria delabuntur (2). »

Il Drusio dice degli argomenti tratti dalle etimologie « quae indocti mirantur, docti rident. » Bianchini riporta questo passo e si mostra della stessa opinione (3).

Dupuis: « L'étymologie la plus fausse de toutes les bases d'explication (4). » Per altro talvolta se ne serve, p. e., T. II, p. 465, quando dimostra l' identità d' *Isis* e di *Io* colla luna, e quando, T. II, p. 519, mostra l'identità di *Oro* col sole da אוֹר *Or* = la luce. Altrove ammette l' elemento etimologico come sussidiario nell' investigazione storica. « En général il est bon de savoir les noms de tel animal céleste dans la langue du pays, dont on explique les fables sacrées, pourvu qu' on n' en fasse pas un premier moyen d' explication, et que l' on ne se livre pas aux illusions des étymologies: ce ne doit être qu' un moyen de nous mettre sur la voie et d' éviter de longs tâtonnements dans nos recherches (5). »

Lanzi: « La etimologia quasi molle cera si piega a talento di chi la tratta, e sotto la penna di uno scrittore ella prende una figura, e una diversa successivamente e poi diversa sotto altre penne (6). » Ed in altro luogo: « Cento cervelli colle etimologie ponno fare cento versioni; e se uno vi dà dentro, non sarà effetto del metodo, ma del caso come aruspicina. Così *Arno* viene da *tortuosità* giusta Mazzocchi, da *rapidità* secondo Bardelli, e da *gregge* od *agnella* secondo il Lami (7). »

Micali si mostra sempre avverso alle etimologie, ma spesso se ne serve.

Jacquemont: « Il sanscrito non condurrà mai che al sanscrito; il meccanismo

(1) *De Nat. Deor.* III, p. 244.
(2) *Inst. Orat.* L. I, c. IX.
(3) *Istoria*, T. IV, p. 257.
(4) *Origin.* T. II, p. 266.
(5) Op. c. T. VII, *Sphère*, p. 282.
(6) P. I, c. 3.
(7) Op. c.

di questo linguaggio è mirabilmente complicato, non servì che a fabbricare della teologia, della metafisica, della storia frammischiata alla teologia ed altre frottole dello stesso genere: triplice filastrocca pei fabbricatori e pei consumatori e specialmente pei consumatori stranieri (1). »

Mazzoldi: « Aver voluto cercare le traccie della comunanza d'origine delle nazioni piuttosto nelle radici delle parole e nelle etimologie e in certe forme delle lingue tante volte alterate e mutate, che in qualunque altro elemento di prova istorica (2). »

Ed altrove: « coincidenze di suoni, di radici, di parole da cui fu infino ad ora ingannata e traviata l' umanità (3). »

Il difetto delle etimologie, considerate come documenti storici, stava nel materiale stesso di cui non si era definita la natura. Chi le adoperava non poteva rendere ragione dell' autenticità dei documenti e meno poi dimostrare la certezza dei criterii per illustrarli.

Incertezza delle parole quanto alla forma.

Oltre tutte le modificazioni delle parole subìte per processo automatico dei varii individui che le ricevono e le ripetono, vi sono quelle che ricevono per esplicita volontà. Sappiamo che i Greci riducevano tutte le parole straniere a tal forma che parevano greche; così facevano perfino ai tempi di Luciano, che parla d'uno storico che trasformava i nomi proprii dei Romani in modo che riferivano parole greche, p.e. *Fronto, nis* lo fece Φρόντιν (4). Si plasmarono di più per mala fede le parole, come era uso per espediente, onde trarsi d' imbarazzo dovendo dire qualche cosa delle origini. Dato un nome etnico o topografico se ne faceva una personificazione, dando quella desinenza che occorreva. Così i cronisti dai Cozii (Celti delle montagne del Delfinato) fecero il nome Cozio, che doveva essere stato loro re (5); e derivavano i Celti da Celtus, i Brescioni da Betrich,

(1) *Viaggi nell' India*, T. I, p. 166.
(2) *Orig. Ital.* Proem., p. 15.
(3) Ivi, p. 340.
(4) Lucian: *Quomodo conscrib. Historia.* Spanhemius, *Us. et Praet. Numism.* Diss. VIII, p. 728.
(5) Bayle, *Dict. Hist. Crit. in Nom. Hercule.*

i Velsci da Wallus, i Belgi da Balgesi, i Pannonii da Pannus (1), i Franchi da Franco che si diceva aver portato in Francia l' elmo d' Ettore, ch' era impenetrabile (2); ed Aquisgrana spiegavasi *Aquae di Grano* fratello di Nerone (3).

Incertezza delle parole in riguardo al significato.

Oltre tutti i passaggi delle parole a diverso servigio ideologico, pel loro rapporto di cenni di reminiscenze, vi fu il proposito esplicito di spiegarsi in maniera oscura ed ambigua per prudenza, specialmente nello stato di schiavitù politica, come Elvezio crede che sia avvenuto presso gli Orientali (4).

Abuso delle parole nell' applicazione alle ricerche storiche.

Non esistendo nozioni sicure della natura del linguaggio, era lasciato all' arbitrio d' ognuno di assegnare le ragioni d' origine e di valore delle parole, e così non poteva essere se non per caso che l' illustrazione cogliesse nella realtà, mentre il più delle volte gli argomenti etimologici erano favolosi.

I Greci volevano spiegare colla lingua greca le parole di qualunque altra lingua. Così Lisimaco deriva יְרוּשָׁלַם *Jeruscialáim* da ἱεροσύλα = sacrilegio, e voleva che alludesse a saccheggio dei templi, ordinato da Mosè ai suoi nell' uscir dall' Egitto (5). E le nazioni educate dalla letteratura latina traevano tutte le origini alle idee apprese nella scuola. Se fosse esistita una qualche persona storica, il cui nome somigliasse alle parole che volevano spiegare, quel nome dava l' etimologia, e con quella si fabbricava una narrazione. Così i Britanni derivavano da Bruto (trojano), che doveva aver fondato la monarchia *britanna* ai tempi di Eli e di Samuele. Su questa origine Edoardo re d'Inghilterra (1301), in una lettera a Bonifacio VIII, provava la superiorità dell' Inghilterra sulla Scozia (6).

(1) Voltaire, *Dict. Phil.* T. II, p. 426.

(2) Ivi, T. III, p. 351.

(3) Golstad cita una Costituzione di Carlo Magno in favore di questa città, dove si dice: « Vous savez que passant un jour auprès de cette cité, je trouvai les thermes et le palais que Granus frère de Néron et d' Agrippa avait autrefois bâtis. » (Volt., *Annales de l' Empire*, p. 28).

(4) Esprit.

(5) Diceva ch' erasi ridotto poi il nome a ἱεροσολυμα per evitare la ricordanza infame (Joseph. Flav. in *Apionem*, L. I, in fine).

(6) Hume, *Hist. of England* ecc. XIII, p. 154.

Vi fu un' epoca in cui prevalse la spiegazione di tutte le narrazioni antiche come allegorica. Il Vico fu tra i primi. Uno dei suoi modi era quello di cercare il significato etimologico dei nomi proprii personali figurati nei miti e da quello dedurre ciò che s' intendeva d' indicare nel mito, p. e., Teseo Θησεὺς è un tipo da θήσις (τίθημι) come la *positio* dei Latini. Anche Humboldt, persuaso che sotto i racconti mitologici si tratta talora di narrazioni fisiche, cerca il significato dei nomi proprii che vi figurano, e da questi deduce la vera nozione a cui allude il racconto, p. e. nei monti Ripei, dai quali sorte il vento, si ferma sul significato della parola Ῥιπὴ (impulsione o soffio agghiacciato) e di Βορειάς, ch' egli scioglie in β' Ὀρείας da ὄρος = monte (2). Ed è certo che la storia antica si spiega nelle sue narrazioni anche fisiche, geografiche, ecc., come se si trattasse di vicende umane, p. e. nella storia di Norvegia (anno 863) Nor re di Drontheim aveva fra i suoi antenati tre fratelli, di cui uno comandava sull'aria, l' altro sulla terra, il terzo sull' oceano; eppure fra i suoi antenati erano *Frostius* = il gelo, *Snoer* = neve, *Drifa* = uragano (3). Evidentemente queste sono le condizioni del paese di Norvegia, esposte come se si trattasse di tante persone. I primi Varegi, che vennero ad invadere la Russia per esibizione degli abitanti di Novogorod, sono tre fratelli, *Rurik* = il pacifico, *Sineous* = il vittorioso, *Trouvor* = il fedele (anno 662) (4). Questi pure sono personificazioni di qualità astratte, quali si desiderano nei dominatori. Forse si tratta di essenze ideali nei nomi dei tre re *Inge* = re di Svezia, *Magnus Barfold* di Norvegia, *Eric Eigod*, di Danimarca, al congresso di *Congelf* in Svezia; poichè si dice che *Inge* parve il più maschio (*Inge* = giovine), *Magnus* il più vigoroso (*Magnus* = grande), *Eric* il più bello (*Eric* = potente, dominatore) (anno 1060-1138) (5). Ma questo modo di spiegazione dal significato dei nomi proprii è azzardato. I nomi di persone possono accidentalmente essere significativi, e può darsi tale combinazione di eventi da potersi colla spiegazione etimologica di tali nomi congegnare un racconto verisimile. Così avvenne, p. e., nel 1757 in Inghilterra questa curiosa combinazione. Durante la guerra tra la Francia e l' Inghilterra, vi fu una nave pirata che aveva nome the *Terrible* (il Terribile): fu fornita, apparecchiata nel cantiere *Executions dock*

(1) *Asie Centr.* T. I, p. 392 e 403, e *Kosmos*, T. II, p. 421.
(2) Géffroy, *Hist. États Scandin.*, p. 54.
(3) Ivi, p. 82.
(4) Ivi, p. 97.

(cantiere dell' esecuzione, supplicio di sentenza di morte). Era comandata dal capitano *Death* (morte), il cui luogotenente chiamavasi *Devil* (Diavolo), e il chirurgo dicevasi *Ghost* (Spirito). Avendo nel giorno 23 dicembre predato un bastimento francese di guerra proveniente da S. Domingo e traendolo seco incontrò dopo una nave francese da S. Málo, detta la *Vengeance* (la vendetta), che ricuperò il bastimento francese e predò la nave pirata the *Terrible,* ridotta da 200 uomini a 26 con 16 mutilati, e la nave era così sdrucita che appena poterono trascinarla entro S. Málo (1). Non parrebbe che i nomi proprii di queste persone e dei bastimenti fossero allegorici, mitici, e si trattasse d' un mito coordinato ?

D' altronde molti nomi, che dai critici moderni si tengono per personificazioni, per monumenti incontestabili, ritenevansi in certe epoche come individui umani che realmente abbiano resistito. Nei marmi d'Arondel si mette all'anno 55 l' invenzione di Trittolemo. Si trova Ercole che viene iniziato ai misteri d'Eleusi e si stabilisce la data della presa di Troja appunto nell' anno 55 : eppure moltissimi tengono la guerra di Troja per una favola.

Altre licenze furono prese per la moltiplicità dei sensi delle parole, cogliendo quello che meglio si adattava ai proprii concepimenti. P. e. il Vico nella favola di Dafne spiega la torre, in cui era rinchiusa, per un granajo, poggiandosi sul passo: « Abundantia in turribus tuis » (2). Ma il suo testo non vale, perchè è una traduzione inesatta dell' ebraico וְשַׁלְוָה בְּאַרְמְנוֹתָיִךְ *vescialvà bearmenodéch* = e prosperità nei tuoi palagi, dove quindi non può entrare la questione del significato di granajo concesso alla torre.

La lassezza dei rapporti delle parole coi significati diede ansa a spiegare con grande latitudine i racconti antichissimi. Ognuno poteva sostituire alla semplice enunciazione, costituita dal congegno delle parole, quella intenzione che gli quadrava. Secondo il Vico, la favola di Cadmo rappresentava una storia poetica di più centinaja d' età (3). Jablonski spiega i regni dei re d' Egitto per cicli astronomici e cronologici, poichè in questo modo trovò enunciate le favole astronomiche nelle teogonie presso i Fenicii, i Frigii, gli Egizii e i Greci (4). Certo Caldei, Sciti, Celti, Etruschi, Indiani, Chinesi spiegaronsi sempre tra gli

(1) Smollett, *Hist. of England.*
(2) *Ps.* CXXI, v. 5.
(3) *Scienza Nuova,* T. I.
(4) *Pantheon Aegypt.* T. III, Prolegom., p. 42.

antichi in modo che esigeva delle conghietture assai da aggiungersi a ciò che dicevano le semplici parole (significati che sogliosi comprendere con ciò che dicesi allegoria). Anche gli Ebrei parlano traslatamente nei loro libri sacri. E gli apologhi, come quello delle piante che vogliono eleggersi un re e scelgono lo spino (1), e gli enigmi, come quello proposto da Sansone sul miele trovato nel corpo del leone (2), e i nomi di mandorlo dato ai capelli canuti, di finestre agli occhi, di mola ai denti ecc. (3) attestano l' indefinito servigio a cui si costringevano le parole. C. de Gebelin fidò così nella spiegazione allegorica che mise per canone, che tale si deve dare ad ogni racconto mitologico inconciliabile colla cronologia. Anche i recenti fecero profitto di questa licenza. Alessandro Humboldt vede nel mito d' Ercole e del fenicio Melkarth la storia di antiche emigrazioni di popoli verso l' Occidente, già confermate dalle leggende di Persiani e di Medi nell' Africa settentrionale (4), e Ottfried Müller tiene che i miti dei popoli rappresentino il tronco antico di primi accorgimenti di cosmografia e di fisica; ed altrove dice « che nei racconti mitici sono legati insieme la realtà e l'ideale, ciò che realmente è accaduto e ciò che si è pensato (5). Ma in questo modo di interpretare la storia si andò all'eccesso. Dalla necessità di ricorrere alla spiegazione per allegorie nelle cose che non si capivano, si arrivò a voler trovare l' allegoria dove la narrazione era naturale, verisimile, e concordavano tutte le circostanze per assicurare che il fatto fu secondo il significato comune delle parole colle quali era narrato. Così Michelet della storia del serpente, da cui si fece mordere Cleopatra, fa un mito, e attacca questo serpente a tutti quelli che figurano nelle più antiche tradizioni dell' Asia, al serpente d' Eva, al serpente eretto da Mosè nel deserto, ne fa un simbolo, e sembra credere che Antonio e Cleopatra siensi prestati colla loro esistenza come simboli del futuro imeneo della barbarie d' Occidente e della civiltà Orientale (6). Maniera temeraria di servirsi del lascito degli scrittori, facendo dir loro ciò che piace alla propria fantasia, e che dà campo a gran pompa di speculazioni avvolte in uno stile il cui

(1) *Judic.* c. IX, v. 8, ecc.

(2) *Ibid.* c. XIV, v. 12.

(3) *Ecclesiastes*, c. XII, passim.

(4) Humboldt, *Kosmos*, T. II, p. 435 e cita Sallustio *Bellum Jugurth.*, c. XVIII tolto dagli scritti punici di Hiempsal, e Plinio *H. N.* l. V, c. VIII.

(5) Ivi, p. 405.

(6) *Hist. Rom.*

artificio riesce a turbare la mente, senza ch' ella possa determinare il concetto che da tali frasi si vuole. Per far ragione di questi simboli, bisogna sapere cosa sono. Essi consistono in cenni più o meno bene espressi, capaci di suscitare la reminiscenza di altre cose alle quali sogliono andare uniti, e la loro origine naturale è nella scarsezza dei mezzi di esprimersi più completamente. Così un idiota, volendo accennarvi un uomo, se lo fa in disegno, s' ingegnerà con pochi tratti che appena si potrà indovinare qual figura si rappresenti, perchè meglio non può; mentre un pittore disegnerà così che ognuno a primo colpo d' occhio capisce la sua intenzione. E così esprimendosi in parole, quando la lingua è povera, bisogna che una parola serva alla meglio per indovinare il concetto: ecco il simbolo; mentre, quando la lingua è abbastanza sviluppata, si può esprimersi con molte parole, e col loro congegno con somma probabilità di essere capiti. In questa circostanza quindi il simbolo naturale è cessato: continua la lingua a spiegarsi sempre più agiatamente, nè v' è bisogno che il simbolo ricomparisca, finchè continua la civiltà e la nozione comune delle cose e dei loro segni fonetici che parallelamente mantengonsi. Può darsi un'epoca di traviamento in cui si affetti di esprimersi per simboli, quando non v' ha bisogno, come ai tempi di Filone ebreo ecc. Ma la caricatura è bene distinguibile nelle sue tendenze di misticismo o d' altra moda dal corso degli eventi che toccano all' umana famiglia secondo natura. Il Balbo vide similmente, poichè disse che « il Vico s' ingannò credendo trovar nella storia antica più simboli, più arcani, più profondità che non vi sono: anche i fatti antichi furono più semplici che non credette quel quasi seicentista della storia (1). » Il Vico non solo abusò della latitudine dei sensi delle parole, ma aggiunse quanto gli occorreva colle sue preconcette opinioni a ciò che trovava esposto nelle storie; come allora che sotto i 40 Normanni nominati nella conquista del regno di Napoli egli vuole che si intendessero anche i loro socii vassalli (2).

Una disposizione sfavorevole alla ricerca del vero nelle etimologie si è la prevenzione per una data lingua che si consideri siccome fonte assoluta di tutte le altre. Così i Greci male riuscivano nelle loro etimologie che volevano trovare nella lingua greca, mentre spesso avevano la loro ragione nelle lingue dell' Oriente. P. e., Artemidoro nel suo Oneirocriticon deriva *κάμηλος* da *κάμπτω*,

(1) Balbo, *St. Ital.* p. 384.
(2) *Scienza nuova*, T. I, p. 378.

così che volesse dire affaticato, poggiandosi sull' autorità di Eveno (1) Κάμηλος è il semitico גָּמָל *Gamal* = cammello.

Ugualmente i Latini derivavano dalla lingua latina, p. e. Varrone deriva *Palma* così: « quasi *Parilema* a pariendo. » *Palma* è una corruzione del semitico תמר *tamar* (2).

Nei tempi moderni si volle da taluno derivare ogni etimologia dal celtico. P. e. Fabbroni deriva *castellum* da *cas* (celt.) = monte, e *tall* = facile, *castellum* è il diminutivo di *castrum* (lat.), come da *plaustrum*, *plostrum*, *plostellum*: da *scalprum*, *scalpellum*.

C. de Gebelin deriva talora dal semitico parole francesi che sono corruzioni evidenti del latino, p. e. *roche* (fr.) da ראש *rosc* = capo. È evidentemente il latino *rupes* (3).

Ai nostri giorni si deriva tutto dal sanscrito, p. e. il greco κόκκυς, nome del cuculo da कुच *kuc* = risuonare (4). Il *cuculo* ebbe nome per imitazione della sua voce, spontaneamente prodotto in tante lingue diverse, e primitivo, senza bisogno di derivazione da alcuna altra lingua antica.

Un'altra prevenzione sfavorevole si è quella storica, cioè la preconcetta opinione di date allusioni nel significato delle parole.

Così Court de Gebelin volle trovare allusioni agricole nei prenomi latini che hanno tutt' altra origine, p. e. deriva: *Numerius* da *no* = frutto, *Numerius* è evidentemente derivato da *numerus*: *Caecilius* da γῆ = terra e *cei* = illustre; deriva da *caeculus*, è un patronimico, vuol dire figlio dell'orbetto:

Publius da *pou boe* = prato e *bel* = elevato: *Publius* è una forma derivata da *populus*, come *publicus* che è lo stesso che *populus*.

Per dirigersi con qualche sicurezza nella ricerca delle etimologie bisogna approfittare delle nozioni della storia naturale delle lingue.

Il primo precetto che aver si deve in mente si è quello della precedenza dei suoni ai significati, cioè si deve ricordare che significato e parola non sono contemporanei: esservi quindi parole nello stato primitivo, automatico, patetico, onomatopeico, delle quali sarebbe vano ricercare la rappresentanza ideologica: p. e.

(1) Κάμηλος διονει κάμμηρος ὡς φησῖν Εὔηνος ἐν τοῖς εἰς Εὔνομον ἐρωτικοῖς. L. III, c. 5.

(2) *t* = *p* metalepsi comunissima.

(3) *p* (lat.) si cangiò in *ch* (fr.), p. e. sepia seiche.

(4) Eichhoff, *Parallèle* etc. p. 462.

Suoni automatici.

Così si derivò *dodo* (fr.) = ninna nanna, suono con cui si addormentano i fanciulli da *du dou* = nero, notte (1).

πάπα$_{\varsigma}$ = padre da πᾶ$_{\varsigma}$, che poi si reduplicò (2).

Suoni patetici.

Joie (fr.) si deriva da *gaudere*, e da questo *jouir* (3). Si riporta per prova un passo latino in cui si vede la corrispondenza di senso tra *gaudere* e *joie*. « *Sponso ad votum gavisa non est* » *Joie* (fr.), *Gioja* (it.) derivano dal grido d' allegrezza *io io* comune ai popoli italici, come presso i Latini nell' accompagnamento dei trionfatori « *io triumphe, io triumphe* » e che si ode tutt' ora sempre dai villici del Veneto, quando sono molto allegri.

Suoni imitativi.

Huppe (fr.) = upupa si deriva da *huppe* (fr.) = fiocco (4). A ragione Nodier vede che è l' imitazione del grido di quest' uccello nominato similmente con suoni *pp* e *b* in tante lingue ἔπωψ (gr.) *upupa*, *bubbola* (it.), *popa* (port.), *Hoppe* (fiammingo), *Hoop e Hoopof* (ingl.), *Popp* (sved.).

Tenendosi sempre aderenti ai prodotti primitivi, avremo un criterio per determinare il rapporto fra due forme della stessa parola, esistenti in due lingue diverse. Così il nome *fischio* (it.) non ha bisogno di dimostrare la sua derivazione da فيش *fisc* (pers.) (5). Queste due voci sono indipendenti una dall'altra. Il persiano è primitivo onomatopeico: l' italiano conserva la traccia imitativa, quantunque derivato dal latino così: *fistula* (lat.) *fistulari*, *fistlare*, *fischiare* (it.), io *fischio*, il *fischio*. *Becco* (it.) = caprone si deriva da *Bok* (ted.) (6). Ma invece la forma primitiva è espressa nell' italiano *be*, imitazione della sua voce, mentre il tedesco non conserva questa traccia.

Così si può giudicare nel caso di somiglianza di due voci diverse, p. e.:

Cigolare (it.) si deriva da *singulare* (lat.) o *singulere* che deve aver esi-

(1) C. Geb. *Dict. Fr.* v. c.

(2) Eustath. cit. da Calep. v. c.

(3) De Brosses, *Méch. Langues*, T. II, p. 132.

(4) Belon.

(5) Borelli deriva *fischio* (it.) da *fisk* (turco).

(6) Borelli.

stito prima di *singultire* (1). *Cigolare* è una onomatopeia primitiva ridotta secondo le abitudini di verbo diminutivo in italiano, come *spigolare*, *speculare*.

Esame delle forme delle parole.

Si deve avere speciale attenzione alle varie maniere ortografiche anteriori delle parole; in quelle si trova spesso la guida all' origine etimologica, e così si evitano le seduzioni preparate dalle omofonie accidentali. Così si derivò *soudain* (fr.) da σύδην (gr.) = celeremente (2). Bastava guardare l' ortografia antica che era *soubdain*, nella quale si riconosce la corruzione di *subitaneus* (lat.). Così si derivò *Ecuyer* da *equus* (3); ma *Ecuyer* prima scrivevasi *escuyer*, come si scriveva *escu*, che ora scrivesi *ecu* = scutum, da cui appunto deriva la parola *escu*, ed escuyer è la corruzione della parola *scutarius*.

Fa d' uopo distinguere i suoni appartenenti al tema da quelli della desinenza. Così nella parola *dominus* evidentemente l' *m* appartiene al tema, come in *terminus*, *geminus* ecc. Non si potrà quindi ammettere la derivazione di *dominus* da *do* (osco) = casa, e *benus*, *bonus* = *manus* (lat.) per cui Galvani vorrebbe che *dominus* fosse = *dubenus*, *dobenus* = paterfamilias = il buono e potente della casa (4).

Similmente C. de Gebelin crede che *Damoiseau* sia costituito da *Dam* e *oiseau*, sicchè vorrebbe dire = donna uccello. La parola è una riduzione di *Dominicella* (5): *oiseau* è la trasformazione delle finali del tema *ic* e la desinenza *ella*, corrisponde ad *icella*. Così *Isabella*, divenne prima *Isabelle* e poi *Isabeau*.

Le leggi di travisamento di forma delle parole servono a restituire i prodotti di corruzione al loro tipo originale, p. e., *uscio* (it.) si deriva da *exitus* (6); ma quando si consideri che *st* (lat.) si è cangiato in *sc* (7) (it.) si vede la sua derivazione da *ostium*, come da *ostiarius* si fece *usciere*.

Le leggi abituali di modificazione secondo i varii popoli guidano a giudicare se una parola sia ricevuta da una lingua, o data da questa ad un' altra, p. e. trovasi *stiva* (it.) استو *istiv* (turco) = stiva: egli è evidente

(1) Galvani, *Genti e Favelle*, ivi.
(2) C. Gebelin, *Monde primitif*, T. V, *Dict. Etym.* L, p. 1024.
(3) De Brosses, *Méch. L.* T. II, p. 99, 100.
(4) *Genti e Favelle*, p. 158.
(5) Come da *Faeminella* (lat.), *Femelle* (fr.), *Dominicella*, *Damoiselle*, e quindi *Damoiseau*.
(6) Raynouard.
(7) *Postea* (lat.), *poscia* (it.)

che la parola passò dalla lingua italiana nella turca, non viceversa. *Stiva* è un nome formato dalla 3.ª p. sing. pr. indic. o dalla 2.ª sing. pr. imperat. di *stivare* e questo deriva da *stipare* (lat.): il *p* latino si è cangiato in *v* in italiano, come da *pauper* si fece *povero*, da *episcopus vescovo*. L' eufonia turca aggiunge una vocale e quasi sempre l' *i* o l' *e* alle parole che cominciano da *s* impura appunto come in *stiva*. Così *chef* (fr.) non si potrebbe derivare da *xefe* (sp.) (1); inversamente *xefe* (sp.) deriva da *chef* (fr.), poichè *ch* (fr.) si cangia in *x* (sp.). *Chef* (fr.) deriva da *caput* (lat.), poichè *c* (gutturale) (lat.) si cangiò in *ch* (fr.), così *canis* (lat.) divenne *chien* (fr.).

Per essere sicuri d' una etimologia, bisogna render conto della parola in questione col ceppo a cui si riferisce, non a salto dallo stipite fino alla parola data, ma sì per la gradazione di tutti i membri genealogici, da questa parola ultima per quella che immediatamente la precedette, e così risalendo fino al membro più antico; altrimenti non si potrà mai fidare nella derivazione. M. De la Ravaillère deriva *spadassin* (fr.) immediatamente dal celtico. In fatto *spatha* dicesi da Diodoro Siculo essere arma propria dei Galli (2). Ma *spatha* passò in italiano, dove divenne *spada*, e da questa si fece *spadaccia*, e da questa *spadaccino*, che per ultimo passò in Francia ed ivi divenne *spadassin*. Giuseppe Sacchi raffronta *Potel*, preside del giurì nei comuni indiani, con *Pôta* (it.), che dicesi in alcuni vernacoli d' Italia per *Podestà* (3). Può darsi che esista qualche relazione genealogica tra पति *pati* (sanscr.) = signore ed il tema latino *pot* (esse) da cui deriva la parola *Pôta* (it.). Ma *Pôta* deriva immediatamente dalla scrittura abbreviata di *Podestà* ch' era *Pot*ª (come per G. *Battista*, G. *Bat.*ª) e *Podestà* è la parola latina astratta *Potestas*, che viene da *potest* 3 p. sing. pr. indic. di *pot* esse, poi contratto *posse*.

Quando non si renda conto esatto di tutti i membri genealogici si può invertire l' ordine di derivazione. Così Varrone deriva *Tribus* così: « appellatae a *tributo* (4) » invece è *tributum*, che deriva da *tribuere* e questo da *Tribus*, le tribù da cui si esigeva. Così deriva: « *exercitus* ab exercitando. » (5)

(1) Così derivò Rapp.

(2) ἀντὶ δὲ τοῦ ξίφος σπάδας ἔχουσι μακρὰς σιδηρᾶς (L. V.).

(3) Romagnosi, *Opere*, T. II, Parte II, p. 920.

(4) Niebuhr, *Röm. Gesch.* T. II, p. 318.

(5) Varro, *L. L.* L. IV, Cic. *in Tuscul.* L. II, 37, 15.

exercitus deriva da *exerceo* e dalla forma di participio passivo *exercitum*, ed invece *exercitus* ha generato il verbo *exercito, as are.*

Nella genealogia delle parole bisogna tener conto della legge d'abitudine, per la quale si riducono alle forme già esistenti le parole nuove, secondo il bisogno di espressione: si riducono all' analogia. Si flettono quindi a dirittura dietro i modelli di flessione, di desinenza esistenti, senza passare per le gradazioni intermedie che diedero per ultimo risultato il modello a cui si riduce la parola nuova. P. e., dall' esistenza di *scoparii* (servi) (1) = scopatori, si vuole che abbia esistito il verbo *scopare* (2), che più non si trova; ma può derivare direttamente da *scopae,* senza bisogno dell' esistenza di questo verbo, come appunto da *secretis secretarius*, senza che esista un verbo *secretare.*

Così per ispiegare la parola *speme* (it.), si immaginò l' esistenza d' una forma *speramen*, da cui derivarla (3). Speme è l' ablativo *spe* (di *spes, ei*) cui si aggiunse la desinenza *me* per istinto ritmico-ideologico sopra *preme, insieme* ecc.

È da aversi in mente il passaggio delle parole a vario servigio grammaticale, il cangiamento di valore da nome a verbo e viceversa. Una data parola pertanto, che si presenta come nome, può essere quella stessa che in altra epoca od in altra lingua figura come verbo in una data condizione di persona, di tempo e di modo. Così, p. e., *congé* (fr.) fece immaginare a De Brosses la strana derivazione da *commeatus* (4) (lat.) perchè non ha riflettuto all' esistenza della parola *congedo* (it.), che è *concedo* (lat.) 1.ª p. sing. pres. indic. del verbo *concedere*, passato in italiano ad uso di nome maschile per l'accidente della desinenza in *o* propria in italiano di tutti i nomi maschili, e per l' occorrenza di espressione in valore di nome. Così Rapp deriva *deport* (fr.) da *deportatio* (lat.) (5), dove non si saprebbe render conto della perdita della desinenza *atio, onis,* nell' ablativo *atione*, la quale desinenza latina fu serbata a tutte le parole latine che con questa entrarono nella lingua francese, e restò come modello su cui si coniarono altre parole. Invece *deport* è *ego deporto* 1.ª p. sing. pres. indic. del verbo *deportare* passata appunto ad uso di nome.

(1) Ulpiano.
(2) Galvani, *Genti e Favelle It.* p. 344.
(3) Rapp. *Phys. d. Sprache,* T. III, p. 59.
(4) *Méch. Langues,* T. II, p. 119.
(5) *Physiol. Sprache,* T. II, p. 109.

Fra questi passaggi dall' uno all' altro valore grammaticale si deve porre attenzione nella lingua latina e nelle derivate da quella ai nominativi plurali degli aggettivi neutri che, per la desinenza in *a*, che è propria anche dei nominativi femminili singolari, passarono appunto a questo valore. Così, p. e., *Inopia*, *ae* è il nominativo neutro plurale dell' aggettivo *inops*, *is* passato ad uso di sostantivo con desinenza astratta. Non pensando a questa continuità naturale, si andò a cercare l' origine d' *Inopia* dal greco ἐ'πανία (1), che non si saprebbe in alcun modo dimostrare (2). Così *Forza* (it.) è il neutro plurale (lat.) di *fortis*, e, *fortia*, passato a sostantivo sing. fem. appunto con valore astratto. Rapp, non accorgendosene, immaginò l' esistenza della parola *Fortitas* per derivare da quello *Forza* (it.) (3), la qual forma, se avesse esistito, avrebbe potuto dare in italiano *Fortitate*, *Fortitade* e *Fortità* (4) ma mai *Forza*.

Questo criterio del passaggio delle stesse forme a varii servigi grammaticali farà trovare la naturale continuità, dove la serie genealogica sembrerebbe troncata.

Criterii sui significati.

Siccome l' origine dei significati delle parole è nell' allusione a fatti sensorii, se una parola riferisca idee astratte, nè in quella lingua in cui esiste si trovi etimo che si riferisca a qualche oggetto sensibile, bisogna asserire che non ebbe origine in quella lingua, ma che vi fu introdotta d' altronde. Così i nomi dei numeri trovati in varie nazioni con significato astratto devono riferirsi a qualche condizione concreta esistente nelle cose, come, p. e., il numero 2 riferire parti duplici di esseri organizzati, le mani, i piedi dell'uomo, le ali nei volatili ecc., oppure una condizione del modo di succedersi delle impressioni nell'uomo, p. e. il numero 7 da שבת *sciabád* = riposo concesso il giorno dopo 6 giorni nella settimana. Le figliazioni dei sensi delle parole (5) avvenute, per necessità delle circostanze nelle quali si trova l' uomo, parallelamente in varie lingue diverse, devono ajutare nella ricerca etimologica. P. e. trovasi *effroy* e *frayeur* (fr.) = spavento. La sua derivazione è evidente dal latino *frigidus*, quando si con-

(1) Quegli che ha fatto il vocabolario insieme con Papias.

(2) *Inops*, *is* poi deriva da *ops is*, che vuol dire ricchezza, ed *in* particella che rende opposto il significato, come, p. e., *amicus*, con *in*, *inimicus* vuol dire il contrario di *amicus*.

(3) *Physiol. d. Sprache*, T. III, p. 103.

(4) Come *Sanitas atis* ha dato *Sanitate*, *Sanitade*, *Sanità*.

(5) Vedi *Dizionario Ideologico* nel T. IV dell' opera *Monumenti Storici rivelati dall' analisi della parola*.

sideri che lo spavento induce un senso di freddo. Così φρίσσω inorridire e *frigus* (lat.) sono dello stesso tema.

Necritu, che trovasi in Festo, per *negritudo*, si credette essere una forma posteriore di *aegritudo* con protesi dell' *n* (1). Ma se si consideri che *krank* (ted.) = ammalato, prima, come tuttora nel cimbro dei 7 Comuni, voleva dire morto: si troverà che *necritu* è invece la forma più antica da νέκρος (gr.) = morto, e che *aegritudo* è una modificazione di quella. Questo criterio è dedotto dal lenimento progressivo dei sensi delle parole.

Bisogna spingere la ricerca sull' epoca più lontana in cui compare una parola. P. e. esiste in francese la parola *scandaliser;* ma esiste pure *scandalizare* (lat.) e σκανδαλίζειν (gr.). Come si può ora ritenere per radicale della parola francese la parola tedesca *Schande* (2), in cui il suono *sch* è una metalepsi del suono *sk* che appare nelle forme più antiche dello stesso tema? La parola francese è una leggiera modificazione desinenziale della parola σκάνδαλον già passato pure in latino *scandalum*, e quindi nelle lingue moderne *scandalo* (it.), *scandale* (fr.), *Skandal* (ted). ecc. Σκάνδαλον deriva da ἔσκαδον aor. 2 di σκάζω = claudico, zoppico e, per opportunità di tradurre l' ebraico מִכְשׁוֹל *micsciól*, passò al senso morale che porta e che ha conservato nelle lingue dove fu introdotto. מִכְשׁוֹל *micsciól* (tradotto σκάνδαλον) voleva dire un intoppo nella strada che potesse far inciampare e cadere, *offendiculum in via*. Nel Levit. c. XIX, v. 14 vedesi il divieto di porre dinanzi ai ciechi un tale intoppo sulla strada, colla malizia di vederli cadere e burlarsene.

Offerendosi due parole di suono simile con rapporto ideologico pure analogo in due lingue diverse, l' origine starà in quella lingua dove si mostri la precedenza genealogica della parola. P. e. non si deriverà *Foresta* (it.) da *Forst* (ted.), ma viceversa, perchè *Foresta* viene da *forestus, um* (3), (b. lat.) e questo da *foris*. *Foresta* perdette la vocale *e* entrando nella lingua tedesca (nella sillaba media) giusta le abitudini teutoniche (4). Così *stendardo* (it.) non si può derivare da *Standarte* (teut.) (5), perchè in questa lingua non si saprebbe trovare il significato del tema. Invece *Stendardo* è un derivato di *extendere* probabilmente nato fra i Provenzali o insomma nella corruzione

(1) Lanzi, *G. Etrusco*, T. I, p. 99.
(2) Rapp deriva così. Op. c. T. III, p. 143.
(3) Du Cange, *Gloss.* v. c.
(4) *Fenestra* (lat.) *Fenster* (ted.).
(5) Borelli deriva così.

subìta dalla lingua latina in Francia, poichè la desinenza *ardo* non è italiana ma sì una riduzione della desinenza *ard* (fr.), e questa è d' origine teutonica: è la parola *Art* = guisa, maniera. E appunto trovasi in francese *Estendard* che ora si scrive *Étendard.*

I materiali fonetici si possono utilizzare dalla scienza storica in tre maniere.

I. Colla considerazione generale della lingua in rapporto alla nazione che la possiede, e nei rapporti d' una lingua con l' altra, e nella coordinazione assoluta di tutte le lingue.

II. In ogni singola parola, avuto riguardo alla forma ed ai significati.

III. Nella coordinazione delle parole in date serie.

I. *Profitto nella considerazione generale delle lingue.*

La struttura del linguaggio, senza i rapporti ideologici, offre i dati per giudicare delle condizioni organiche della nazione stessa a cui appartiene e del paese della sua dimora. Così la mancanza del suono *r* nella lingua chinese attesta la poca energia del sistema dei nervi del moto specialmente della lingua. La frequenza delle vocali specialmente nel termine delle parole svela il sito di abitazione con frequenti distanze intestine, come, p. e., fra isole o spiagge marittime o fiumane. Si confronti tale condizione fonetica della lingua di Tahiti della N. Zelanda, e della Polinesia in genere e dei dialetti di Genova, di Napoli e di Chioggia colle condizioni topografiche relative. La concorrenza delle consonanti rivela la dimora in paesi freddi dove, evitando per quanto si può, di aprire la bocca, si fanno lavorare le altre parti dell' apparato articolatore.

Le parole automatiche e patetiche nella loro forma pura rimaste così o ridottevi e trovate collo stesso significato fra popoli diversi non possono far prova di rapporto fra quelli. In questo modo *mama* = madre, trovato nel Perù ed in Camba, non farà prova di parentela tra la razza cuprea della America e la razza negra dell' Africa, come non lo farebbe il pianto, il riso, il sospiro comune all' una razza ed all' altra. Questo criterio negativo serve ad escludere una quantità di materiali che, adoperati come argomenti, potrebbero trarre a conclusioni pregiudicate.

I prodotti onomatopeici serviranno d' argomento storico di comunanza antica fra due nazioni, se in una di queste nazioni manchi l' originale di cui la parola imita i fenomeni sonori, p. e. se si trovasse il nome di *Bò* o *Bee* in una isola ora scoperta dato a qualche animale quadrupede che non emettesse questa voce, e che non vi esistessero nè buoi nè pecore in quella, si potrebbe arguire che quella nazione avesse altre volte conosciuto il bue o la pecora e che avesse trasportato quei nomi ad altri animali in qualche maniera somiglianti ai primi così nominati.

La storia non può servirsi per documenti linguistici se non di parole organizzate, perchè le circostanze di composizione difficilmente ponno essere uguali in siti e tempi diversi, e pure difficilmente uguali gli organi della loquela e le abitudini di farli agire presso popoli divisi. Così restando pure parte dell' elemento automatico nelle parole *Mater* (lat.), Μητὴρ (gr.), *Mutter* (ted.) e nelle altre *Pater* (lat.), Πατὴρ (gr.), *Vater* (teut.), la comunità della desinenza *ter* con cui si compose l' elemento primitivo *ma* e *pa*, la quale desinenza trovasi abitualmente fissata in quelle tre lingue per tante altre parole, è un fatto di tradizione comune ai Latini, ai Greci ed ai Teutoni.

Quanto ai materiali fonetici organizzati e coi loro rapporti ideologici, la capacità a rappresentare tale o tal altro genere d' affetti riferisce la disposizione della sensibilità di quel popolo. Raynal dice, a proposito della lingua del Madagascar (che si presta facilmente all' espressione di sentimenti più teneri), ch' essa ci previene favorevolmente a giudicare della dolcezza dei costumi di quegli indigeni e della loro sociabilità. La capacità di una lingua nell'esprimersi in dati argomenti, mostra il grado di educazione del popolo che la parla. Secondo Walter, una lingua alquanto estesa non può essere prima della pastorizia e dell' agricoltura (1). Certo il dizionario d' una lingua è il registro dei cenni delle reminiscenze della nazione a cui appartiene: dunque le parole d' una lingua illustrate nella storia delle loro forme e dei significati denno guidare alle notizie intime della nazione relativa.

I confronti delle lingue considerate nella somma delle parole di cui si costituiscono e nella loro organizzazione servono a giudicare dei rapporti tra popolo e popolo, delle loro origini, della loro antichità, dei loro incontri, p. e. la lingua degli Abissini ci fa conoscere che sono un' antichissima colonia d' Arabi

(1) Walter Witer, *Etymol. magnum.*

che ha traversato lo stretto di Babel Mandeb (1). Che se si tenga conto di tutti i passaggi dei materiali fonetici fra le nazioni come segni riferibili ai contatti in fatto avvenuti, si viene a fissare i gradi di parentela e di agnazione delle umane famiglie. Gli elementi eterogenei commisti in grandi proporzioni in una lingua rivelano la miscela di popoli diversi. Così nella lingua spagnuola e nella portoghese trovasi gran numero di parole arabe per la convivenza coi Saraceni, e così nella lingua inglese sono distintissimi tre elementi celtico, teutonico e francese, per le invasioni degli Anglo-sassoni e dei Normanni in quell' isola dove erano stanziati da tanto tempo i Celti. La prevalenza dei materiali di una piuttosto che dell' altra fra due lingue diverse fuse insieme, quando si trattasse di determinare i rapporti di soggezione o di dominio fra i due popoli relativi, indicherebbe, secondo De Brosses, quale dei due popoli fosse stato il vincitore, perchè pareva a lui che la lingua del più forte dovesse prendere l' impero (2). Infatto un popolo conquistatore, non conoscendo la lingua del paese invaso, anzi che curarsi di apprendere la lingua del popolo che disprezza, insegnerà ben presto a quello il significato delle parole della propria corrispondenti alle sue esigenze e comandi; e i vinti faranno ogni sforzo per intendere ogni diverso cenno e quindi la voce. Sotto la scuola della violenza apprenderanno i vinti le parole corrispondenti agli oggetti capaci di eccitare l' avidità dell' assalitore e da altro canto impareranno spontaneamente, quanto più ponno, i nomi relativi alle dignità, alle leggi, alle pene per cautelarsi alla meglio e minorare i proprii danni. Ma tante volte la lingua del vinto sottomette quella del conquistatore (3). Il popolo vincitore per sua parte è costretto ad apprendere le parole trovate nella lingua del vinto, riferibili a cose non esistenti nel paese d' onde venne e quindi a lui ignote. Così queste parole s' introducono nella lingua del vincitore. Secondo Galvani « la lingua suol darsi dal maggior numero al minore non viceversa, dai conquistati lasciati in vita in istato ecc., e non dai conquistatori che la conquista sperde sopra sè stessa e disgrega (4). » Ma certo trattandosi di conquista, il contatto dei popoli diversi deve durare per molte generazioni perchè succeda la conoscenza mutua delle loro parole e l' introduzione promiscua, come appunto fu il caso in Inghilterra dopo l' approdo di Guglielmo il

(1) De Brosses, *Méch. Lang.* T. II, p. 493.
(2) *Méch. Lang.* T. II, p. 59.
(3) Ivi.
(4) *Genti e Favelle It.* p. 59.

Bastardo che vi vollero cinque secoli per la fusione della lingua importata dai conquistatori con quelli delle razze indigene. Questo criterio sembrerebbe superfluo, perchè abbiamo già la storia scritta che ci narra i fatti delle conquiste degli Arabi, dei Normanni, ecc.; ma quando le ricerche si estenderanno a tutte quelle popolazioni di cui non si hanno monumenti scritti, come quelle dei selvaggi dell'America, dell'Africa, dell'Oceania, ecc., si potrà vederne il profitto.

La linguistica assolutamente raccogliendo tutti i materiali delle lingue esistenti ed illustrandoli offrirebbe il fondo più ricco per l' antropologia. A questo sembra aver pensato De Brosses nella distribuzione ch' egli voleva dare alle parole nel sistema che nominava « Archéologue ou nomenclateur universel. » Dalla cognizione degli stadii percorsi dalle lingue, dalla composizione, modificazione delle parole, sviluppo di tipi grammaticali, simplificazione di quelli ecc., forse verrà giorno in cui col calcolo della durata di tali stadii, esaminando la costituzione delle lingue perite e attuali, si determinerà il tempo dacchè comparve la specie umana sulla superficie terrestre.

II. *Profitto delle singole parole.*

Gli autori che accordano un valore storico ai dati linguistici sono divisi sull' importanza della forma e del significato delle parole. De Brosses si mostra accordare maggiore importanza al significato che non alla forma (1).

Importanza della forma delle parole.

Quando un oggetto o nozione viene da un popolo a passare ad un altro popolo, di lingua diversa, è assai raro che il popolo che riceve la cosa o la nozione dia un nome tratto dalla propria lingua alla cosa straniera. Per far questo bisogna che le persone che ricevono conoscano i rapporti della cosa straniera con altre loro note, onde per questi possano trovare il modo di riferirle nella propria lingua. Questo fatto avviene fra i dotti, come vediamo tutto giorno gli scienziati della Germania plasmare composizioni di parole corrispondenti alla natura degli oggetti stranieri di cui vengono in cognizione, come p. e. il *barometro* ch' essi nominarono *Wetterglas* = vetro del tempo (tempo nel si-

(1) A proposito di *sceau* e *contresceau*, ch' egli deriva da *sigillum*, dice: « par où je vois que j' ai eu raison de déférer à l' identité du sens plutôt qu' à la contrariété de sons » *(Méch. Lang.* T. II, p. 395).

gnificato di condizione meteorologica), e tante volte tradussero il significato del nome della cosa, perchè conoscevano le ragioni della nomenclatura data in quella lingua straniera, p. e. quando fecero *Flusspferd* per tradurre ἱπποπόταμος. In questi casi la forma della parola non può servire per l' investigazione della storia. Ma il processo delle lingue è per la massima parte dovuto alle moltitudini che sono ignoranti assolutamente ed in ispecialità delle cose proprie e tanto più delle straniere. Perciò quando gli oggetti o le pratiche di nazione straniera arrivano ad essere conosciute da un' altra, per lo più vengono importate le parole straniere che a quelle si riferiscono. Vero gli è che tali parole vi si trovano più o meno deformate per l' inesattezza del modo in cui furono percepite, per la difficoltà che hanno gli organi di quelli che le ricevono ad imitarle e per la tendenza a ridurle alle abitudini armoniche e fonetiche ed a quelle ideologiche, cioè alle reminiscenze. Di più le parole subiscono diverse modificazioni di forma secondo che vengono accolte dall' orecchio, oppure s' introducono per iscritto fra nazioni che usino di diverso sistema grafico. E tanto più soffrono nella forma quanto più vengono nell' uso delle classi inferiori. Così le parole relative alla religione cristiana, passando dalla lingua greca e latina in tutti gli idiomi del mondo dove si ebbe contezza del cristianesimo, si ridussero in quelli ad informi frammenti del loro tipo originale.

Importanza dei significati.

Poichè i sensi delle parole vennero sempre loro per allusione alle circostanze in cui si trovarono gli uomini, questi significati tengono il filo mnemonico di tali circostanze, e delle loro vicende. E poichè i primi significati sono sempre concreti, ristretti a condizioni di tempo e di luogo, andando a rintracciare il significato primitivo, si trovano le allusioni alle circostanze speciali più antiche, p. e. di caccia, di guerra, di pastorizia, ecc.; rivela la posizione sociale più antica sia quanto alle azioni come alle tendenze ed alla coscienza.

Ma il passaggio così labile delle parole dall' uno all' altro significato, per questo loro servigio eterno di cenni per qualunque serie mnemonica, fa sì che come documenti storici hanno bisogno di illustrazione che sveli la via di passaggio di questi sensi, sicchè le deduzioni etimologiche isolate di rado hanno un valore incontestabile.

Le parole si trovano più o meno conservate quanto alla forma e ser-

vono pei varii temi coi significati varii che aver possono dai tempi più recenti indietreggiando fino ai più remoti; ma appunto come le medaglie alcune parole sono così logore pel grande corso in lunghissima età che la leggenda non è discernibile. È necessaria allora una critica paziente perchè si possa trovare il loro conio e la loro età, perchè servano alla storia. Le parole attuali possono servire più frequentemente, anzi che colla illustrazione di ciò che sono al presente, con quella d' uno stato anteriore, recondito, avviluppato sotto la forma odierna: devono trattarsi come palimpsesti. I significati antichi furono coperti dall' ultimo attuale, ma risultano dalle traccie etimologiche della costituzione delle parole. Egli è ciò che intendevano doversi rivelare i Greci che chiamarono *ἐτυμολογία*, cioè il vero parlare, la ragione della struttura e dei sensi delle parole. Le parole attuali anzi, quanto alla forma, sono per l' etimologista come tanti fossili adoperati per utensili, supponiamo dei denti di mastodonte travagliati col tornio od in lavoro d' intarsiatura, le quali forme il naturalista trascurando, fa suo studio della struttura anatomica.

Le parole considerate nei loro elementi si presentano a noi come combinazioni affatto nuove, ma in fatto si rivelano quali negli antichissimi tempi dimenticati si succedettero o si precedettero. Così preparate come tanti pezzi anatomici devono dar luogo attualmente a raziocinii e deduzioni simili a quelli delle generazioni che assistettero alla loro composizione. Poichè le parole non sono che cenni mnemonici ai quali l' ascoltatore od il lettore deve aggiungere lunghe serie delle proprie reminiscenze che si associano a quei tocchi acustici, per compiere i tratti ellittici, le lacune da essi comprese. Quante più sono le parole, tanto più crescono i dati per arrivare a capire l' intenzione di chi le pronuncia; quindi quanto più una parola è composta, tanto più si esibisce di mezzi per ispiegare il senso che risultar deve dal confronto delle parti unite a costituirla.

Poichè per la legge d' inerzia, effetto di continuità, nell' universale cangiamento successivo costante, resta pur sempre il presente in unione col passato; spessissimo cangiansi le cose restando invece i nomi di quelle. Così ora in Costantinopoli (occupata e dominata da musulmani Turchi) è una meschita che dicesi ایا صوفیا *aïa Sofia*. Essa porta un nome greco d' un' allusione cristiana (*ἁγια Σοφία* = santa sapienza) che data dall' epoca in cui Giustiniano imperatore bizantino eresse il tempio e lo dedicò alla sapienza (di Dio) (1). In questo

(1) Procopio, *Hist. di Giustiniano* e *De Aedificiis.*

modo avvenne talora che il significato etimologico d' una parola desse testimonianza dell' antico stato d' una cosa, e servisse perfino per determinare la decisione in fatto di diritto. P. e. nel secolo VI dell'Era volgare essendovi questione tra il saraceno Almondar ed Arethas capo della tribù di Gassan, per un tratto di pascolo per le pecore nel deserto al sud di Palmira; il capo dei Gassaniti portò contro il diritto allegato da Almondar (di un tributo che si esigeva da tempo immemorabile per la licenza di pascolo) il nome latino di *strata*, cioè via lastricata, come prova indubitabile del dominio e delle opere dei Romani. Era in fatto una via lastricata della lunghezza di dieci giorni di cammino dalla Araunitis a Babilonia (1).

Mentre d' una parte tutto cangia nell' oggettività, d' altra parte cangiano anche le nozioni soggettive dell' uomo i cui primi giudizii sono sempre falsi. Ora le scienze attuali presentano gli ultimi risultati del giudicio umano sulle sensazioni subìte, l' ultimo corollario di esperimenti spontanei e provocati che sono la rettificazione dei giudizii suoi primi, ai quali resta sempre fedele la moltitudine. Ma questa ultima parte, per quanto sia presentata in maniera completa, è certo insufficiente per la conoscenza di rapporti soggettivi ed oggettivi dell'umano intelletto. Per questo è necessaria la storia delle apparenze e dei giudizii primi e del modo invece delle rettificazioni loro. Ora la storia dei rapporti apparenti si può costruire colla rivelazione dei significati etimologici delle parole, diversi da quelli attuali, perchè appartengono ad un' epoca anteriore alle rettificazioni dei giudizii: onde, mentre cangiarono le opinioni, restarono le parole d' allora che le opinioni erano diverse. Così la parola Ametista rivela nel suo significato (ἀμεθυστος = non ubbriaco) l' opinione che tal pietra preservasse dall' ubbriachezza. E come per le nozioni, così pure servono i significati a rivelare gli usi; e ponno talora rimanere monumenti unici d' usi dimenticati, p. e. il nome *lotium* dato in latino all' orina ci serba la ricordanza della pratica di lavarsi con quella, pratica perduta qui in Italia, mentre si continuò a lungo in Persia e dai Manichei.

Gli oggetti e le nozioni importate da una nazione ad un'altra si accolgono con nomi rappresentanti il luogo d'onde derivano, sono i nomi stessi topografici, p. e. *Brandebourg*, *Polonaise*, *Huppelande*, *Jalapa*, ecc., o sono i nomi indigeni della cosa stessa, come *China*, *china*, *ananas*, *gands* (fr.) (2), *redin-*

(1) Procop. *Bell. Pers.* L. II, c. I; Gibbon, *Hist. Fall.* etc. T. V, c. LXII, p. 170.
(2) Wands (ol.).

gote (1): hanno il significato nella lingua d' onde sono tratti, ed in quella la continuità precedente della loro genealogia, p. e. *sciabla* (it.), *sabre* (fr.), *sabla* (sp.) sono in queste lingue i nomi d' una specie d' arma, ma in nessuna di queste lingue si saprebbe trovare la derivazione, e la causa del nome: bisogna arrivare alla forma ungherese *szablya*, ed ivi trovasi la ragione poichè è da *szab* = tagliare.

Le parole svelano i sentimenti reciproci delle nazioni, p. e. i nomi proprii etnici imposti dagli stranieri che hanno significati ingiuriosi, come p. e. كاور *Guiaur* (turco) = infedele, nome dato dai Turchi agli Europei; e le paronomasie a cui si riducono le parole, se si riferiscano agli stranieri, p. e. حاجّي *haggi* (ar.) = pellegrino, che, quando si deve applicare ad un Cristiano che faccia il pellegrinaggio di Gerusalemme, scrivesi dai Turchi اجى *agi*, colla quale affettazione di errore ortografico la parola viene a voler dire = amaro. E il nome Roma, che si ridusse a ايم *rîm* in arabo e in turco affatto uguale alla parola turca ﺭﻳﻢ *rîm* (già persiana) = sangue corrotto, pus; e il nome proprio di persona يوسف *Iusuf* (= Giuseppe) ovvio fra i Turchi, che quando si debba nominare un omonimo ebreo, si cangia in اسو *Asef;* sicchè il nome così deformato verrebbe a voler dire rammarico (2). E d' altra parte i nomi etnonimici stessi passando nelle nazioni straniere assumono significati relativi all' opinione in cui si hanno tali genti, p. e. *Vaudois* è diventato in francese un' ingiuria, per l'opinione delle pratiche esecrande attribuite agli abitatori del paese di Vaud, e il nome *Boulgare* (cioè Bulgaro) ricevette sopra di sè tale allusione, che come è ridotto nella sua forma attuale (*bougre*), non si può onestamente proferire.

Alcune parole, specialmente alcuni nomi topografici sono ingenui monumenti del contatto così intimo di popoli affatto stranieri fra loro, che udivano il discorso l' uno dell' altro, ma non si capivano. Tali parole analizzate nella loro costituzione risultano composte da voci eterogenee, ognuna delle quali nelle lingue da cui fu tratta ha lo stesso significato dell' altra voce straniera con cui si compone: sicchè l' una è la traduzione precisa dell' altra. Tale è, p. e., il nome *Mongibello*, dove la prima parte è il latino *Mons* e la seconda è l' arabo *gibel* che vuol dire monte. E questa composizione di due parole d' uguale significato e di lingue diverse avvenne appunto per la contiguità dei Saraceni coi Siciliani; poichè i Siciliani udendo nominarsi *gibel* l' Etna, nè sapendo cosa

(1) *Riding coat* (ingl.). De Brosses, *Méch. Lang.* T. II, p. 433.
(2) Bianchi et Kieffer, *Dict. Turc.* v. c.

volesse dire, dovevano indicare nella loro lingua che si trattava del monte (Etna), e quindi dicevano *Mon* (s) *Gibel* (= il monte dai Saraceni detto *Gibel*). Di questa specie di parole ne sono parecchie là dove varie stirpi occupano promiscuamente uno stesso paese, p. e. in Ungheria dove sono Magiari, Slavi, Ratzi, Tedeschi, Valacchi e Francesi, e nell' impero degli Ottomani, dove sono Greci, Slavi, Siri, Arabi, ecc. Quindi tali parole trovansi nella lingua turca, nella lingua ungherese, ecc.

Una stessa parola può servire in varii posti dell' investigazione storica a seconda dei varii significati che porta o che ebbe sopra di sè in varii tempi, p. e. la parola *Bustum* (lat.), da cui abbiamo fatto *busto* (it.), serve 1.° per documento della maniera di sepoltura usata presso i Romani, poichè viene da *buro* = abbruciare (1); 2.° poichè *busto* (it.) significa una scultura rappresentante l'umana forma dal vertice della testa fino a gran parte del torace, indica quindi una delle occasioni della scultura, cioè la pietà di ricordare le sembianze dei trapassati. E poichè, giusta la legge assoluta della natura, ogni cosa ha un' esistenza per sè ed ha rapporti col passato e col futuro (i quali così vengono da noi percepiti) che stanno in fatto nella continuità d' ogni parte (da noi considerata) del gran Tutto; avviene che nello studio più fedele d' ogni argomento c' incontriamo sempre in queste tre fasi (passato, presente e futuro), così nel rapporto delle parole colle cose, quelle parole medesime che stanno come medaglie di fatti avvenuti ci mostrano nella moltiplicità dei significati loro sopravvenuti gli effetti di questi fatti medesimi. P. e. la parola *νόμος* vuol dire pascolo, e poi legge e canto. Questa parola quindi appartiene alla pastorizia e ci dà l' origine delle leggi e di un divertimento in quello stadio di progresso dell' umana convivenza: il suo posto è quindi nell' argomento della pastorizia, risguardando i suoi effetti. Ma questa parola stessa *νόμος* = legge deve avere menzione nel tema legale in quanto che ci addita l' origine delle leggi probabilmente nel bisogno di distribuire i siti da pascolarsi, *νέμω* = divido, e nel tema della musica, dandoci l' origine di quella nell' ozio di attendere alle greggie. E da *νόμος* = pascolo, venne *numus* (lat.) (2) e *νόμισμα* (gr.) = moneta, perchè nella vita pastorale ebbero luogo con maggior frequenza gli scambii, di cui mezzo rappresen-

(1) « Bustum proprie dicitur locus in quo mortui cadaver combustum est et in quo sepultum (Servius, *in XII Aen.*). Pyra est lignorum congeries; rogus cum ardere caepit, bustum vero jam exustum vocatur. »

(2) Antica ortografia, poi *nummus*.

tativo comodo (perchè di poco valore) furono i capi del bestiame agnelli, pecore ecc., coi singoli individui del quale e con dati numeri dei medesimi si andava equiparando il valore di altri oggetti: la stessa parola dunque ha servigio nella storia numismatica.

II. *Profitto delle parole coordinate in date serie.*

Le parole stesse servono assai meglio, moltiplicando i dati di prova, nella serie della loro disposizione, come le serie delle medaglie danno opportunità alla cognizione di lunghi tratti di tempo scorsi e di vario interesse per la storia. Distribuite secondo i varii temi, in corrispondenza alla vera opportunità d' origine del significato loro, servono di segno alla successione degli eventi. La partizione delle parole straniere entrate in una data lingua, secondo gli oggetti o le idee a cui si riferiscono, dà la storia delle maniere di rapporto fra la nazione di questa lingua che si analizza e quelle le cui parole si veggono introdotte. Così nelle lingue teutoniche le parole relative a prodotti vegetabili d' uso pel vitto e pel vestimento, sono italiche. *Ris*, che poi fu *Reis* (*Oryza* (lat.), *Riso* (it.)); *Win*, che poi fu *Wein* (*vinum* (lat.)); *Persich*, che poi fu *Pfirsich*, *Persicus* (lat.); *Lin* (che poi fu *Lein* (*Linum* (lat.)); *Hanf* (cannabis) ecc. Le serie dunque di queste parole riferiscono il passaggio delle nozioni relative dai Latini ai popoli Germanici. In tutte le lingue d' Europa la massima parte delle parole relative alla religione sono greche, e per un quoto non piccolo ebraiche, perchè il cristianesimo ch' ebbe radice fra popoli semitici, ebbe sviluppo e si costituì fra popoli parlanti lingua greca, e di là si diffuse all' occidente. E nella lingua turca la massima parte delle parole relative al culto sono arabe (cioè appartengono ad una lingua affatto diversa), perchè l' islamismo fu insegnato dagli Arabi. In questo modo le parole relative alla guerra, nelle varie lingue romane, sono d' origine teutonica, perchè le nazioni dove era già in uso il linguaggio latino furono conquistate da popoli di stirpe teutonica, Visigoti, Ostrogoti, Franchi, Vandali, Eruli, Longobardi, ecc. (1). Le parole relative alla medicina nella lingua latina sono quasi tutte greche, e appunto dalla Grecia vennero in Italia quelle cognizioni.

(1) *Guardia* (it.), *Garde* (fr.), *Guarda* (sp.), *da Warde* (teut.); e *Wehr* (teut.) ha dato *Guerra* (it.), (sp.), *Guerre* (fr.); *Hallebarde*, *Alabarda*; *Stocco* da Stock (ted.); *Spada* da *Spatha* (celt.).

Nella raccolta di queste parole-medaglie rappresentanti dati storici, accade accorgersi della ripetizione di fatti identici od analoghi in moltissime parti segregate per luogo e per tempo, p. e. il dispregio in cui si tiene dalla società il contadino; poichè la parola indicante quella condizione, in tante lingue divenne aggettivo insultante, così in greco ἀγροικός, *rusticus* (lat.), d'onde *rustre* (fr.), *villano* (it.) *vilain*, *manant* e *campagnard* (fr.), *clown* (ingl.). Da queste ripetizioni viene suggerita la coordinazione di tutti i fatti analoghi sotto date categorie, d'onde si può trarre l' ultimo risultato nell' ordine relativo alle circostanze delle umane famiglie, ultimo frutto delle pazienti analisi, la sintesi chiara, semplice dei segni corrispondenti alla realtà delle vicende toccate al genere umano. Coi fatti avvicinati di tutte le nazioni, si potrà fare una specie di storia comparata, la quale servirà doppiamente, cioè per una parte presentando simplificate le maniere degli eventi possibili, e questo si riferisce alla somma delle cose; e dall' altra conducendoci alle cause delle determinazioni dell' uomo, che furono uno dei momenti di tale risultato, dà il fondamento definito dell'ideologia. Poichè gli eventi dell' umana società risultano dalle circostanze esterne all' uomo e dalla maniera d' azione di questo all' opportunità, qui va a tracciarsi quel circolo in cui si può contenere la storia, dove il centro è costituito dal *me*, dalla soggettività, dall' individuo; la circonferenza dal mondo ambiente, dalla oggettività, come comparisce ai sensi dell' uomo; i raggi dai rapporti di comunicazione di continuità tra le varie apparenze del mondo ambiente ed il *me* (1).

Così si costituisce la storia generica colla narrazione del principio e del processo degli elementi di cui si costituì il vivere sociale, dei bisogni individuali e degli istinti che determinarono a ripararvi, fame, freddo, stanchezza, atto generativo, e dei bisogni sociali che ebbero per effetto i varii ordini civili, le professioni, le arti, le scienze; e dei rapporti individuali d' onde le ostilità tra uomo ed uomo e le amicizie; e dei rapporti fra società e società d' onde le guerre, le conquiste, le divisioni di caste, cioè di dominatori e di soggetti, le leghe ecc. Poichè in questo sistema di storia si tocca trattarsi sempre di poche molle messe in moto e dei loro effetti, e dell' agire da capo delle stesse molle e della sovrapposizione dei loro effetti, col precisare il numero di queste maniere di risultati analitici, e di momenti primi si può giungere a verificare il sospetto del Romagnosi « che tutti gli eventi storici delle umane società si possano ridurre

(1) V. *Monumenti Storici rivelati dall' analisi della parola*, T. I, Introduzione, p. 27.

a date manifestazioni di proprietà dell' uomo e dell' umana famiglia come tutti i lavori delle api o dei castori: » solo nell' uomo la preminenza, il vantaggio sta nell' approfittare di quello che fu già fatto dagli uomini che lo precedettero, mentre l' animale comincia da capo. La storia, retrocedendo dalla enumerazione di particolarità di fatti alle cause semplici di quelli, si semplifica, si riduce alla conoscenza di date leggi o tesi rappresentanti la realtà degli eventi e fusa nel numero degli eventi analoghi: come tutte le descrizioni della vita fisiologica di un individuo si ridurrebbero alla ripetizione di quei pochi atti, effetti delle funzioni organiche. Così unendo i risultati dell' ideologia, quando si sapessero esattamente le circostanze, si potrebbe conoscere a priori la storia delle cose avvenire: così si troverebbe la storia razionale, poichè questa, quando sia vera, non può essere se non una deduzione giusta dei fatti necessarii per umana natura messa in atto, e quindi non può differire dalla storia reale degli eventi, come non può differire una somma dai dati di cui si costituisce.

La distribuzione delle parole in ordine genealogico, come si trovano sinotticamente negli alberi epogonici, soddisferebbe minutamente la curiosità in molti temi dove i metodi d' investigazione storica furono finora insufficienti come esperirono i filosofi. P. e. Romagnosi così si esprime: « Non si fa la storia delle invenzioni delle cognizioni intorno gli oggetti diversi nell' ordine fisico e morale. D' altronde essendo costretti di avventurare le nostre ricerche ad un corso assai fortuito di circostanze, non potremmo fissare niente di preciso; e quello solo, che additar si potesse a norma delle leggi generali dell' uomo, sarebbe troppo incompleto a somministrare le teorie soddisfacenti dei compostissimi effetti che avvengono nell' ordine reale delle cose (1). » E altrove: « Nel mondo della natura questo cielo e questa terra colla sua conformazione, coi suoi climi, coi suoi territorii, col corso delle sue stagioni, colla vita dei suoi vegetabili e dei suoi animali presenta l' oggetto materiale della naturale filosofia, e delle tante scienze nelle quali viene diramata. Ma nel mondo delle nazioni possiamo dire lo stesso? Che cosa abbiamo noi di visibile, fuorchè il mondo della natura e i fatti esterni articolati successivi e trasformati dell' umanità? L' idea dunque dell' incivilimento deve essere prima di pianta *creata coll' immaginazione*, ossia meglio colla combinazione accertata, calcolata dei fatti e delle cause che lo producono, ed indi esposta nel suo tutto e nelle sue grandi funzioni permanenti e successive. » Tutto questo abisso, che il Romagnosi crede non potere essere varcato se

(1) Valid., *Dei Giudicii*, P. II, Sez. II, c. XIII. Opere, T. I, P. II, p. 843.

non dall' immaginazione, si continua a palmo a palmo dalle parole giustamente illustrate. Quest' oggetto materiale, che Romagnosi dice mancare, sono le parole. Degli alberi genealogici delle parole esattissimi e completi, comprendenti cioè tutte le parole che esistono ed esistettero, costituirebbero la storia universale in corrispondenza alle maniere di spazio e di tempo nelle quali avvennero tutti gli umani eventi, sia di sensibilità, cioè passivi, cioè gli influssi dell' esterno sulla umana percettività, sia di reazione a tali impressioni, cioè di atti, opere dell'uomo. Anzi per tentare l' unificazione della scienza, non credo esservi altra via che quella di fare la storia della parola; perchè i sensi delle parole sono esattissimamente paralleli agli accorgimenti dell' uomo, sia in riguardo agli oggetti esterni, sia quanto al suo centrico *me*. Siccome tutta la scienza si riduce ad essere la somma di questi accorgimenti ora adeguati, ora inadeguati, la storia dei segni (parole) di tali accorgimenti svela il modo di successione e le varie ripetizioni dei medesimi, ove con costanza di tutto l' aspetto, ove, come più di frequente, con varianti di quello.

In questo sistema, seguendo il filo genealogico delle parole dei loro sensi e dietro questo disponendole, si costituisce una serie di segni in riflessione esatta alla realtà degli avvenimenti, in un ordine così parallelo a quello della serie nella quale si svolsero, accaddero i fatti. Ecco come si opera un congegno esatto di necessità delle parti costituenti la storia, riponendo nel sistema delle ricordanze ognuna di queste nel punto preciso dello spazio e del tempo che le corrisponde; per la qual cosa, dalla posizione stessa che occupa relativamente alle altre ogni segno di ricordanza, risulta l' evidenza della verità. La notizia degli eventi si localizza nell' ordine in cui avvennero; p. e. il significato di perdono politico ricevuto dalla parola *ἀμνηστία* data dall' epoca del decreto di Trasibulo, allora che avendo scacciato da Atene i 30 tiranni promulgò la dimenticanza delle ingiurie fatte da quelli (1). E la reminiscenza pel lettore è affatto localizzata e definita; si riferisce ad una percezione ottica; poichè ricorda la parola, la ricorda in quel tal dato sito del foglio, con quei tali rapporti delle parole che le succedono o precedonla o le stanno da lato, come si ricorda un punto geografico per l' attenzione prestata ai rapporti di disegno di varie parti della mappa. La memoria degli eventi avviene per riproduzione d' un fatto acustico: la persona ricordante all' udire tale parola risente in sè l' allusione per cui ottenne il significato che ha. Questo metodo porge nel presente

(1) M. Tull. Cic., Val. Max., Justin., L. V, in fine.

le circostanze per le quali a forza di secoli e di milioni di vociferanti e di ascoltatori si stabilirono i rapporti di mutua intelligenza nelle società umane, le quali circostanze sono tanti avvenimenti che di fatto ebbero luogo, e senza dei quali le parole non avrebbero i significati che hanno. Come dunque per scienza certa di tali fatti sporadicamente or qua or là in uno degli istanti del tempo che corse dacchè esistono gli uomini, gli uomini testimonii di questo o tal altro fatto poterono ricordarlo all' occasione di tal o tal parola; così per questo metodo il lettore si sostituisce ai testimonii stessi del fatto per cui le parole tale significato ricevettero. In questo modo i Romani contemporanei di Cesare furono testimonii del fatto per cui la parola Cesare volle dire imperatore. Ma forse che ai Romani dell' epoca di Cesare sarà stato dato d'essere testimonii di dieci fatti appena per cui dieci parole acquistassero un tal dato senso appunto relativo ad uno di tali fatti. Ora, se si eseguisse un' opera tale che abbracciasse tutte le forme delle parole che esistono e che esistettero per tutti i tempi e tutti i luoghi, e se ad ogni parola fosse assegnato il punto preciso d' origine del suo significato, la sua allusione specifica, il lettore di tal opera si sostituirebbe a tutti gli uomini che furono testimonii delle circostanze che dai significati di tali parole si ricordano. Tale lettore saprebbe la storia di tutti questi fatti con verità di poco inferiore a quella con cui il tale o tale individuo un tal fatto conosceva per sensazione propria, e quindi pel suono di tal parola risentiva, cioè ricordava. Poichè questa ricordanza addossata alla parola si tramutò in senso ricevuto così in buona fede dagli altri umani individui che non furono testimonii della circostanza d' origine del significato a cui tal suono è pervenuto, e quindi non seppero quasi mai la cagione del rapporto tra il senso ed il suono; avvenne che le lingue, le quali sono immedesimate colla storia, si conoscono e si apprendono dalla storia affatto disgiunte, e la massima parte di chi le parla non ha il più minimo sospetto, nell' atto di adoperare le parole, del modo per cui arriva con queste a farsi capire, che è dando i cenni dei fatti avvenuti nelle generazioni precedenti; cioè presentando sempre cenni di ricordanze storiche. Ora per mezzo di quest' opera le parole ritornerebbero al loro naturale ed eterno servigio di punti di reminiscenza degli eventi, e tali resterebbero per sempre, perchè non si perderebbe più la conoscenza riacquistata della ragione di questo rapporto con dati significati; mentre dall' epoca in cui ogni parola acquistò un dato senso per allusione ad un dato fatto, la cognizione del fatto preciso si mantenne per un tempo brevissimo, restando invece il senso ac-

cettato empiricamente, praticamente, per un tempo senza confronto più lungo. Osservisi, p. e., il tempo in cui si conobbe perchè il nome di *Cesare* passò al significato d' imperatore, e si confronti col tempo dacchè dura il nome stesso in tante nazioni col significato d' imperatore, senza sapere il fatto, cioè della persona di Cesare che usurpò il sommo potere, a cui alludendo la parola Cesare acquistò il significato d' imperatore, solo rimasto nelle forme che ne derivarono *Cesare* (it.), *Kaiser* (ted.), קסר *kesár* (ebr.), *csaszar* (ungh.) ecc.

Da quest'ordine, che restituisce le parole al vero loro posto di spazio e di tempo, ne vengono altri utili importantissimi. Poichè la sola collocazione d'una cosa nel vero suo sito, dandole l' evidenza della sua necessità, vale più d' ogni guerra fatta esplicitamente all'errore; in fatto, quando si mostra come una cosa è, è impossibile di cedere a chi inculca che fosse in un' altra maniera. Così quando si arrivi al punto d' origine di certe opinioni, da sè sole cadono le fantasie resistenti ad ogni argomento. P. e. molte delle deità che si pensavano come enti eterni si trovano comparire a dati momenti storici: così in Roma la dea Concordia, che non esisteva prima dell' ammutinamento della plebe sul Monte Sacro. Quale fra quanti sanno l' epoca in cui questa dea nacque dal capo degli uomini di Stato di Roma, potrà durare nella fede ch' essa fosse stata nell' Olimpo?

E la storia, come esiste negli scritti e come si concepisce fino ai nostri giorni, dando come tanti quadri staccati dei varii argomenti ch' ella si propone, non guida a seguire la continuità reale. Questa partizione comincia fino dalla stessa sua sintassi artificiale, arbitraria ad illudere la mente, le presenta un rapporto fittizio e la abitua a considerare in fatto come segregate tali serie, che in realtà si svilupparono in un continuo intrecciamento. P. e. la medicina, come ora è scienza ed arte, risulta di una quantità di momenti di tutt'altro interesse, p. e. dai commercii e dai viaggi, onde gli uomini vennero in cognizione di certi mezzi o pratiche che credettero terapeutiche, e di nozioni derivate da altre scienze, come dalle applicazioni artistiche dell' ottica, delle scoperte sull' elettricità ecc. Ora la collocazione delle parole nel vero posto d' origine delle loro forme e dell' acquisto dei significati traccia questa continuità reale, e svela gli elementi singoli di qualunque sorte, dei quali si costituì il processo sociale.

Questa disposizione è in pronto più ancora che per l' utilità di nozioni speciali, per criterii sommarii capaci di rettificare le abitudini del nostro intelletto. E in fatto nell' esame della continuità del tempo, in qualunque specie

di argomento che si studii, bisogna prima procedere dallo stato attuale indietreggiando verso quello passato, seguendo il filo che si ha in mano finchè si può giungere; ma poi bisogna invece volgersi dall' ultimo punto noto vergendo verso l' attuale. Nel primo modo si acquisterà la certezza del legame tra lo stato presente e quello che fu prima; ma nel secondo modo si acquisterà la nozione delle cause, del perchè dello stato attuale. Allora sparirà ogni meraviglia nataci dall' apparenza delle cose quali le troviamo prima di indagare le origini, per la quale noi siamo disposti ad attribuire a piani teorici coordinati, alla saggezza, alla previdenza le cose quali sono; mentre invece col secondo modo d'investigazione ci tocca di accorgerci che il fatto della cosa esistente dal passato all' attuale è l' effetto necessario, conseguente della maniera prima in cui erano le cose e del loro passaggio per quelle date circostanze che s' incontrarono per la via che il nostro studio ci fa riscontrare. Tutta la meraviglia consisteva in questo scopo che noi credevamo aver diretto il processo fino agli ultimi effetti, e che quando fummo arrivati sul luogo d' origine abbiamo capito di averlo cercato invano, perchè già tutto doveva succedere senza di quello. Prima di aver provato gli effetti diversi di questi due modi d' investigazione, parrebbe che tanto dovesse essere l' uno come l' altro; tanto percorrere un tramite dall' estremità che arriva a noi a quella più lontana, quanto cominciare dall' estremità più lontana e seguirla fino al punto per cui a noi si avvicina; ma invece ecco dove consiste la grande differenza. Nella contemplazione dell' estremità che arriva a noi, non si può a meno di non risentirsi dell'impressione che la cosa fa sopra di noi stessi; e quindi noi la guardiamo con una opinione preconcetta, miriamo in essa un rapporto con noi anzi che la sua essenza indipendente; e forse non possiamo spogliarci di questa associazione pregiudicata lungo tutto l' esame fino al punto più remoto. Nell' esame invece cominciato dal punto più remoto, la cosa s' investiga per sè in una condizione assoluta indipendente, e di mano in mano procedendo ci accorgiamo del modo per cui venne a riuscire tale quale si trova in faccia a noi; disvelasi come avvenne che ciò che non mirava minimamente al nostro riguardo, venne in ultimo a comparirci siccome preparato per noi: il processo dall' indietro all' innanzi, da ciò che fu a ciò che succedette, lo sviluppo ulteriore si mostra siccome una necessità continua col passato anzi che una tendenza che si fissa riguardo al futuro.

La disposizione delle parole nel modo che giova a tracciare la storia

ci produce una convinzione che non si potrebbe ottenere dalla storia come finora si costituisce. Veniamo ad essere contemporanei di qualunque età trascorsa vedendo con certezza essere successo quello che succede sotto i nostri occhi, il quale risultato vince l' effetto d' una illusione che tanto più idealizza il passato quanto è più lontano. Per la nostra stessa persona ed esistenza gli anni che furono pajono essere stati, se non più belli, più poetici. Avviene, come quando visitiamo gli ipogei, le città dissotterrate di Ercolano e di Pompeja o i musei dove si raccolsero gli oggetti trovati in quelle, dove vediamo che gli uomini di 18 secoli fa avevano gli stessi bisogni e le stesse nostre abitudini domestiche e private; mentre alla nostra coscienza, avvezza ad associare alle epoche di Cesare e di Augusto il sentimento di venerazione che la storia e la letteratura ci ispira contemporaneamente al nominarci quei nomi, non si presenta la riflessione che gli uomini di quei tempi dovevano vivere sempre secondo gli impulsi della natura umana, quindi similmente agli uomini dei nostri giorni. La storia svolta dallo studio e dalla coordinazione delle parole in date serie deve riuscir così semplice e naturale che i fatti scorsi per tutta l' umanità si presentino al nostro intelletto come tante nostre individuali reminiscenze, cioè di fatti dei quali ebbimo noi stessi esperienza; poichè gli eventi, d' influssi anche estesissimi, si compongono, si costituiscono sempre di quei pochi elementi delle determinazioni soggettive, ossia del me, in contatto col mondo ambiente, i quali non ponno a meno di non accadere ed essere osservati dalla massima parte degli uomini nel corso ordinario della vita (1).

Riducendo quindi i fatti scorsi colla risoluzione nei loro elementi, appajono della stessa natura degli odierni. Dietro questa semplicità, la storia del passato viene quasi a riuscire più che una reminiscenza una sensazione, perchè si mostra affatto uguale alle scene presenti e da noi stessi esperimentate, vedute. D' altra parte, oltre la ripetizione degli stessi elementi, ci accorgiamo anche della continuazione dei modi antichissimi in quelli attuali, la cui identità non avevamo mai sospettata. Ora, restituendoli alla loro origine, siamo per questa parte fatti contemporanei di quelle epoche; sicchè nel luogo delle reminiscenze altrui, accennateci languidamente con cenni acustici (discorso), ai quali è quasi impossibile di aggiungere tutte quelle associazioni che occorro-

(1) Fu già detto per parte della natura dell' uomo, « che con tutta la diversità di tempo e di luogo, essa è sempre uguale a sè medesima. »

no per compiere la nozione, si mette la sensazione attuale che noi stessi proviamo nel vedere ciò che si fa al nostro tempo. Così la storia universale riuscirebbe a farci sentire simpaticamente pei casi e pegli ordinamenti primevi. Il presente pertanto si palesa indivisibile dal passato per la continuità oggettiva, come già i pensatori avevano avvertito (1). Che se a questo si uniscano i fatti dell' intimità soggettiva ne viene come ultimo corollario l'accorgimento dell' assoluta eterna coesistenza. Poichè nel *me* è tanta medesimezza del presente col passato che il pensiero nell' atto stesso appartiene a questi due tempi, è una continuità col modo di aver esistito, e senza di questa è impossibile; onde ogni fenomeno anche primitivo della coscienza è il concorso di due istanti in un atteggiamento (2).

Nell' enunciare questa verità, che ci toglie a tutti i limiti delle nostre abitudini, e direi della nostra natura, il sentimento di questo vero assoluto, dirimpetto al breve confine esperimentale continuo dei nostri sensi, ci penetra d' una specie di terrore; perchè dalla realtà della nostra coscienza, ci prende per abbandonarci ad una realtà senza confini.

(1) I fatti presenti figli non tanto della costante natura, quanto dei fatti passati, che coi presenti generano i futuri, poichè l'umanità non si spegne, ma si accumula per tradizione, e per tradizione e per prodotti in cui gli uomini, non esclusi i genii, agiscono concatenati alle generazioni presenti ed alle passate (Rosa, *Feudi* e *Comuni*, p. 162). » Nessun tempo può staccarsi dal suo passato; e nessun tempo può tornarvi. » (Hoffmann, *Ueber die Begründung und die Bedeutung der deutschen Sprachwissenschaften und Alterthumskunde*, Akademische Festrede 28 November 1856. München, *Allgm. Zeit.* 9 December 1856, p. 5507).

(2) Vedi *Monumenti storici rivelati dall' analisi della parola*, T. VIII. *Ideologia dedotta dalla st. nat. di lingue.*

(*Letta ai 13 febbraio e 12 marzo 1860.*)

ERRATA				CORRIGE
Pag.	252,	lin. 7	BD.	DB
»	397,	» 12	Petreficata	Petrificata
»	398,	» 25	inseriti	inserite
»	399,	» 27	dei generi	del genere
»	401,	» 13	si succedesse il avverasse	si avverasse l' immedesimarsi
»	405,	» 13	in questo	su questo
»	409,	» 7	plagiastomi.	plagiostomi
»	416,	» 16	ragie	razze
»	421,	» 18	corrispondenti.	corrispondente
»	»	» 22	distinte	distinti
»	422,	» 12	listarella.	listerella
»	424,	» 7	la seconda l' ultima.	la seconda e l' ultima
»	»	» 17	relative	relativa
»	429,	» 25	fra i singoli paji.	fra le singole paja
»	435,	» 18	forma.	formano
»	436,	» 17	del pelvi	della pelvi
»	438,	» 14	la lunghezza del secondo.	la lunghezza del primo
»	440,	» 19	intercrurale.	vertebrale
»	»	» 34	sollevano	solleva
»	441,	» 21	viene cadere	viene a cadere
»	442,	» 22	pajo perpendicolari	pajo di perpendicolari
»	452,	» 17	semielissi	semiellissi
»	453,	» 21	nel stretto	nello stretto
»	455,	» 22	parte dei.	parte dai
»	461,	» 10	distribuiti	distribuite
»	465,	» 1	corrispondano	corrispondono
»	473,	» 3	trasveri	trasversi
»	474,	» 30	odontoide	odontoidee
»	»	» 38	ondontidee	odontoidee

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME.

Teoria dinamica del calorico. Memoria del m. e. Domenico Turazza. Pag. 1
Sulle cause che resero finora infruttuose le misure prese per abolire la tratta dei Negri, e come un tale scopo si potrebbe raggiungere. Riflessioni del m. e. cav. ab. Lodovico Menin . . . . . » 87
Della materia e delle forze. Consideraz. del m. e. prof. Giusto Bellavitis. » 101
Ricerche sul moto dell' acqua nel turbine idroforo dello Schlegel, e sull' effetto di questa macchina applicata al prosciugamento dei terreni palustri, del m. e. prof. Gustavo Bucchia (con una tavola). » 135
Relazioni di allineamento nei punti delle curve algebriche. Nota del m. e. prof. Giusto Bellavitis . . . . . » 161
Della vita e delle opere di Francesco Lomonaco. Discorso del m. e. Giuseppe Bianchetti. . . . . » 181
Ulteriori indizii che avvaloravo le conghietture emesse in altra memoria sulle popolazioni dell' Africa centrale. Nota del m. e. Lodovico Menin (con una tavola). . . . . » 215
Beneficenza e Amore. Memoria del m. e. Girolamo Venanzio. . . » 225
Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica. Memoria del m. e. prof. Giusto Bellavitis . . . . . » 241
Sullo scheletro degli Squali. Ricerche anatomiche del s. c. prof. Raffaele Molin jadrense (con 10 tavole) . . . . . » 391
Dell' applicazione della storia naturale delle lingue alle investigazioni della storia delle nazioni, del s. c. dottor Paolo Marzolo . . » 483
Errata-corrige . . . . . » 522

VENEZIA

NEL PRIV. STABIL. DI G. ANTONELLI

1860.

GETTY CENTER LINRARY
3 3125 00677 6906